现代数学研究丛书

主编 刘应明

模糊数学导论

刘旺金 何家儒



四川教育出版社

模糊数学导论

四川教育出版社

(川)新登字 005 号

责任编辑:何伍鸣

封面设计:何一兵

现代数学研究丛书

模糊数学导论 刘旺金 何家儒著

四川教育出版社出版发行 (成都盐道街三号)

四川省新华书店经销 四川新华印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 13 插页 4 字数 298 千

1992 年 3 月第一版 1992 年 3 月第一次印刷

印数:1—980 册

ISBN7—5408—1556—6/G·1502 定价:7.20 元

前　言

模糊数学是一门新兴的数学学科. 从美国学者 L. A. Zadeh 发表著名的开创性论文"Fuzzy Set"[167]至今,刚刚 25 年,作为一门学科的发展来说,尚处于初始阶段. 由于国内外学者的共同努力和勤恳耕耘,使科学园地里的这棵新芽茁壮成长,虽然还远远没有成为郁郁葱葱的参天大树,但已是枝叶并茂,百花争艳的一片兴旺景象,显示出它内在的强大生命力. 我国学者从事模糊数学的研究始于 70 年代中期,十多年来在实际应用和理论研究方面都取得了可喜的成果,在有些领域已经步入世界的先进行列,成为支撑这门学科发展的一大支柱.

如果说 80 年代是模糊数学飞速发展,"登堂入室"的年代,那么 90 年代则应该是在理论体系的严密性和实际应用的有效性上多下功夫,使之成为既独具风格又逐渐成熟的一门数学学科. 本书正是在这种思想的驱使下的一次初步尝试. 如能起抛砖引玉的作用,我们就欣慰了. 本书第一章阐述模糊集合的基本概念,几种定义形式,突出了模糊点在公理化定义形成过程中的先驱和桥梁作用. 第二章介绍模糊关系,模糊矩阵代数,模糊关系方程以及模糊图.

第三章以基本模糊点式映射为基础论述扩张原理和模糊集式映射的生成问题及其构造.第四章是在半测度的基本框架下统一处理和论述几种测度、模糊测度及其相应的积分理论.第五章讨论模糊概率,模糊随机变量和随机模糊集.第六章研究模糊数与模糊值函数的一些基本问题.本书既是对国内外相关的研究成果的部分汇集和加工整理,同时各章也都包含了作者及其研究生们的一些研究成果,因此也是对我们的一部分研究工作的阶段性总结.

值得特别说明的是,模糊拓扑作为模糊数学的重要组成部分,注意到王国俊教授已有专著《L-fuzzy 拓扑空间论》作全面系统论述,我们在本书中只将模糊拓扑中一些最基本的概念撰写成为附录.既使本书内容相对完整,同时又保持了自身的特色.

本书是我们在为四川师范大学数学专业本科生编写的选修课讲义和为模糊数学方向历届研究生上课的讲稿基础上,经过多次修改补充而成的.本书能同读者见面,承蒙四川教育出版社的大力支持和帮助,作者特向他们表示衷心的感谢.由于作者水平有限,虽然尽力而为,书中的错误和疏漏之处仍在所难免,恳请同行专家和广大读者批评指正.

著者

1990年10月于成都狮子山

目录

第 0 章　预备知识

首先，我们把本书中经常使用的一些基本概念和有关的预备知识，择其重要者，罗列于下，以方便叙述和阅读.

§1　集合

集合概念在现代数学中是最基本的概念. 粗略地说，我们把在一定场合所考察、研究的对象的全体称为**集合**，简称为**集**. 例如实数全体，有理数全体，自然数全体等组成各种数的集合；男人全体，女人全体，某个学校的学生全体等分别所组成各种人的集合. 一般地，由具有某种特定性质的相互可以区别的具体或抽象的事物全体组成一个集合，其中的成员称为这个集合的**元素**. 或简称为**元**.

一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.

对于给定的集合 A 来说，某个事物 a，或者它是 A 的元素，记作 $a\in A$，并说"a 属于 A"；或者它不是 A 的元素，记作 $a\overline{\in} A$ 或 $a\notin A$，并说"a 不属于 A". 二者必居其一且只居其一. 为了方便，用记号 $\varnothing$ 表示不包含任何元素的集合，称之为空集. 对于任何一个事物 x

$(\forall x)$,恒有 $x \overline{\in} \varnothing$.

当我们讨论某个问题时,总是把议题限制在一定的范围内,我们把所讨论的全体事物组成的集合 X 称为**论域**,经常还把具有某种数学结构的论域称为**空间**,而空间中的元素又常称为"**点**".

如果集合 A 与集合 B 所包含的元素完全相同,即 A 与 B 是表示同一个集的符号.亦即 $a\in A \Leftrightarrow a\in B$,称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.否则,A 与 B 不是同一个集合,记作 $A\neq B$.

如果集合 A 的元素为数不多或者可以按照某个规则列举出 A 的任一元素,这时我们可以用列举法表示集合.例如 A 是由 a,b,c 三个元素组成的集合,可表示为 $A=\{a,b,c\}$;又如 B 是由全体自然数组成的集合,可表示为 $B=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.一般地,如果 p 是表示某集合 A 中的元素所具有的共同性质,而任何不是 A 的元素都不具有性质 p,则可表示为 $A=\{x|x$ 具有性质 $p\}$.例如若 A 表示全体男人这集合,可写成 $A=\{x|x$ 是男人$\}$;又若 A 表示全体实数这个集合,可写成 $A=\{x|x$ 是实数$\}$等等.如果 X 为给定的论域,A 是由 X 中所有使性质 p 成立的元素组成的集合,则称 A 为 X 的子集,并可写成 $A=\{x\in X|x$ 具有性质 $p\}$.

以集合为元素所组成的一个新的集合称为**集合系**或**集合族**.例如给定 X 为论域,由 X 的所有子集组成的一个集合系称为 X 的**幂集**,记作 $\mathscr{P}(X)=\{A|A$ 为 X 的子集$\}$.

设给定 X 为论域,$A,B\in\mathscr{P}(X)$.

(1) $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$,则称 A 为 B 的**子集**或 B **包含** A,记作 $A\subseteq B$或 $B\supseteq A$.如果进一步 $A\neq B$,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,且称 A 为 B 的**真子集**.

显然,$A=B$,当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

(2) A 与 B 的**并集**:$A\cup B\triangleq\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(3)　A 与 B 的**交集**：$A\cap B\triangleq\{x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(4)　A 的**补(或余)集**：$A'\triangleq\{x\mid x\in X$ 但 $x\overline{\in}A\}$.

命题 1.1　对于任何 $A、B、C\in\mathscr{P}(X)$ 下列性质成立.

(1)　幂等律：$A\cup A=A, A\cap A=A$.

(2)　交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(3)　结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

(4)　吸收律：$(A\cup B)\cap A=A,(A\cap B)\cup A=A$.

(5)　分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

(6)　X 与 $\varnothing$ 适合：$A\cup\varnothing=A, A\cap X=A$.

$$A\cup X=X, A\cap\varnothing=\varnothing.$$

(7)复原律(对合律)：$(A')'=A$,(特别有 $X'=\varnothing,\varnothing'=X$). (双重)

(8)对偶律(或称 *De Morgan* 律)：

$$(A\cup B)'=A'\cap B',(A\cap B)'=A'\cup B'.$$

(9)互补律：$A\cup A'=X, A\cap A'=\varnothing$.

集合的并、交运算可以推广到任意多个集合的情况.

$\bigcup\limits_{t\in T}A_t\triangleq\{x\mid x\in X,\exists\ t\in T$,使得 $x\in A_t\}$.

$\bigcap\limits_{t\in T}A_t\triangleq\{x\mid x\in X,\forall\ t\in T$,使得 $x\in A_t\}$.

容易证明：

$$A\cap(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}(A\cap A_t);$$

$$A\cup(\bigcap_{t\in T}A_t)=\bigcap_{t\in T}(A\cup A_t);$$

$$(\bigcup_{t\in T}A_t)'=\bigcap_{t\in T}A_t';$$

$$(\bigcap_{t\in T}A_t)'=\bigcup_{t\in T}A_t'.$$

设$\{A_n,n\geq 1\}$表示一集合序列. 若$\forall\ n\geq 1$,有 $A_n\subseteq A_{n+1}$(相应地,

$A_n \supseteq A_{n+1}$)，则称$\{A_n, n \geqslant 1\}$为单调增（相应地，单调减）的. 二者统称为单调序列. 进一步若令$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$（或相应地，$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$），则称$A$为$\{A_n, n \geqslant 1\}$的极限. 通常记作$A_n \nearrow A$（或相应地，$A_n \searrow A$）. 一般地，设$\{A_n, n \geqslant 1\}$为任给的集合序列，令

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} A_n \triangleq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \underline{\lim_{n \to \infty}} A_n \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

并分别称为$\{A_n, n \geqslant 1\}$的**上极限**和**下极限**. 显然$\underline{\lim}_{n \to \infty} A_n \subseteq \overline{\lim}_{n \to \infty} A_n$，若$\underline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \to \infty} A_n$，则称$\{A_n, n \geqslant 1\}$**收敛**，并用$\lim_{n \to \infty} A_n$表示$\{A_n, n \geqslant 1\}$的**极限**，即$\lim_{n \to \infty} A_n \triangleq \underline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \to \infty} A_n$.

另外，集合A与B的**差** A－B 与**对称差**$A \triangle B$分别定义为

$$A - B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \overline{\in} B\} = A \cap B'.$$

$$A \triangle B \triangleq (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

§2　关系与映射

设X与Y是两个非空集，$X \times Y$表示X与Y的笛卡尔积，即$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ 且 } y \in Y\}$. 如果$R \in \mathscr{P}(X \times Y)$，称$R$为$X$到$Y$的一个（二元）**关系**. 我们用记号$xRy$表示$(x, y) \in R$，读成“$x$与$y$有关系$R$”. 若令$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$，则称$R^{-1}$为$R$的**逆关系**（亦称为**转置关系**）. 若$X = Y$，称$R$为$X$上的一个关系.

设X, Y, Z为三个非空集，$R \in \mathscr{P}(X \times Y)$，$S \in \mathscr{P}(Y \times Z)$. 令

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists\ y \in Y \text{ 使得} (x, y) \in R \text{ 且} (y, z) \in S\},$$

则称$R \circ S (\in \mathscr{P}(X \times Z))$为$R$与$S$的**合成**.

设R为X上的一个关系. (1)如果$\forall\ x \in X$都有$(x, x) \in R$，称R为**自反**的. (2)如果$R^{-1} = R$，称R为**对称**的. (3)如果$R \circ R \subseteq R$，称R

为**传递**的.(4)如果 R 是自反、对称关系,称为**相似关系**.(5)如果相似关系 R 又是传递的,称为**等价关系**.

经常用记号"～"表示一个等价关系,利用这个记号,等价关系的性质写作:

(1)　自反性:$\forall\ x\in X\Rightarrow x\sim x$;

(2)　对称性:$x\sim y\Rightarrow y\sim x$;

(3)　传递性:$x\sim y, y\sim z\Rightarrow x\sim z$.

若 $x\in X$,令 $E=\{y\in X \mid y\sim x\}$.显然 $E\in\mathscr{P}(X)$,则称 E 为由 x 决定的**等价类**.等价类具有下面的性质.

命题 2.1　如果 E 与 E_* 是两个等价类,则 $E=E_*$ 或 $E\cap E_*=\varnothing$.

证明设 E 是由 x 决定的等价类,E_* 是由 x_* 决定的等价类.若 $E\cap E_*\neq\varnothing$,则 $\exists\ y\in X$ 使 $y\in E\cap E_*$.下面证明 $E=E_*$.

由等价类的定义知 $y\sim x, y\sim x_*$.由对称性得 $x\sim y, y\sim x_*$.再由传递性得 $x\sim x_*$.因此 $\forall\ w\in E$,有 $w\sim x, x\sim x_*$.再由传递性及 $w\sim x_*$ 即 $w\in E_*$,从而 $E\subseteq E_*$.同理可证 $E_*\subseteq E$.于是有 $E=E_*$.证毕.

称关系 $R\in\mathscr{P}(X\times Y)$是一个**指派法则**,是指 $\forall\ x\in X$,若令 $R_x=\{y\in Y \mid (x,y)\in R\}$,则或者 $R_x=\varnothing$ 或者存在唯一的($\exists\,|$)$y_0\in Y$ 使 $R_x=\{y_0\}$.这样,如果 $R\in\mathscr{P}(X\times Y)$满足:

$$(x,y_0)\in R \text{ 且 } (x,y_1)\in R\Rightarrow y_0=y_1,$$

则 R 成为一个指派法则.若令

$$A=\{x\in X \mid \text{存在 } y\in Y \text{ 使得 } (x,y)\in R\},$$

$$M=\{y\in Y \mid \text{存在 } x\in x \text{ 使得 } (x,y)\in R\},$$

且称 A 为 R 的定义域,M 为 R 的像集(或值域).如果给定了一个指派法则 R,其定义域 A 与像集 M 是完全确定的.

设 $R\in\mathscr{P}(X\times Y)$是一个指派法则,$B\supseteq M$.则 R 连同 B 称为一

个映射 f，R 的定义域 A 就称为映射 f 的定义域，R 的像集就称为映射 f 的像集(或值域)，集合 B 称为映射 f 的值空间.

若 f 是以 A 为定义域，B 为值空间的一个映射，我们记作 $f: A \to B$，读作"f 是从 A 到 B 的映射"或"f 是从 A 到 B 的函数"，或简单地说成"f 映 A 到 B". 有时又形象地把 f 看成是将 A 中的点移到 B 中去的一个(几何)变换. 又 $\forall a \in A$，$f(a)$ 表示在 f 下相应于 a 的 B 中的唯一元素，称为 f 在 a 点的值，或 a 在 f 下的像. 精确地说，如果 R 是 f 的(指派)法则，$f(a)$ 就是使 $(a, f(a)) \in R$ 的 B 中的唯一元素.

设 $f: A \to B$，A_0 为 A 的一个非空子集，f 在 A_0 上的限制是从 A_0 映到 B 的一个映射，其法则是 $R_0 = \{(a, f(a)) \mid a \in A_0\}$. 记作 $f \mid A_0$，读作"f 在 A_0 上的限制".

设 $f: A \to B$. $\forall A_0 \subseteq A$，定义

$$f(A_0) = \{b \in B \mid 存在\ a \in A_0, 使得\ b = f(a)\},$$

且称为 A_0 在 f 下的像集，简称为(当 f 已自明时)A_0 的**像**. 另一方面，$\forall B_0 \subseteq B$，定义

$$f^{-1}(B_0) = \{a \in A \mid f(a) \in B_0\},$$

且称为 B_0 在 f 下的**原像**(**或逆像**). 或简称为(当 f 已自明时)B_0 的原像(或 B_0 的逆像). 显然，当 $f(A) \cap B_0 = \Phi$ 时，$f^{-1}(B_0) = \Phi$；$f^{-1}(B) = A$.

如果 $f: A \to B$，$g: B \to C$，则 f 与 g 的复合映射是一个映射 $g \circ f: A \to C$，适合 $(g \circ f)(a) = g(f(a))$，$\forall a \in A$. 精确地说，$g \circ f$ 的法则是 $\{(a, c) \in A \times C \mid 存在\ b \in B\ 使得\ f(a) = b\ 且\ g(b) = c\}$. 注意，$g \circ f$ 仅仅在 f 的值空间等于 g 的定义域时才有意义.

设 $f: A \to B$. (1) 如果 $a_1, a_2 \in A$，且 $f(a_1) = f(a_2)$ 必有 $a_1 = a_2$(等价地，当 $a_1 \neq a_2$ 时必有 $f(a_1) \neq f(a_2)$)，则称 f 为单射(或一一的).

(2)若对于任何 $b\in B$,存在 $a\in A$,使得 $b=f(a)$,则称 f 为满射(或 f 映 A 到 B 上). (3)如果 f 既是单射又是满射,则称 f 为双射(或单满射,或称为 A 到 B 上的一一对应).

本书把映射与其对应(指派)法则常常一同记作

$$f:A\to B,\qquad a\mapsto f(a).$$

且把 $R=\{(a,f(a))\mid a\in A\}(\in\mathscr{P}(X\times Y))$ 称为 f 的**图像**.

命题 2.2 设 $f:A\to B$. 则下列论断成立.

(1) $A_1\subseteq A_2\subseteq A\Rightarrow f(A_1)\subseteq f(A_2)$.

(2) $B_1\subseteq B_2\subseteq B\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$.

(3) $f(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}f(A_t)$.

(4) $f(\bigcap_{t\in T}A_t)\subseteq\bigcap_{t\in T}f(A_t)$,且当 f 为单射时等式成立.

(5) $f^{-1}(\bigcup_{t\in T}B_t)=\bigcup_{t\in T}f^{-1}(B_t)$.

(6) $f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B_t)=\bigcap_{t\in T}f^{-1}(B_t)$.

(7) $f(A_0)\subseteq B_0\Leftrightarrow f^{-1}(B_0)\supseteq A_0$.

(8) $f^{-1}(B_0')=(f^{-1}(B_0))'$,

(其中 $B_0'=B-B_0$, $(f^{-1}(B_0))'=A-f^{-1}(B_0)$).

(9) $f^{-1}[f(A_0)]\supseteq A_0$,且当 f 为单射时等式成立.

(10) $f[f^{-1}(B_0)]\subseteq B_0$,且当 f 为满射时等式成立.

§3 格

设 L 是给定的一个非空集. 如果 $\leqslant$ 为 L 上的一个满足下列条件的关系:

(1) 自反性: $\forall\ a\in L\Rightarrow a\leqslant a$,

(2) 反对称性：$\alpha,\beta\in L,\alpha\leqslant\beta,\beta\leqslant\alpha\Rightarrow\alpha=\beta$，

(3) 传递性：$\alpha,\beta,\gamma\in L,\alpha\leqslant\beta,\beta\leqslant\gamma\Rightarrow\alpha\leqslant\gamma$，

则称$\leqslant$是 L 上的一个**偏序关系**(或**半序关系**)，$\langle L,\leqslant\rangle$是一个**偏序集**. 如果进一步还有

(4) 可比较性. $\forall\ \alpha,\beta,\alpha\leqslant\beta$ 与 $\beta\leqslant\alpha$ 必有一个成立.

则称$\langle L,\leqslant\rangle$是一个**全序集**(或**线性序集**).

容易验证$\langle\mathscr{P}(X),\subseteq\rangle$是偏序集但不是全序集.

设$\langle L,\leqslant\rangle$是一个偏序集，$A\subseteq L$. 如果$\forall\ \alpha\in A$ 均有 $\alpha\leqslant\gamma$(相应地，$\gamma\leqslant\alpha$)，则称 γ 为 A 的一个上界(相应地，下界). 如果 γ_0 是 A 的上界(相应地，下界)中最小者(相应地，最大者)，则称 γ_0 为 A 的上确界(相应地，下确界)，记作 $\gamma_0=\sup\{\alpha\mid\alpha\in A\}$(相应地，记作 $\gamma_0=\inf\{\alpha\mid\alpha\in A\}$).

如果$\langle L,\leqslant\rangle$为偏序集且$\forall\ \alpha,\beta\in L$，$\{\alpha,\beta\}$的上、下确界均存在，即 $\sup\{\alpha,\beta\}\in L,\inf\{\alpha,\beta\}\in L$，则称$\langle L,\leqslant\rangle$为一个**格**.

命题 3.1 如果$\langle L,\leqslant\rangle$是一个格，且$\forall\ \alpha,\beta\in L$ 规定

$$\alpha\vee\beta=\sup\{\alpha,\beta\},\qquad \alpha\wedge\beta=\inf\{\alpha,\beta\}.$$

则 L 上的二元运算$\vee$与$\wedge$满足下列性质. $\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in L$ 有

($L1$)幂等律：$\alpha\vee\alpha=\alpha,\alpha\wedge\alpha=\alpha$；

($L2$)交换律：$\alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha,\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha$；

($L3$)结合律：$(\alpha\vee\beta)\vee\gamma=\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$，

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)；$$

($L4$)吸收律：$(\alpha\vee\beta)\wedge\alpha=\alpha,(\alpha\wedge\beta)\vee\alpha=\alpha$.

证明 由上确界与下确界的定义立即得证.

命题 3.2 设 L 是一个非空集合，如果在 L 上定义了两种(二元)运算$\vee$与$\wedge$适合(上述的)性质($L1$)～($L4$). 而且在 L 上定义一个关系$\leqslant$如下：

$$\alpha\leqslant\beta\Leftrightarrow\alpha\vee\beta=\beta,$$

则$\langle L,\leqslant\rangle$是一个格.

证明 首先证$\langle L,\leqslant\rangle$是偏序集.

(1)由幂等律知$\forall\ \alpha\in L,\alpha\vee\alpha=\alpha\Rightarrow\alpha\leqslant\alpha$.

(2)$\alpha\leqslant\beta,\beta\leqslant\alpha\Rightarrow\alpha\vee\beta=\beta,\beta\vee\alpha=\alpha\Rightarrow\alpha=\beta$(由交换律).

(3)$\alpha\leqslant\beta,\beta\leqslant\gamma\Rightarrow\alpha\vee\beta=\beta,\beta\vee\gamma=\gamma$

$$\Rightarrow\alpha\vee\gamma=\alpha\vee(\beta\vee\gamma)=(\alpha\vee\beta)\vee\gamma=\beta\vee\gamma=\gamma$$

$$\Rightarrow\alpha\leqslant\gamma.$$

所以$\langle L,\leqslant\rangle$是偏序集.

再证:$\alpha\leqslant\beta\Leftrightarrow\alpha\wedge\beta=\alpha$.

事实上,一方面

$$\alpha\leqslant\beta\Rightarrow\alpha\vee\beta=\beta\Rightarrow\alpha\wedge\beta=\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)=\alpha$$

另一方面

$$\alpha\wedge\beta=\alpha\Rightarrow\alpha\vee\beta=(\alpha\wedge\beta)\vee\beta=\beta \text{ 即 } \alpha\leqslant\beta.$$

最后证:$\forall\ \gamma,\delta\in L,\gamma\vee\delta=\sup\{\gamma,\delta\},\gamma\wedge\delta=\inf\{\gamma,\delta\}$.

因为$\gamma\wedge(\gamma\wedge\delta)=(\gamma\wedge\gamma)\wedge\delta=\gamma\wedge\delta$,则$\gamma\wedge\delta\leqslant\gamma$. 同理$\gamma\wedge\delta\leqslant\delta$. 于是$\gamma\wedge\delta$为$\{\gamma,\delta\}$的一个下界. 又对于$\{\gamma,\delta\}$的任何一个下界$\lambda$,有$\lambda\wedge(\gamma\wedge\delta)=(\lambda\wedge\gamma)\wedge\delta=\lambda\wedge\delta=\lambda$,故$\lambda\leqslant\gamma\wedge\delta$. 即已证明$\gamma\wedge\delta=\inf\{\gamma,\delta\}$. 同理可证$\gamma\vee\delta=\sup\{\gamma,\delta\}$.

综合上述知$\langle L,\leqslant\rangle$是一个格. 证毕.

因此格也可以等价地定义为一个代数系统$\langle L,\vee,\wedge\rangle$其中$\vee,\wedge$适合上述的性质$(L1)\sim(L4)$. 于是以后我们有时用$\langle L,\leqslant\rangle$表示格,有时用$\langle L,\vee,\wedge\rangle$表示格,有时干脆就写成$\langle L,\leqslant,\vee,\wedge\rangle$.

定义 3.1 设$\langle L,\vee,\wedge\rangle$是一个格.

(1)如果$\vee,\wedge$还满足

(L5)分配律：$(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma=(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$,

$$(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma=(\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma),$$

称$\langle L,\vee,\wedge\rangle$为分配格.

(L6)如果 L 中存在两个元素 0 与 1 使得$\forall\ \alpha\in L$,

$$\alpha\vee 0=\alpha,\qquad \alpha\wedge 0=0,$$

$$\alpha\vee 1=1,\qquad \alpha\wedge 1=\alpha,$$

称$\langle L,\vee,\wedge\rangle$具有最小元 0 与最大元 1.

(2)设$\langle L,\vee,\wedge\rangle$是具有最大元 1 和最小元 0 的分配格. $':L\to L,\alpha\mapsto\alpha'$ 是满足下列条件的 L 上的一个对应(映射).

(L7)对合律(复原律)：$(\alpha')'=\alpha$.

(L8)对偶律(De Morgan 律)：$(\alpha\vee\beta)'=\alpha'\wedge\beta'$，$(\alpha\wedge\beta)'=\alpha'\vee\beta'$，称$\langle L,\vee,\wedge,'\rangle$为一个软代数(或 De Morgan 代数).

(3)设$\langle L,\vee,\wedge\rangle$是具有最大元 1 和最小元 0 的分配格. $':L\to L,\alpha\mapsto\alpha'$ 是 L 上的一个对应，满足(L7)与下列条件：

(L9)互补律：$\alpha\vee\alpha'=1,\alpha\wedge\alpha'=0$. 称$\langle L,\vee,\wedge,'\rangle$为一个布尔代数(Boole 代数).

例 3.1 令 $L_0=\{0,1\}$. 规定$\vee,\wedge,'$如下：

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

α	α'
0	1
1	0

容易验证$\langle\{0,1\},\vee,\wedge,'\rangle$是一个布尔代数.

例 3.2 令 $L_1=[0,1]$, $\forall\ \alpha,\beta\in[0,1]$,

$$\alpha\vee\beta=\sup\{\alpha,\beta\},\alpha\wedge\beta=\inf\{\alpha,\beta\},\alpha'=1-\alpha.$$

容易验证$\langle[0,1],\vee,\wedge,'\rangle$是一个软代数，但不是布尔代数. 这是因为(L9)不成立，例如$(0.2)'=0.8$，则 $0.2\wedge(0.2)'=0.2\wedge 0.8$

$=0.2\neq 0$.

命题 3.3　布尔代数一定是软代数.

证明　(1)首先证明 $\alpha\vee\beta=1,\alpha\wedge\beta=0\Rightarrow\beta=\alpha'$. 事实上,由(L5)、(L6)与(L9)得

$\beta=1\wedge\beta=(\alpha\vee\alpha')\wedge\beta=(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha'\wedge\beta)=0\vee(\alpha'\wedge\beta)=\alpha'\wedge\beta$;

$\alpha'=1\wedge\alpha'=(\alpha\vee\beta)\wedge\alpha'=(\alpha\wedge\alpha')\vee(\beta\wedge\alpha')=0\vee(\beta\wedge\alpha')=\beta\wedge\alpha'$. 再由(L2)知 $\beta=\alpha'$.

(2)再证明 *De Morgan* 律成立.

$$(\alpha\vee\beta)\vee(\alpha'\wedge\beta')=(\alpha\vee\beta\vee\alpha')\wedge(\alpha\vee\beta\vee\beta')$$
$$=(1\vee\beta)\wedge(\alpha\vee 1)=1\wedge 1=1;$$
$$(\alpha\vee\beta)\vee(\alpha'\wedge\beta')=(\alpha\wedge\alpha'\wedge\beta')\vee(\beta\wedge\alpha'\wedge\beta')$$
$$=(0\wedge\beta')\vee(0\wedge\alpha')=0\vee 0=0.$$

于是由(1)知 $\alpha'\wedge\beta'=(\alpha\vee\beta)'$. 再将此式中 α 换成 α', β 换成 β', 又由(L7)即得 $(\alpha')'\wedge(\beta')'=(\alpha'\vee\beta')'$, 则 $\alpha\wedge\beta=(\alpha'\vee\beta')'$, 从而知 $(\alpha\wedge\beta)'=((\alpha'\vee\beta')')'=\alpha'\vee\beta'$. 即已得所欲证.

(3)由软代数的定义知布尔代数是软代数.

命题 3.4　设 $\langle L,\vee,\wedge,'\rangle$ 是软代数. 则

(1) $\alpha,\beta\in L,\alpha\leqslant\beta\Rightarrow\beta'\leqslant\alpha'$. (即 $'$ 为 L 上的逆序映射(对应)).

(2) $0'=1,1'=0$.

证明　(1) $\alpha\leqslant\beta\Rightarrow\alpha\vee\beta=\beta\Rightarrow\beta'=\alpha'\wedge\beta'\Rightarrow\beta'\leqslant\alpha'$.

(2)因为 $1\wedge 0'=0'$ 与 $1\vee 0'=(1')'\vee 0'=(1'\wedge 0)'=0'$ 知 $0'=1$. 同理 $1'=0$. 证毕.

命题 3.5　设 $\langle L,\vee,\wedge,'\rangle$ 是分配格且具有最大元 1 与最小元 0. 如果映射 $':L\to L,\alpha\mapsto\alpha'$ 满足(L7)且是逆序映射,即

$\alpha,\beta\in L,\alpha\leqslant\beta\Rightarrow\beta'\leqslant\alpha'$. (称映射 $'$ 为 L 上的逆序对合对应). 则 $\langle L,\vee,\wedge,'\rangle$ 是软代数. 即(L8)成立.

证明 $\forall \gamma,\delta\in L$, $\gamma\leqslant\gamma\vee\delta$，且 $\delta\leqslant\gamma\vee\delta$，由此得 $(\gamma\vee\delta)'\leqslant\gamma'$ 且 $(\gamma\vee\delta)'\leqslant\delta'$，则 $(\gamma\vee\delta)'$ 为 $\{\gamma',\delta'\}$ 的下界，从而 $(\gamma\vee\delta)'\leqslant\gamma'\wedge\delta'$. 又 $\gamma'\wedge\delta'\leqslant\gamma'$ 且 $\gamma'\wedge\delta'\leqslant\delta'$，则 $\gamma\leqslant(\gamma'\wedge\delta')$，$\delta\leqslant(\gamma'\wedge\delta')'$，由此知 $(\gamma'\wedge\delta')'$ 是 $\{\gamma,\delta\}$ 的上界，从而 $\gamma\vee\delta\leqslant(\gamma'\wedge\delta')'$，于是 $\gamma'\wedge\delta'=((\gamma'\wedge\delta')')'\leqslant(\gamma\vee\delta)'$. 这就是证明了 $(\gamma\vee\delta)'=\gamma'\wedge\delta'$. 同理可证 $(\gamma\wedge\delta)'=\gamma'\vee\delta'$. 证毕.

定义 3.2 设 $\langle L,\vee,\wedge\rangle$ 是一个格.

(1)如果 $\forall\ \{\alpha_t,t\in T\}\subseteq L$ 都有 $\bigvee\limits_{t\in T}\alpha_t\in L$ 且 $\bigwedge\limits_{t}\alpha_t\in L$，则称 $\langle L,\vee,\wedge\rangle$ 为**完备格**.

(2)若 $\langle L,\vee,\wedge\rangle$ 是完备格且 $\forall\ \{\alpha_t,t\in T\}\subseteq L,\alpha\in L$ 有

$$(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)\wedge\alpha=\bigvee_{t\in T}(\alpha_t\wedge\alpha),$$

$$(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t)\vee\alpha=\bigwedge_{t\in T}(\alpha_t\vee\alpha),$$

则称 $\langle L,\vee,\wedge\rangle$ 为**无限分配格**.

(3)若 $\langle L,\vee,\wedge\rangle$ 是完备格且 $\forall\ \alpha_{ij}\in L,i\in I,j\in J_i$，有

$$\bigvee_{i\in I}(\bigwedge_{j\in J_i}\alpha_{ij})=\bigwedge_{f\in\prod\limits_{i\in I}J_i}(\bigvee_{i\in I}\alpha_{i,f(i)}),$$

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}\alpha_{ij})=\bigvee_{f\in\prod\limits_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}\alpha_{i,f(i)}),$$

则称 $\langle L,\vee,\wedge\rangle$ 为**完全分配格**.

(4)如果 $\langle L,\vee,\wedge\rangle$ 是完全分配格且映射 $'$: $L\rightarrow L$ 为 L 上的逆序对合对应，则称 $\langle L,\vee,\wedge,'\rangle$ 为**模糊格**，简称为 **F 格**.

命题 3.6 设 $\langle L,\vee,\wedge\rangle$ 是完备格. 则

(1) $0\in L,1\in L$.

(2) $\langle L,\vee,\wedge\rangle$ 是完全分配格⇒无限分配格⇒分配格.

证明 (1) $0=\wedge\{\alpha|\alpha\in L\}\in L,1=\vee\{\alpha|\alpha\in L\}\in L$.

(2)设 $I=\{1,2\}$，若 J_1 是只含一个元的附标集，即把 α_{1j} 写作

$\alpha; J_2=J$,即把 α_{2j}写作 α_j. 则由完全分配性知

$$(\bigvee_{j\in J}\alpha_j)\wedge\alpha=\alpha\wedge(\bigvee_{j\in J}\alpha_j)=\bigvee_{j\in J}(\alpha\wedge\alpha_j)=\bigvee_{j\in J}(\alpha_j\wedge\alpha).$$

同理 $(\bigwedge_{j\in J}\alpha_j)\vee\alpha=\bigwedge_{j\in J}(\alpha_j\vee\alpha)$.

又"无限分配性⇒分配性"显然成立. 证毕.

命题 3.7 如果$\langle L,\vee,\wedge,'\rangle$是 F 格,则它是软代数且具有更强的 De Morgan 律:

$$(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)'=\bigwedge_{t\in T}\alpha'_t,\quad(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t)'=\bigvee_{t\in T}\alpha'_t.$$

证明 由于 F 格必为完备分配格及命题 3.5 知$\langle L,\vee,\wedge,'\rangle$是软代数. 由于 $'$ 是 L 上的逆序对合对应,则$\forall\ t\in T,\alpha_t\leqslant\bigvee_{t\in T}\alpha_t$,从而$(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)'\leqslant\alpha'_t$,即$(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)'$是$\{\alpha'_t,t\in T\}$的一个下界,所以

$$(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)'\leqslant\bigwedge_{t\in T}\alpha'_t.$$

又$\forall\ t\in T,\bigwedge_{t\in T}\alpha'_t\leqslant\alpha'_t$,则 $\alpha_t=(\alpha'_t)'\leqslant(\bigwedge_{t\in T}\alpha'_t)'$,于是$\bigvee_{t\in T}\alpha_t\leqslant(\bigwedge_{t\in T}\alpha'_t)'$. 由此知

$$(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)'\geqslant\bigwedge_{t\in T}\alpha'_t.$$

所以 $(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)'=\bigwedge_{t\in T}\alpha'_t$. 同理可证$(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t)'=\bigvee_{t\in T}\alpha'_t$. 证毕.

定义 3.3 (1)设$\langle L,\leqslant\rangle$是偏序集,$\alpha,\beta\in L$,若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$,则记作 $\alpha<\beta$.

(2)如果$\langle L,\leqslant\rangle$是一个格且当 $\alpha<\beta$ 时,必存在 $\gamma\in L$ 使得 $\alpha<\gamma<\beta$,则称$\langle L,\leqslant\rangle$为**稠密的**.

命题 3.8 如果$\langle L,\leqslant\rangle$是完备稠密格,则$\forall\ \beta\in L$,有

$$\bigvee\{\alpha\mid\alpha\in L,\alpha<\beta\}=\beta,$$

$$\bigwedge\{\alpha\mid\alpha\in L,\beta<\alpha\}=\bigwedge\{\alpha\mid\alpha\in L,\alpha>\beta\}=\beta.$$

证明显然 β 是$\{\alpha\in L\mid\alpha<\beta\}$的一个上界,则

$$\bigvee\{\alpha\mid\alpha\in L,\alpha<\beta\}\leqslant\beta.$$

如果等号不成立,则存在 $\gamma\in L$ 使得

$$\bigvee\{\alpha|\alpha\in L,\alpha<\beta\}<\gamma<\beta.$$

于是一方面$\bigvee\{\alpha|\alpha\in L,\alpha<\beta\}<\gamma$；另一方面由$\gamma<\beta$知$\gamma$是$\{\alpha|\alpha\in L,\alpha<\beta\}$中的某一个元素，因此又有$\gamma\leqslant\bigvee\{\alpha|\alpha\in L,\alpha<\beta\}$，发生矛盾. 故必有$\bigvee\{\alpha|\alpha\in L,\alpha<\beta\}=\beta$. 同理可证$\bigwedge\{\alpha|\alpha L,\alpha<\beta\}=\beta$. 证毕.

注意：$\langle L,\leqslant\rangle$是稠密格未必就是完备格. 例如设$L=[0,1,]\cap Q$表示$[0,1]$中全体有理数，则$\langle L,\leqslant\rangle$是稠密格，但不是完备格. 又若$\langle L,\leqslant\rangle$是完备格，则也未必就是稠密格. 例如令$L_0=\{0,1\}$，则$\langle L_0,\leqslant\rangle$是完备格，但不稠密.

例 3.2 $\langle\mathscr{P}(X),\cup,\cap,'\rangle$是完备的布尔代数.

如果给定论域X，令

$$Z^X\triangleq\{0,1\}^X=\{\chi|\chi:X\to\{0,1\}\}$$

$$(\bigvee_{t\in T}\chi_t)(x)=\bigvee_{t\in T}\chi_t(x)\qquad\forall x\in X$$

$$(\bigwedge_{t\in T}\chi_t)(x)=\bigwedge_{t\in T}\chi_t(x)\qquad\forall x\in X$$

$$\chi'(x)=1-\chi(x)\qquad\forall x\in X$$

则我们立即得

命题 3.9 $\langle\mathscr{P}(X),\cup,\cap,'\rangle$与$\langle\{0,1\}^X,\vee,\wedge,'\rangle$是同构的完备布尔代数.

证明 令映射$T:\mathscr{P}(X)\to\{0,1\}^X,A|\to\chi_A$，其中

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\0 & x\in A'\end{cases}$$

不难证明T是双射，而且$\forall A\subseteq\mathscr{P}(X),t\in S,A\in\mathscr{P}(X)$有

$$T(\bigcup_{t\in S}A_t)=\bigvee_{t\in S}T(A_t),$$

$$T(\bigcap_{a\in S}A_t)=\bigwedge_{t\in S}T(A_t),$$

$$T(A')=(T(A))'$$

所以命题成立. 证毕.

如果 $A\in\mathscr{P}(X)$，称 χ_A 为集合 A 的特征函数.

命题 3.10　$\langle[0,1],\vee,\wedge\rangle$ 是完全分配格，进一步若令 $\alpha'=1-\alpha$，$\forall\ \alpha\in[0,1]$. 则 $\langle[0,1],\vee,\wedge,'\rangle$ 是 F 格.

证明　显然 $\langle[0,1],\leqslant,\vee,\wedge\rangle$ 是全序集且为稠密的完备格. 任给 $\{a_{ij},i\in I,j\in J_i\}\subseteq[0,1]$. 一方面，由于 $\forall\ f\in\prod\limits_{i\in I}J_i$ 知 $f(i)\in J_i$，$\forall\ i\in I$，　则得　$\forall\ i\in I,a_{i,f(i)}\leqslant\bigvee\limits_{j\in J_i}a_{ij}$，于是 $\forall\ f\in\prod\limits_{i\in I}J_i$，有

$$\bigwedge_{i\in I}a_{i,f(i)}\leqslant\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij}).$$

从而

$$\bigvee_{f\in\prod\limits_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}a_{i,f(i)})\leqslant\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{i\in J_i}a_{ij}).$$

另一方面，对于任何 $\alpha\in L$，由 $\langle[0,1],\leqslant\rangle$ 是全序集以及稠密性知

$$\alpha<\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij})\Rightarrow\forall\ i\in I,\alpha<\bigvee_{j\in J_i}a_{ij}$$

$$\Rightarrow\forall\ i\in I,\exists\ j(i)\in J_i,\text{使得 }\alpha<a_{i,j(i)}.$$

若取 $f_0\in\prod\limits_{i\in I}J_i$ 使得，$\forall\ i\in I,f_0(i)=j(i)$，从而 $\alpha<a_{i,f_0(i)}$. 于是

$$\alpha\leqslant\bigwedge_{i\in I}a_{i,f_0(i)}\leqslant\bigvee_{f\in\prod\limits_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}a_{i,f(i)}).$$

再由[0,1]的完备性、稠密性及命题 3.8 得

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij})=\bigvee\{\alpha\,|\,\alpha<\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij})\}\leqslant\bigvee_{f\in\prod\limits_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}a_{i,f(i)}).$$

综合上述即得

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij})=\bigvee_{f\in\prod\limits_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}a_{i,f(i)}).$$

同理可证

$$\bigvee_{i\in I}(\bigwedge_{j\in J_i}a_{ij})=\bigwedge_{f\in\prod\limits_{i\in I}J_i}(\bigvee_{i\in I}a_{i,f(i)}).$$

所以$\langle[0,1],\vee,\wedge\rangle$为完全分配格. 再由映射 $'$:$[0,1]\to[0,1]$,是逆序对合对应. 故$\langle L,\vee,\wedge,'\rangle$为 F 格. 证毕.

定义 3.4 设$\{L_t,t\in T\}$是一族偏序集,记

$$L=\{f:T\to\bigcup_{t\in T}L_t\mid\forall\ t\in T,f(t)\in L_t\}$$

称 L 为$\{L_t,t\in T\}$的直积,记作 $L=\prod_{t\in T}L_t$. 若在 L 中规定:$\forall\ f,g\in L$, $f\leqslant g$ 当且仅当$\forall\ t\in T,f(t)\leqslant g(t)$. 则$\langle L,\leqslant\rangle$为偏序集,仍记作 $L=\prod_{t\in T}L_t$.

命题 3.11 如果$\{L_t,t\in T\}$是一族完备格,则 $L=\prod_{t\in T}L_t$ 也是完备格.

证明 $\forall\ t\in T$,令 $\theta(t)=0,I(t)=1$,则 θ 与 I 分别为 L 的最小元与最大元. $\forall\ A\subseteq L$,若 $A=\Phi$,则 $\sup A=\sup\Phi=\theta$;若 $A\neq\Phi$,则$\forall\ t\in T$ 有 $A_t=\{f(t)\mid f\in A\}\neq\Phi$. 由 L_t 是完备格知,$\sup\{\alpha\mid\alpha\in A_t\}\triangleq g(t)\in L_t$,如此 $g\in L$. 容易验证 g 就是 A 在 L 中的上确界. 同理可证 A 在 L 中的下确界也存在. 所以 L 是完备格. 证毕.

命题 3.12 如果$\{L_t,t\in T\}$是一族完全分配格,则 $L=\prod_{t\in T}L_t$ 也是完全分配格.

证明 $\forall\ \{g_{ij},i\in I,j\in J_i\}\subseteq L$,由于$\forall\ t\in T,L_t$ 为完全分配格,则

$$\bigvee_{i\in I}(\bigwedge_{j\in J_i}g_{ij}(t))=\bigwedge_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigvee_{i\in I}g_{i,f(i)}(t)).$$

再由

$$(\bigvee_{i\in I}(\bigwedge_{j\in J_i}g_{ij}))(t)=\bigvee_{i\in I}(\bigwedge_{j\in J_i}g_{ij}(t)),(\bigwedge_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigvee_{i\in I}g_{ij}))(t)=\bigwedge_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigvee_{i\in I}g_{ij}(t))$$

知

$$\bigvee_{i\in I}(\bigwedge_{j\in J_i}g_{ij})=\bigwedge_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigvee_{i\in I}g_{i,f(i)}).$$

同理可证

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} g_{ij})=\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I} g_{i,f(i)}).$$

所以 L 为完全分配格. 证毕.

命题 3.13　设 X 是给定的非空集, L 为完全分配格. 若令

$$L^X=\{f:X\to L\},$$

则 L^X 是完全分配格.

证明　利用命题 3.12 的记号和结果, 令 $T=X$, $\forall\ t\in T$, $L_t=L$, 则 $L^X=\prod_{t\in T}L_t$. 由此知 L^X 是完全分配格. 证毕.

命题 3.14　设 X 是给定的非空集, 则 $[0,1]^X$ 是完全分配格.

证明　由命题 3.10 知, $[0,1]$是完全分配格. 再由命题 3.13 得证 $[0,1]^X$ 是完全分配格. 证毕.

§4　集合族

定义 4.1　设 X 为论域, $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$满足下列条件

(1) $\forall\ A,B\in\mathscr{A}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{A}$.

则称 $\mathscr{A}$ 为 **π 族**(或 **π 系**).

(2) $\forall\ A,B\in\mathscr{A}\Rightarrow A\cup B\in\mathscr{A}$; 且 $\forall\ A\in\mathscr{A}\Rightarrow A'\in\mathscr{A}$. 则称 $\mathscr{A}$ 为**代数**.

(3) $\mathscr{A}$ 为代数且 $\forall\ \{A_n,n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{A}$, $A_n\subseteq A_{n+1}$, $\forall\ n\geqslant 1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{A}$. 则称 $\mathscr{A}$ 为 **σ 代数**.

显然 π 族对于有限交封闭. 代数对于有限并和有限交与补封闭且含空集 $\varnothing$ 与全集 X. σ 代数对于可数并和可数交与补封闭且包含空集 $\varnothing$ 与全集 X.

定义 4.2 如果 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$ 满足下列条件:

(1) $X\in\mathscr{A}$;

(2) $A,B\in\mathscr{A}$ 且 $A\subseteq B\Rightarrow B-A\in\mathscr{A}$;

(3) $A_n\in\mathscr{A},n\geqslant 1$, 且 $A_n\subseteq A_{n+1},\forall\ n\geqslant 1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{A}$.

则称 $\mathscr{A}$ 为 λ **族**(或 λ **系**).

命题 4.1 $\mathscr{A}$ 是代数的充要条件是:

(1) $\mathscr{A}$ 为 π 系, 且 $X\in\mathscr{A}$;

(2) $\forall\ A,B\in\mathscr{A}$ 且 $A\subseteq B\Rightarrow B-A\in\mathscr{A}$;

(3) $\forall\ A,B\in\mathscr{A}$ 且 $A\cap B=\Phi\Rightarrow A\cup B\in\mathscr{A}$.

证明 必要性. 若 $\mathscr{A}$ 为代数, 显然 (1) $\mathscr{A}$ 为 π 系, $X\in\mathscr{A}$; (2) $B-A=B\cap A'\in\mathscr{A}$; (3) 显然 $A\cup B\in\mathscr{A}$.

充分性. 若定理中条件(1)—(3)成立. 则 $\forall\ A\in\mathscr{A},A'=(X-A)\in\mathscr{A}$. $\forall\ A,B\in\mathscr{A},A\cup B=A\cup(B-(A\cap B))\in\mathscr{A}$, 所以 $\mathscr{A}$ 为代数. 证毕.

命题 4.2 设 $\{\mathscr{A}_t,t\in T\}$ 为一族 σ 代数. 则 $\bigcap\limits_{t\in T}\mathscr{A}_t=\{A\mid\forall\ t\in T,A\in\mathscr{A}_t\}$ 仍是 σ 代数.

证明 $\forall\ A\in\bigcap\limits_{t\in T}\mathscr{A}t\Rightarrow\forall\ t\in T,A\in\mathscr{A}t$ 从而 $A'\in\mathscr{A}_t\Rightarrow A'\in\bigcap\limits_{t\in T}A_t$.

$\forall\ A,B\in\bigcap\limits_{t\in T}\mathscr{A}_t\Rightarrow\forall\ t\in T,A,B\in\mathscr{A}_t$ 从而 $A\cup B\in\mathscr{A}_t\Rightarrow A\cap B\in\bigcap\limits_{t\in T}A_t$

$\forall\ \{A_n,n\geqslant 1\},A_n\nearrow A,A_n\in\bigcap\limits_{t\in T}\mathscr{A}_t\Rightarrow\forall\ t\in T,A_n\in\mathscr{A}_t,n\geqslant 1$, 从而 $A\in\mathscr{A}_t\Rightarrow A\in\bigcap\limits_{t\in T}\mathscr{A}_t$.

所以 $\bigcap\limits_{t\in T}\mathscr{A}_t$ 是 σ 代数.

如果 $\mathscr{A}$ 对于单调集列的极限运算封闭, 则称 $\mathscr{A}$ 为**单调系**. 同命题 4.2 证明方法相类似, 可以证明:

命题 4.3(1) 如果$\{\mathscr{A}_t, t\in T\}$为一族单调系，则$\bigcap\limits_{t\in T}\mathscr{A}_t$为单调系.

(2)如果$\{\mathscr{A}_t, t\in T\}$为一族$\pi$系，则$\bigcap\limits_{t\in T}\mathscr{A}_t$为$\pi$系.

(3)如果$\{\mathscr{A}_t, t\in T\}$为一族$\lambda$系，则$\bigcap\limits_{t\in T}\mathscr{A}_t$为$\lambda$系.

如果$\mathscr{E}\subseteq\mathscr{P}(X)$，令

$$\sigma(\mathscr{E})=\bigcap\{\mathscr{A}\mid\mathscr{E}\subseteq\mathscr{A}\text{ 且 }\mathscr{A}\text{ 是 }\sigma\text{ 代数}\},$$

$$M(\mathscr{E})=\bigcap[\mathscr{A}\mid\mathscr{E}\subseteq\mathscr{A}\text{ 且 }\mathscr{A}\text{ 是单调系}\},$$

$$\lambda(\mathscr{E})=\bigcap\{\mathscr{A}\mid\mathscr{E}\leqslant\mathscr{A}\text{ 且 }\mathscr{A}\text{ 是 }\lambda\text{ 系}\}.$$

分别称$\sigma(\mathscr{E})$，$M(\mathscr{E})$与$\lambda(\mathscr{E})$为包含$\mathscr{E}$的最小σ代数，最小单调系与最小λ系.

命题 4.4 设$\mathscr{E}$为一集族.

(1)若$\mathscr{E}$为代数，则$M(\mathscr{E})=\sigma(\mathscr{E})$，

(2)若$\mathscr{E}$为π系，则$\lambda(\mathscr{E})=\sigma(\mathscr{E})$，

证明 (1) 令

$$\mathscr{A}_1=\{A\in M(\mathscr{E})\mid A'\in M(\mathscr{E});A\cap B\in M(\mathscr{E}),\forall\ B\in\mathscr{E}\}.$$

则$\mathscr{E}\subseteq\mathscr{A}_1$，且$\mathscr{A}_1$为单调系，故$M(\mathscr{E})\subseteq\mathscr{A}_1$. 显然$\mathscr{A}_1\subseteq M(\mathscr{E})$，所以$\mathscr{A}_1=M(\mathscr{E})$. 令

$$\mathscr{A}_2=\{A\in M(\mathscr{E})\mid A\cap B\in M(\mathscr{E}),\forall\ B\in M(\mathscr{E})\}.$$

由$\mathscr{A}_1=M(\mathscr{E})$知，$\mathscr{E}\subseteq\mathscr{A}_2$. 但$\mathscr{A}_2$为单调系. 从而$\mathscr{A}_2=(\mathscr{E})$.

综上所述，我们有

$$\forall\ A\in M(\mathscr{E})\Rightarrow A'\in M(\mathscr{E});\forall\ A,B\in M(\mathscr{E})\Rightarrow A\cup B\in M(\mathscr{E}).$$

即$M(\mathscr{E})$是代数. 再由$M(\mathscr{E})$为单调系知，$M(\mathscr{E})$为σ代数. 因此，有$\sigma(\mathscr{E})\subseteq M(\mathscr{E})$. 显然有$M(\mathscr{E})\leqslant\sigma(\mathscr{E})$. 所以$M(\mathscr{E})=\sigma(\mathscr{E})$.

(2) 类似于(1)的证明，请读者自证. 证毕.

作为上述命题的一个简单推论，我们有

命题 4.5 设 $\mathscr{E}$，$\mathscr{A}$ 为两个集族且 $\mathscr{E}\subseteq\mathscr{A}$.

(1)若 $\mathscr{E}$ 为代数且 $\mathscr{A}$ 为单调族，则 $\sigma(\mathscr{E})\subseteq\mathscr{A}$.

(2)若 $\mathscr{E}$ 为 π 系且 $\mathscr{A}$ 为 λ 系，则 $\sigma(\mathscr{E})\subseteq\mathscr{A}$.

第一章　模糊集合

本章介绍模糊集合论的基本概念，它是学习和研究模糊数学的基础，内容包括模糊子集，模糊集的运算，分解定理，表现定理，以及更一般的 L－模糊集等，最后介绍特殊的模糊集——模糊点与模糊集的公理化定义．

§1　F 集的概念

众所周知，在通常集合论中，当 X 是给定的非空集合时，X 的子集 A 可以由它的特征函数 $\chi_A: : X\to\{0,1\}$ 来刻划，即$\forall\ x\in X$，

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, \text{当 } x\in A,\\ 0, \text{当 } x\overline{\in} A.\end{cases}$$

特征函数 χ_A 给出了元素 x 与子集 A，对其元素要求适合的条件相符合的程度，$\chi_A(x)=1$，即 x 完全适合的情形；否则 $\chi_A(x)=0$，即 x 不适合的情形，因此子集 A 具有清晰而明确的界限，它描述的是"非此即彼"的确切概念．

然而，客观世界中许多概念并没有明确的外延，常常具有一定的模糊性．我们从下面两个简单例子来说明如何用模糊子集来描

述这类概念.

例 1.1 设 X 表示全体人组成的集合,则男人的集合,女人集合分别是 X 的通常子集;然而如用 H 表示"高个子的集合",Y 表示"年青人的集合",O 表示"老年人的集合",则 H,Y,O 不再是 X 的通常子集了.因为一个人究竟是不是"高个子","年青人"或"老年人"没有分明的界限,即这些概念没有明确的外延,它们描述的是具有某种模糊性的事物,是 X 的模糊子集.此时,某人 x 与 H,Y,O 的关系不是单纯的"属于"或"不属于"的关系,而往往说在多大程度上属于,这种称作隶属度的从属程度不能只用 0 或 1 来表示,而可以取自闭区间[0,1]中的任何实数值.可见,X 的模糊子集 H,Y,O 可分别用 X 到[0,1]的适当的映射来刻划.

例 1.2 设 X 是全体实数的集合,则"所有大于 1 的实数"是 X 的子集,即

$$A=\{x\in X\,|\,1<x<\infty\}.$$

换言之,只要实数 x 比 1 大,则 $\chi_A(x)=1$,也称 x 对 A 的从属程度为 1;而当实数 x 小于或等于 1,则 $\chi_A(x)=0$,也称 x 对 A 的从属程度为零.这表明子集 A 有明确的界限,它描述的是一个分明的概念.

现在设 B 表示"比 1 大得多的实数的集合",则 B 就不再是 X 的通常子集了.因为与例 1.1 一样,无法对 B 给出一个明确的界限,而只能说某实数对 B 的从属程度大一些,另一实数对 B 的从属程度小一些.

我们用闭区间[0,1]中的实数值来表示这种隶属度的大小.例如 10^4 对 B 的隶属度为 1,10 对 B 的隶属度为 0.5,5 对 B 的隶属度为 0.2,等等.一般地,$\forall\ x\in X$,$\mu_B(x)\in[0,1]$表示 x 对 B 的隶属度.此时,用 X 到[0,1]的映射 μ_B 刻画的"集合"B 就是 x 的模糊子

集.

定义 1.1 设 X 为给定的非空集合(通常称为论域),X 的**模糊子集** A 是指 X 到[0,1]的一个映射 $\mu_A: X \to [0,1]$所确定的序对集

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

其中映射 μ_A 称为 A 的**隶属函数**,$\forall x \in X$,$\mu_A(x)$称为 x 对于 A 的**隶属度**.

模糊子集 A 完全由其隶属函数所确定,因而以下我们总把二者不加区别,而直接把模糊子集 A 定义为一个映射 $A: X \to [0,1]$,$\forall x \in X$,$A(x)$表示 x 对于 A 的隶属度.

当论域 X 自明时,X 的模糊子集简称**模糊集**,且为行文方便,以后"模糊"(*Fuzzy*)一词常简记为"F",如 X 的模糊子集简称 F **集**,并以 $\mathscr{F}(X)=[0,1]^X$ 表示 X 的 F 集的全体,即 $\mathscr{F}(X)=\{A \mid A: X \to [0,1]\}$.

显然,当 F 集 A 的隶属函数 μ_A 只取 0,1 两个值时,A 便蜕化为 X 的通常子集,μ_A 即为 A 的特征函数 χ_A,换言之,X 的通常子集可看作 X 的一类特殊 F 集.即若用 $\mathscr{P}(X)=2^X$ 表示 X 的幂集,则

$$\mathscr{P}(X) \subseteq \mathscr{F}(X).$$

例 1.3 设以年龄的集合为论域,并取 $X=[0,100]$. *Zadeh* 曾给出"年轻"Y 与"年老"O 这两个 F 集的隶属函数分别为

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 25, \\ \left[1 + \left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & \text{当 } 25 < x \leqslant 100, \end{cases}$$

$$O(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 50, \\ \left[1 + \left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & \text{当 } 50 < x \leqslant 100, \end{cases}$$

其函数图形如图 1.1(a),(b)所示.

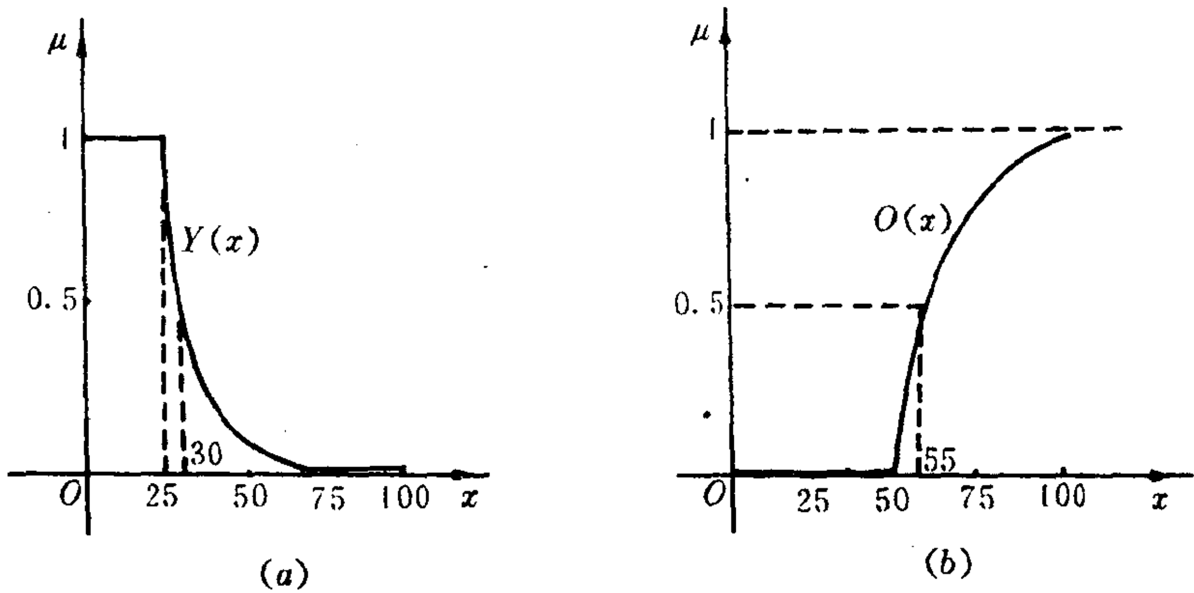


图 1.1

于是 $Y(30)=0.5$, $Y(40)=0.1$, $Y(45)\doteq 0.06$ 等;

$O(55)=0.5$, $O(60)=0.8$, $O(70)\doteq 0.94$ 等.

例 1.4 设论域 $X=R$ 为全体实数的集合,则"比 1 大得多的实数的集合"是 R 的 F 集 B,它的隶属函数可以定义为

$$B(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant 1,\\ [1+100(x-1)^{-2}]^{-1}, & \text{当 } x>1,\end{cases}$$

其函数图形如图 1.2 所示.

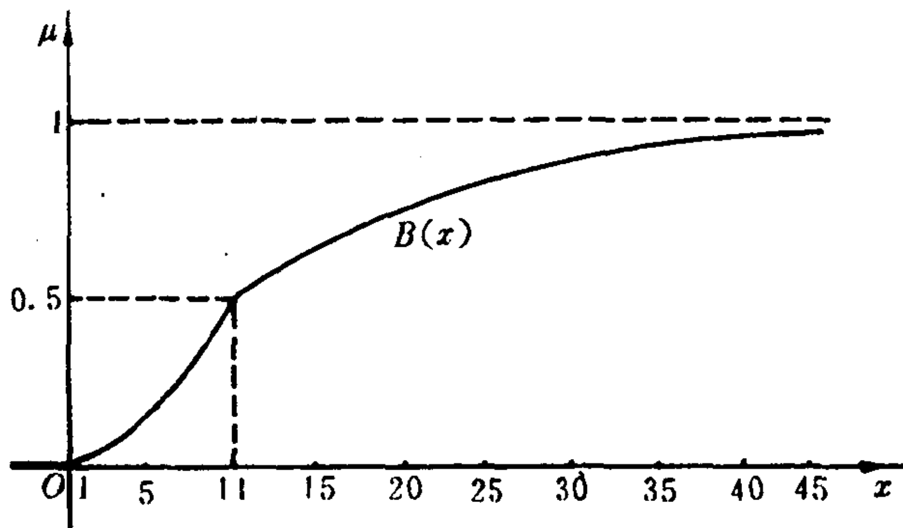


图 1.2

于是　$B(11)=0.5, B(21)=0.8, B(31)=0.9$　等.

关于 F 集的表示方法，通常有如下几种形式.

1.　设论域是有限集 $X=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$，则按定义 1.1，X 的 F 集 $A=\{(x_1,\mu_A(x_1)),(x_2,\mu_A(x_2)),\cdots,(x_n,\mu_A(x_n))\}$，此种表示法称为 F 集的**序对表示法**.

当论域 X 的元素已排列成一定顺序，则在 F 集的序对表示法中可省略元素的符号，记为

$$A=\{\mu_A(x_1),\mu_A(x_2),\cdots,\mu_A(x_n)\},$$

称为 F 集的**向量表示法**.

例 1.5　设由五人组成的集合

$$X=\{a,b,c,d,e\},$$

X 中"高个子"的集合 A，"胖子"的集合 B 都是 F 集，其隶属函数分别为

$$\begin{cases} A(a) = 0.8, \\ A(b) = 0, \\ A(c) = 0.3, \\ A(d) = 1, \\ A(e) = 0.5, \end{cases} \qquad \begin{cases} B(a) = 0.5, \\ B(b) = 0.7, \\ B(c) = 0.4, \\ B(d) = 0.1, \\ B(e) = 0.9. \end{cases}$$

则 $A=\{(a,0.8),(b,0),(c,0.3),(d,1),(e,0.5)\}$,

或 $A=(0.8,0,0.3,1,0.5)$;

$B=\{(a,0.5),(b,0.7),(c,0.4),(c,0.4),(d,0.1),(e,0.9)\}$,

或 $B=(0.5,0.7,0.4,0.1,0.9)$.

2. 设论域是有限集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,按 Zadeh 的表示法,X 的 F 集 A 可以记为

$$A = A(x_1)/x_1 + A(x_2)/x_2 + \cdots + A(x_n)/x_n,$$

或 $$A = \sum_{i=1}^{n} A(x_i)/x_i.$$

注意,这里记号"+","$\sum$"都不是普通求和的意义,记号 $A(x_i)/x_i$ 等也不是分数的意义,它们只是被用来说明 X 中的元素 x_i 对 A 的从属度为 $A(x_i)$.

如例 1.5 中,

$A=0.8/a+0/b+0.3/c+1/d+0.5/e$

$B=0.5/a+0.7/b+0.4/c+0.1/d+0.9/e.$

注意,在 Zadeh 表示法和序对表示法中,如果某元素 $x\in X$, $A(x)=0$,则相应的项或序对可以不列入,但在向量表示法中,x 的从属度 0 必须在相应位置写出,比如

$A=\{(a,0.8),(c,0.3),(d,1),(e,0.5)\}$

$=(0.8,0,0.3,1,0.5)$

$=0.8/a+0.3/c+1/d+0.5/e.$

3. 当论域 X 为一般情形(尤其 X 是无限集时)，按照 Zadeh 的表示法，X 的 F 集 A 可记为

$$A=\int_X A(x)/x.$$

与前述类似，记号"$\int$"不是普通的积分运算符号，而是用来表示 x 与其对 F 集 A 的从属度 $A(x)$ 两者对应关系的总括记号.

如例 1.3 中，

$$Y=\int_{0\leqslant x\leqslant 25} 1/x+\int_{25<x\leqslant 100}\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}/x,$$

$$O=\int_{50<x\leqslant 100}\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}/x.$$

4. 当论域 X 是实数集 R 或 R 的某区间时，常用具体的解析式表示 F 集的隶属函数，从而确定 F 集. 如例 1.3 和例 1.4 的情形.

§2　F 集的运算

F 集由其隶属函数确定，F 集的运算自然可点式地由 F 集的隶属函数作相应的运算来定义. 本节首先讨论 F 集的格运算(交，并，补)及其性质，然后介绍更一般的运算.

定义 2.1　设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$.

(1)如果 $\forall\ x\in X, A(x)\leqslant B(x)$，则称 B **包含** A，记作 $A\leqslant B$ 或 $B\geqslant A$(也可记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$).

(2)如果 $\forall\ x\in X, A(x)=B(x)$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$. 此

时 A,B 是同一个 F 集.

易见，$A=B$ 当且仅当 $A\leqslant B$ 且 $B\leqslant A$.

"$\leqslant$"是 $\mathscr{F}(X)$ 上的偏序，$\langle\mathscr{F}(X),\leqslant\rangle$ 有最小元 Φ，最大元 X：$\forall\, x\in X,\Phi(x)=0,X(x)=1$.

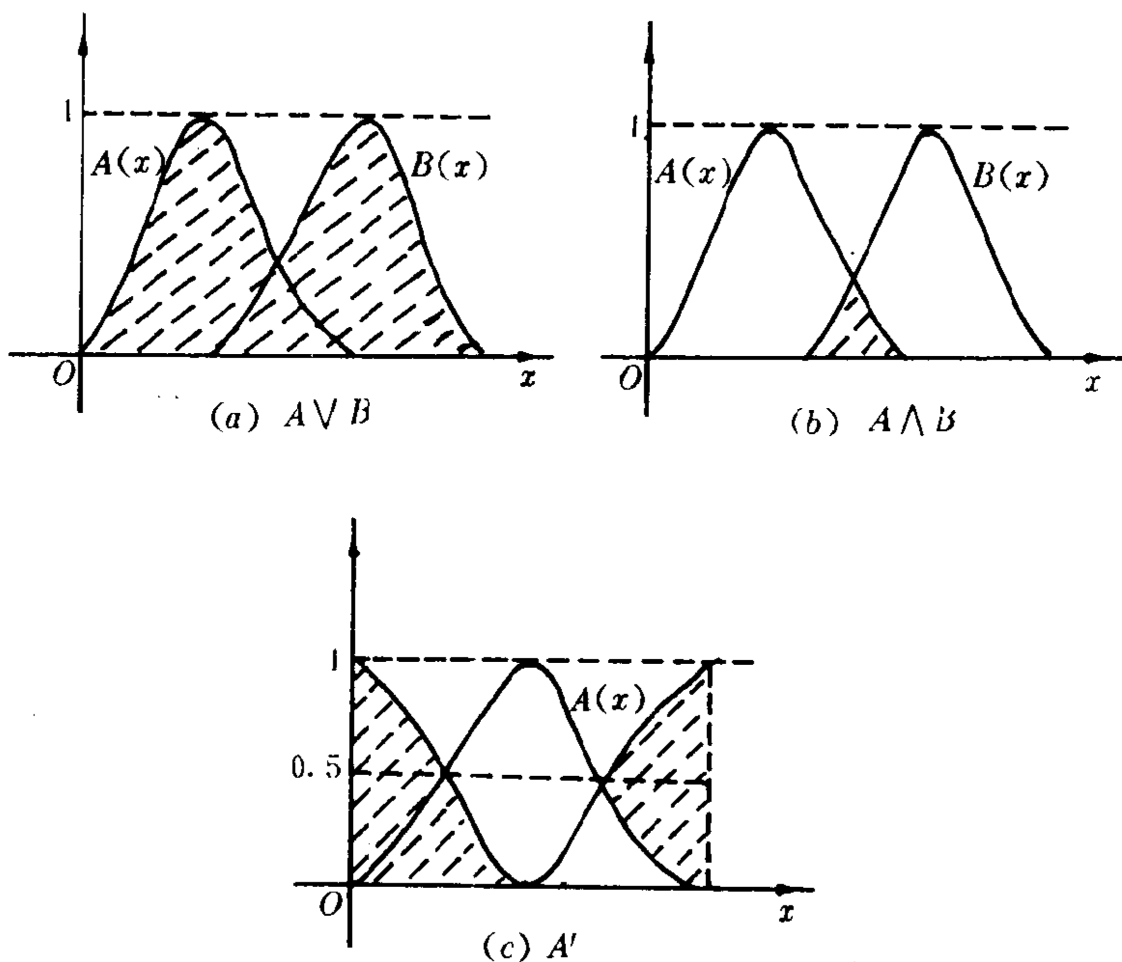
定义 2.2 设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，命 $A\vee B,A\wedge B,A'\in\mathscr{F}(X)$ 如下：$\forall\, x\in X$,

$$(A\vee B)(x)=A(x)\vee B(x)(=\max\{A(x),B(x)\}),$$

$$(A\wedge B)(x)=A(x)\wedge B(x)(=\min\{A(x),B(x)\}),$$

$$A'(x)=[X(x)]'(=1-A(x)).$$

此时，分别称 $A\vee B,A\wedge B$ 为 F 集 A 与 B 的**并集**，**交集**，A' 称为 A 的**补集**.（参见图 1.3(a),(b),(c)）



(a) $A\vee B$　(b) $A\wedge B$

(c) A'

图 1.3

显然,当 A,B 是 X 的分明子集时,定义 2.2 分别给出分明子集 $A\cup B, A\cap B, A'$ 的特征函数.

例 2.1　设 X 及 X 的 F 集 A,B 如例 1.5,则 X 中"高个子或胖子"的集合

$$\begin{aligned}A\vee B &= 0.8\vee 0.5/a+0\vee 0.7/b+0.3\vee 0.4/c+1\vee \\ &\quad 0.1/d+0.5\vee 0.9/e \\ &= 0.8/a+0.7/b+0.4/c+1/d+0.9/e;\end{aligned}$$

"又高又胖的人"的集合

$$A\wedge B=0.8\wedge 0.5/a+0\wedge 0.7/b+0.3\wedge 0.4/c+1\wedge$$

$$0.1/d+0.5\wedge 0.9/e$$

$$=0.5/a+0/b+0.3/c+0.1/d+0.5/e;$$

"不高的人"的集合

$$A' = 0.2/a + 1/b + 0.7/c + 0/d + 0.5/e.$$

例 2.2　设 X 及 X 的 F 集 Y,O 如例 1.3,则"年轻或年老的人"的集合

$$\begin{aligned}Y\vee O &= \int_{0\leqslant x\leqslant 25} 1/x + \int_{25<x\leqslant a}\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}\Big/x \\ &\quad + \int_{a<x\leqslant 100}\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}\Big/x,\end{aligned}$$

其中 $a\doteq 51$;

"不年轻的人"的集合

$$Y' = \int_{25<x\leqslant 100} 1-\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}\Big/x$$

易见,X 的两个 F 集的并,交运算可以推广到任意多个的情形.

定义 2.3　设　$A_t\in\mathscr{F}(X), t\in T$(指标集),$\forall\ x\in X$,命

$$(\bigvee_{t\in T} A_t)(x) = \bigvee_{t\in T} A_t(x)(=\sup_{t\in T} A_t(x)),$$

$$(\bigwedge_{t\in T} A_t)(x) = \bigwedge_{t\in T} A_t(x)(= \inf_{t\in T} A_t(x)).$$

则 $\bigvee_{t\in T} A_t, \bigwedge_{t\in T} A_t \in \mathscr{F}(X)$,分别称为 X 的 F 集族 $\{A_t | t\in T\}$ 的并集,交集.

定理 2.1 设 $A,B,C\in \mathscr{F}(X)$,则

(1) $A\vee A=A, A\wedge A=A$; (幂等律)

(2) $A\vee B=B\vee A, A\wedge B=B\wedge A$; (交换律)

(3) $(A\vee B)\vee C=A\vee (B\vee C)$,

$(A\wedge B)\wedge C=A\wedge (B\wedge C)$; (结合律)

(4) $(A\vee B)\wedge A=A$,

$(A\wedge B)\vee A=A$; (吸收律)

(5) $A\wedge (B\vee C)=(A\wedge B)\vee (A\wedge C)$,

$A\vee (B\wedge C)=(A\vee B)\wedge (A\vee C)$; (分配律)

(6) X,Φ 适合:

$A\vee X=X, A\wedge X=A$,

$A\vee \Phi=A, A\wedge \Phi=\Phi$; (0 - 1 律)

(7) $(A')'=A$; (对合律)

(8) $(A\vee B)'=A'\wedge B', (A\wedge B)'=A'\vee B'$. (*De Morgan* 律)

进而,若 $B_t\in F(X), t\in T$(指标集),则(5),(8)可推广成如下形式:

(5)′ $A\wedge (\bigvee_{t\in T} B_t)=\bigvee_{t\in T} (A\wedge B_t)$,

$A\vee (\bigwedge_{t\in T} B_t)=\bigwedge_{t\in T} (A\vee B_t)$;

(8)′ $(\bigvee_{t\in T} B_t)'=\bigwedge_{t\in T} B_t'$, $(\bigwedge_{t\in T} B_t)'=\bigvee_{t\in T} B_t'$.

证明 依定义 2.2,2.3 及格 $\langle[0,1],\vee,\wedge,'\rangle$ 的性质,易直接验证. 以 *De Morgan* 律为例,$\forall x\in X$,

$$(A\vee B)'(x)=1-(A(x)\vee B(x))=1-\max\{A(x),B(x)\}$$
$$=\min\{1-A(x),1-B(x)\}=A'(x)\wedge B'(x)$$
$$=(A'\wedge B')(x).$$

同理，$(A\wedge B)'=A'\vee B'$. 证毕.

注 1° 由本定理知，$\langle\mathscr{F}(X),\vee,\wedge\rangle$是具有无限分配律的完备格，$\langle\mathscr{F}(x),\vee,\wedge,'\rangle$构成一个软代数.

2° 在$\mathscr{F}(X)$中补余律不成立. 因为在一般情形，当 $0<A(x)<1$ 时，有 $(A\vee A')(x)=\max\{A(x),1-A(x)\}<1$,

$$(A\wedge A')(x)=\min\{A(x),1-A(x)\}>0,$$

因而 $A\vee A'\neq X, A\wedge A'\neq\varnothing$.

事实上，我们有

命题 2.2 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，则下述三个结论等价：

(i) $A\vee A'=X$;

(ii) $A\wedge A'=\varnothing$;

(iii) $A\in\{0,1\}^X$，即 A 为 X 的分明子集的特征函数.

在$\mathscr{F}(X)$上除了格运算$\vee,\wedge$之外，由于问题的不同需要，可引入其他称为广义并$\vee^*$，广义交$\wedge^*$的运算. 与$\vee,\wedge$运算一样，它们都依$[0,1]$上相应的二元运算$\cup^*,\cap^*$的不同定义，按点式给出$\mathscr{F}(X)$上$\vee^*,\wedge^*$的运算. 即

定义 2.4 设$\cup^*,\cap^*$分别是$[0,1]$上的二元运算. 对 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，$\forall x\in X$，命

$$(A\vee^*B)(x)=A(x)\cup^*B(x),$$
$$(A\wedge^*B)(x)=A(x)\cap^*B(x).$$

则 $A\vee^*B, A\wedge^*B\in\mathscr{F}(X)$，$\vee^*,\wedge^*$分别称为$\mathscr{F}(X)$上由$\cup^*,\cap^*$决定的**广义并**，**广义交**运算.

例 2.3 命$\hat{+},\hat{\cdot}:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，$\forall a,b\in[0,1]$，

$$a\hat{+}b=a+b-ab,$$

$$a\hat{\cdot}b=ab.$$

于是$\forall A,B\in\mathscr{F}(X),x\in X$,命

$$(A\hat{+}B)(x)=A(x)\hat{+}B(x)=A(x)+B(x)-A(x)B(x),$$

$$(A\hat{\cdot}B)(x)=A(x)\hat{\cdot}B(x)=A(x)B(x).$$

则 $A\hat{+}B,A\hat{\cdot}B\in\mathscr{F}(X)$,$\mathscr{F}(X)$上的运算"$\hat{+}$","$\hat{\cdot}$"分别称为**概率和**,**概率积**.

易见,"$\hat{+}$","$\hat{\cdot}$"适合交换律,结合律,0—1 律,De Morgan 律等,但不适合幂等律,吸收律及分配律.因而$\langle(\mathscr{F}(X),\hat{+},\hat{\cdot}\rangle$不是格.

例 2.4 命$\oplus,\odot:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$,$\forall a,b\in[0,1]$,

$a\oplus b=\min(1,a+b)$,$a\odot b=\max(0,a+b-1)$.于是,$\forall A,B\in\mathscr{F}(X),x\in X$,命

$$(A\oplus B)(x)=1\wedge(A(x)+B(x)),$$

$$(A\odot B)(x)=0\vee(A(x)+B(x)-1).$$

则 $A\oplus B,A\odot B\in\mathscr{F}(X)$.$\mathscr{F}(X)$上的运算"$\oplus$","$\odot$"分别称为**有界和**,**有界积**.

易见,"$\oplus$","$\odot$"适合交换律,结合律,0—1 律,*De Morgan* 律,补余律等,但不适合幂等律,吸收律及分配律.因而$\langle\mathscr{F}(X),\oplus,\odot\rangle$也不是格.

F 集的相当一类广义并,广义交运算可以统一为 F 集的模运算的形式.根据定义 2.4,我们先定义$[0,1]$上的模运算.

定义 2.5 设 $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$,如果适合:

1° (交换律) $\forall a,b\in[0,1],S(a,b)=S(b,a)$;

2° (结合律) $\forall a,b,c\in[0,1]$,

$$S(a,S(b,c))=S(s(a,b),c);$$

3° （单调性）　若 $a,b,c,d\in[0,1]$，且 $a\leqslant c,b\leqslant d$，

　　则　$S(a,b)\leqslant S(c,d)$；

4° （边界条件）　$\forall\, a\in[0,1]$，$S(a,0)=a$，

则称 S 是$[0,1]$上的 **S 模**.

设 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，适合上述 1°，2°，3° 及

5° （边界条件）　$\forall\, a\in(0,1]$，$T(a,1)=a$，

则称 T 是$[0,1]$上的 **T 模**.

$[0,1]$上的 S 模，T 模，统称为**模运算**.

进而，设 S,T 分别是$[0,1]$的 S 模，T 模，并适合：

6° （*De Morgan* 律）　$\forall\, a,b\in[0,1]$，

$$1-S(a,b)=T(1-a,1-b),$$

则称 S 与 T 是$[0,1]$上的**对偶模**.

例 2.5　(i)在$[0,1]$上，通常的 $\vee=\max$，$\wedge=\min$ 是对偶的 S 模，T 模，记为 $\vee=S_0$，$\wedge=T_0$.

(ii)　在$[0,1]$上，命

$$S_1(a,b)=a+b-ab,\quad T_1(a,b)=ab,$$

$$S_2(a,b)=\frac{a+b}{1+ab},\quad T_2(a,b)=\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)},$$

$$S_\infty(a,b)=\min(1,a+b),\quad T_\infty(a,b)=\max(0,a+b-1),$$

则易见，$S_1=\hat{+}$，　$T_1=\hat{\cdot}$，　$S_\infty=\oplus$，　$T_\infty=\odot$.

S_i,T_i 是对偶的 S 模，T 模，$i=1,2,\infty$.

例 2.3 和例 2.4 表明 $\mathscr{F}(X)$上的概率和，概率积是由 S_1,T_1 决定的广义并，广义交运算，$\mathscr{F}(X)$上的有界和，有界积是由 S_∞，T_∞决定的广义并，广义交运算.

通常称由 S_2,T_2 决定的 $\mathscr{F}(X)$上的广义并，广义交运算为 **Einstain算子**.

(iii)　在　$[0,1]$上，命

$$S^*(a,b)=\begin{cases} b & \text{当 } a=0 \\ a & \text{当 } b=0 \\ 1 & \text{其他} \end{cases},\qquad T^*(a,b)=\begin{cases} a & \text{当 } b=1 \\ b & \text{当 } a=1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

则 S^*,T^*是对偶的 S 模,T 模.

定义 2.6 设 Δ_1,Δ_2 是$[0,1]$上的模运算,$\forall\ a,b\in[0,1]$,有 $\Delta_1(a,b)\leqslant\Delta_2(a,b)$,则称 Δ_2 **强于** Δ_1(Δ_1 **弱于** Δ_2),记为 $\Delta_1\leqslant\Delta_2$.

于是,容易验证下列命题.

命题 2.3 (1) 设 $S_i,T_i,i=0,1,2,\infty,S^*,T^*$ 如前述,则 $T^*\leqslant T_\infty\leqslant T_2\leqslant T_1\leqslant T_0\leqslant S_0\leqslant S_1\leqslant S_2\leqslant S_\infty\leqslant S^*$;

(2) 设 S 是 S 模,则 $S_0\leqslant S\leqslant S^*$,且 $S=S_0$ 当且仅当,$\forall\ a\in[0,1]$,$S(a,a)=a$;

(3) 设 T 是 T 模,则 $T^*\leqslant T\leqslant T_0$,且 $T=T_0$ 当且仅当,$\forall\ a\in[0,1]$,$T(a,a)=a$.

定理 2.4 设$\cup^*$,$\cap^*$是$[0,1]$上对偶的 S 模,T 模,则 $\mathscr{F}(X)$ 上由$\cap^*$,$\cap^*$决定的广义并,广义交$\vee^*$,$\wedge^*$(此时,分别称$\vee^*$,$\wedge^*$为 $\mathscr{F}(X)$上的模并,模交)适合:

1° (交换律) $A\vee^*B=B\vee^*A$, $A\wedge^*B=B\wedge^*A$;

2° (结合律) $(A\vee^*B)\vee^*C=A\vee^*(B\vee^*C)$,

$(A\wedge^*B)\wedge^*C=A\wedge^*(B\wedge^*C)$;

3° (0—1 律) $A\vee^*X=X,A\vee^*\varnothing=A$,

$A\wedge^*X=A,A\wedge^*\varnothing=\varnothing$;

4° (单调性) $A\leqslant A\vee^*B,A\wedge^*B\leqslant A$;

5° (*De Morgan* 律)

$$(A\vee^*B)'=A'\wedge^*B',\quad (A\wedge^*B)'=A'\vee^*B'.$$

证明 依定义 2.4,定义 2.5 等可直接验证.证毕.

注 若 A,B 是 X 的分明子集，则 $A\vee^*B,A\wedge^*B$ 分别是子集 A,B 的并集，交集的特征函数．因此，$\mathscr{F}(X)$上的模并，模交及补运算是分明子集的并，交，补运算的推广．

§3 F 集的分解定理

分解定理是 F 集论及其应用中的基本定理之一．

F 集是普通集合的推广．本节运用 F 集的 λ 截集，将 F 集分解成一族具有某种性质的普通集合族决定的表示式．从而阐明 F 集与普通集合的联系，以及用一族普通集合去构造 F 集的可能性，这就为把 F 集论的问题，转化为普通集论的问题提供了常用的工具．

定义 3.1 设 $A\in\mathscr{F}(X)$．

(i) $\forall\lambda\in[0,1]$，

$$A_\lambda=\{x\in X\mid A(x)\geqslant\lambda\}\subseteq X$$

称为 F 集 A 的 λ **截集**，λ 称为**置信水平**．(参见图 1.4)

特别，$A_1=\{x\in X\mid A(x)=1\}$ 称为 F 集 A 的**核**，记作 KerA．

(ii) $\forall\lambda\in[0,1]$，

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\{x\in X\mid A(x)>\lambda\}\subseteq X$$

称为 F 集 A 的 λ **强截集**．

特别，$A_{\underset{\cdot}{0}}=\{x\in X\mid A(x)>0\}$称为 F 集 A 的**支集**，记作 SuppA．

λ 截集有明显的直观意义：如果 x 对 F 集 A 的从属度不小于 λ，就认为相对于置信水平 λ 来说，x 是 A 的成员．这些成员的全体构成 X 的分明子集 A_λ．

显然，　$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq A_\lambda$，　$A_0 = X$，　$A_{\underset{\cdot}{1}} = \varnothing$.

注意，不要把 λ 截集 A_λ 的 λ 与下标意义相混淆.

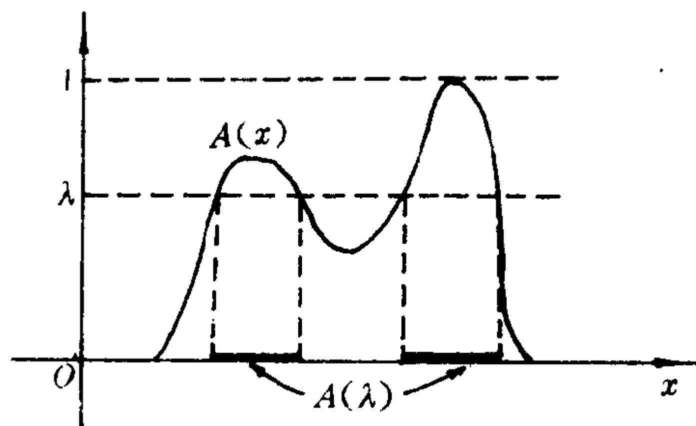


图 1.4

例 3.1　设 X 及 X 的 F 集 $Y=$"年轻人"的集合，如例 1.3，则

$$Y_{0.5} = [0,30],\quad Y_{0.\underset{\cdot}{5}} = [0,30),$$

$$Y_{0.2} = [0,35],\quad Y_{0.\underset{\cdot}{1}} = [0,40).$$

可见，对于 30 岁的人，如果置信水平 $\lambda > 0.5$，便已不算年轻人了；而如果置信水平降到 0.5 或以下，30 岁仍算年轻.

下面讨论 λ 截集，λ 强截集的基本性质.

命题 3.1　设 $A, B \in \mathscr{F}(X)$，$\lambda, \mu \in [0,1]$. 则

(i)　$(A \vee B)_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$，　$(A \wedge B)_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$；

(ii)　$(A \vee B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，　$(A \wedge B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$；

(iii)　若 $A \leqslant B$，　则 $A_\lambda \subseteq B_\lambda$，　$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$；

(iv)　若 $\lambda < \mu$，　则 $A_\mu \subseteq A_\lambda$，　$A_{\underset{\cdot}{\mu}} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 且 $A_\mu \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

证明　仅证 $(A \vee B)_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$，其余类似可证.

$$\begin{aligned} x \in (A \vee B)_\lambda &\Leftrightarrow (A \vee B)(x) \geqslant \lambda \\ &\Leftrightarrow A(x) \vee B(x) \geqslant \lambda \\ &\Leftrightarrow A(x) \geqslant \lambda \text{ 或 } B(x) \geqslant \lambda \\ &\Leftrightarrow x \in A_\lambda \text{ 或 } x \in B_\lambda \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in A_\lambda \cup B_\lambda. \quad \text{证毕.}$$

命题 3.2 设$\{A_t | t\in T\}\subseteq \mathscr{F}(X)$,$\lambda\in[0,1]$.则

(i) $(\bigvee_{t\in T} A_t)_\lambda \supseteq \bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda$;

(ii) $(\bigwedge_{t\in T} A_t)_\lambda = \bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda$;

(iii) $(\bigvee_{t\in T} A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$;

(iv) $(\bigwedge_{t\in T} A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$

证明 仅证(i),(iii).其余类似.

(i)$\forall\ t\in T$, $A_t\leqslant \bigvee_{t\in T} A_t$, 由命题 3.1(iii),有

$$(A_t)_\lambda\subseteq(\bigvee_{t\in T} A_t)\lambda.$$

故$\bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda\subseteq(\bigvee_{t\in T} A_t)_\lambda$.

(iii) $x\in(\bigvee_{t\in T} A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \Leftrightarrow \bigvee_{t\in T} A_t(x) > \lambda$

$$\Leftrightarrow \exists\ t_0\in T, \quad A_{t_0}(x)>\lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists\ t_0\in T, \quad x\in(A_{t_0})_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

$$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}. \quad \text{证毕.}$$

注 一般而言,(i),(iv)中"$\subseteq$"不能换成等号,即命题 3.1(i),(ii),不能完全推广到无限多个 F 集的并与交的情形.例如 $X\neq\varnothing$,命 $A_n\in\mathscr{F}(X)$, $\forall\ x\in X$,

$$A_n(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad n=1,2,\cdots.$$

易见, $(\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n)_{\frac{1}{2}}=X$, $(A_n)_{\frac{1}{2}}=\Phi$, $n=1,2\cdots$.

故 $(\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n)_{\frac{1}{2}}\neq\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n)_{\frac{1}{2}}$.

命题 3.3 设 $A\in\mathscr{F}(X)$,$\{\lambda_t | t\in T\}\subseteq[0,1]$.记 $\lambda=\sup_{t\in T}\lambda_t$,$\mu=\inf_{t\in T}\lambda_t$.则

(i) $A_\lambda=\bigcap_{t\in T}A_{\lambda_t}$; (ii) $A_{\underset{\cdot}{\mu}}=\bigcup_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\lambda_t}}$.

证明 (i) $\forall\ t\in T$,$\lambda_t\leqslant\lambda$,由命题 3.1(iv),有

$A_\lambda \subseteq A_{\lambda_t}$，从而 $A_\lambda \subseteq \bigcap\limits_{t\in T} A_{\lambda_t}$；反之，若 $x\in \bigcap\limits_{t\in T} A_{\lambda_t}$，知$\forall\ t\in T, x\in A_{\lambda_t}$，即 $A(x)\geqslant \lambda_t$. 于是 $A(x)\geqslant \operatorname{Sup}\limits_{t\in T}\lambda_t=\lambda$，故 $x\in A_\lambda$. 从而 $\bigcap\limits_{t\in T} A_{\lambda_t}\subseteq A_\lambda$. 因此

$$A_\lambda = \bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t}.$$

同理可证(ii)． 证毕.

命题 3.4 设 $A\in \mathscr{F}(X)$，$\lambda\in[0,1]$则

(i) $(A')_\lambda=(A_{\underset{\cdot}{\lambda'}})'$；

(ii) $(A')_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(A_{\lambda'})'$，

其中 $\lambda'=1-\lambda$.

证明 (i) 用定义 3.1 及 $\mathscr{F}(X)$上的补运算"$'$"，

$$\begin{aligned} x\in (A')_\lambda &\Leftrightarrow 1-A(x)=A'(x)\geqslant\lambda \\ &\Leftrightarrow A(x)\leqslant 1-\lambda=\lambda' \\ &\Leftrightarrow x\overline{\in} A_{\underset{\cdot}{\lambda'}} \\ &\Leftrightarrow x\in (A_{\underset{\cdot}{\lambda'}})' \end{aligned}$$

同理可证(ii)． 证毕

注意，一般$(A')_\lambda\neq(A_\lambda)'$.

定义 3.2 设 $A\in\mathscr{F}(X)$， $\lambda\in[0,1]$． $\forall\ x\in X$，命

$$(\lambda A)(x) = \lambda \wedge A(x),$$

则 $\lambda A\in\mathscr{F}(X)$称为数 λ 与 F 集 A 的**乘积**.

易见，若 $A\leqslant B$，有 $\lambda A\leqslant\lambda B$；若 $\lambda\leqslant\mu$，则 $\lambda A\leqslant\mu A$.

实际上，$\lambda A=[\lambda]\wedge A$，其中$[\lambda]\in\mathscr{F}(X)$是取常值 λ 的 F 集.

特别，若 $A\in\mathscr{P}(X)$，即 X 的分明子集，则 λA(注意，子集 A 与其特征函数不加区别)是仅取值为 0，λ 的 F 集；而任何 F 集可以表示为这种简单的 F 集的并.

定理 3.5(分解定理 I) 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，则

$$A = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \lambda A_\lambda.$$

证明　$\forall x \in X$,有

$$\Big[\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda\Big](x)=\Big[\bigvee_{\lambda\in[0,A(x)]}(\lambda A_\lambda)(x)\Big]\vee\Big[\bigvee_{\lambda\in(A(x),1]}(\lambda A_\lambda)(x)\Big].$$

根据定义 3.2　及

$$A_\lambda(x)=\begin{cases}1, & 当\ \lambda\leqslant A(x),\\ 0, & 当\ \lambda> A(x)\end{cases}$$

知,$\Big[\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda\Big](x)=\Big[\bigvee_{\lambda\in[0,A(x)]}\lambda\Big]\vee\{0\}=A(x)$. 故

$$A=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda.\quad 证毕.$$

定理 3.6(分解定理 Ⅱ)　设 $A\in\mathscr{F}(X)$,则

$$A=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

证明类似于定理 3.5.

推论 3.7　设 $A\in\mathscr{F}(X)$,Γ 是$[0,1]$中的稠密子集(例如$[0,1]$中全体有理数集). 则

$$A=\bigvee_{\lambda\in\Gamma}\lambda A_\lambda=\bigvee_{\lambda\in\Gamma}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

下面的定理是分解定理的更一般的形式,其中 $H(\lambda)$不必是 F 集的截集.

定理 3.8(分解定理 Ⅲ)

设 $A\in\mathscr{F}(X)$,映射 $H:[0,1]\to\mathscr{P}(X)$　适合:

$$\forall\lambda\in[0,1],\quad A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda.$$

则　(1)　$A=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$;

(2)　$\lambda<\mu\Rightarrow H(\lambda)\supseteq H(\mu)$;

(3)　$\forall\lambda\in[0,1]$, $A_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)$, $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$

(约定$\bigcap_{\varnothing}=X$, $\bigcup_{\varnothing}=\varnothing$)

证明　(1)　$\forall\lambda\in[0,1]$,因 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda$,知

$$\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\leqslant\lambda H(\lambda)\leqslant\lambda A_\lambda$$

及　$A=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda=A.$

故 $A=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$.

(2) 若 $\lambda<\mu$, 由命题 3.1(iv),有

$$H(\mu)\subseteq A_{\mu}\subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda).$$

(3) 对 $\lambda\in[0,1]$,当 $\alpha\in[0,\lambda)$,一方面 $A_\lambda\subseteq A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq H(\alpha)$,知 $A_\lambda\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)$;另一方面 $H(\alpha)\subseteq A_\alpha$,据命题 3.3(i),有

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}A_\alpha=A_\lambda.$$

于是 $A_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)$.

同理可证 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$. 证毕.

§4 F 集的表现定理

本节介绍 F 集论的另一个基本定理——F 集的表现定理,它从另一角度阐述了 F 集与普通集合的联系.事实上,F 集的分解定理表明,一个 F 集对应着具有某种性质的一族普通集合(不是唯一的一族);而 F 集的表现定理将表明,适合一定条件的普通集合族(集合套)可以决定一个 F 集,进而给出 F 集的构造性定义.

定义 4.1 (1) 设 $H:[0,1]\to\mathscr{P}(X)$适合:

$$0\leqslant\lambda\leqslant\mu\leqslant1\Rightarrow H(\lambda)\supseteq H(\mu),$$

则称 H 为 X 上的一个**集合套**. X 上的集合套全体记为 $\mathscr{H}(X)$.

(2) 设 $E:[0,1]\to\mathscr{P}(X)$适合:

$$E(0)=X,E(\bigvee_{t\in T}\lambda_t)=\bigcap_{t\in T}E(\lambda_t)\quad(\lambda_t\in[0,1],t\in T),$$

则称 E 为 X 上的一个**集轮**. X 上的集轮全体记为 $\Phi(X)$.

(3) 设 $G:[0,1]\to\mathscr{P}(X)$ 适合:

$$G(1)=\varnothing,G(\bigwedge_{t\in T}\lambda_t)=\bigcup_{t\in T}G(\lambda_t)\quad(\lambda_t\in[0,1],t\in T),$$

则称 G 为 X 上的一个**开集轮**. X 上的开集轮全体记为 $\dot{\Phi}(X)$.

注　定义中的 H,E,G 均为集值映射.

易见 $\Phi(x),\dot{\Phi}(X)\subseteq\mathscr{H}(X)$，换言之，集轮，开集轮是特殊的集合套.

例 4.1　设 $A\in[0,1]^X$，命 $E,G:[0,1]\to\mathscr{P}(X)$，

$$\forall\ \lambda\in[0,1],E(\lambda)=A_\lambda,G(\lambda)=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

则由命题 3.3，$E\in\Phi(X)$，$G\in\dot{\Phi}(X)$.

定义 4.2　在 $\mathscr{H}(X)$ 中规定关系 $\leqslant$ 及运算 $\cup,\cap,'$ 如下：

(i)　设 $H_1,H_2\in\mathscr{H}(X)$，若 $\forall\ \lambda\in[0,1]$，$H_1(\lambda)\subseteq H_2(\lambda)$，则称 H_2 **包含** H_1，记作 $H_1\leqslant H_2$.

(ii)　设 $H,H_t\in\mathscr{H}(X)(t\in T)$，$\forall\ \lambda\in[0,1]$，命

$$(\bigcup_{t\in T}H_t)(\lambda)=\bigcup_{t\in T}H_t(\lambda),$$

$$(\bigcap_{t\in T}H_t)(\lambda)=\bigcap_{t\in T}H_t(\lambda),$$

$$H'(\lambda)=(H(1-\lambda))',$$

则容易验证 $\bigcup_{t\in T}H_t,\bigcap_{t\in T}H_t,H'\in\mathscr{H}(X)$，分别称为集合套的**并**，**交**，**补**.

命题 4.1　$\langle\mathscr{H}(X),\cup,\cap,'\rangle$ 是软代数，其中最大元，最小元分别是 $\overline{X},\overline{\varnothing}$：$\forall\ \lambda\in[0,1]$，

$$\overline{X}(\lambda)=X,\quad \overline{\varnothing}(\lambda)=\varnothing.$$

证明　由于 $\mathscr{H}(X)$ 中运算 $\cup,\cap$ 是按点式定义的，因而普通集合论中，关于 $\cup,\cap$ 的性质在 $\mathscr{H}(X)$ 中成立，即 $\langle\mathscr{H}(X),\cup,\cap\rangle$ 是分配格，且 0－1 律成立（最大元为 $\overline{X}$，最小元为 $\overline{\varnothing}$）.

下面验证：$\forall\ H,H_1,H_2\in\mathscr{H}(X)$，有

(i)　$(H')'=H$；

(ii)　$(H_1\cup H_2)'=H_1'\cap H_2'$；

(iii) $(H_1 \cap H_2)' = H_1' \cup H_2'$.

于是,$\langle \mathscr{H}(X), \cup, \cap, ' \rangle$是软代数.

事实上 (i) $\forall \lambda \in [0,1]$,由定义 4.2,有

$$(H')'(\lambda) = (H'(1-\lambda))' = ((H(\lambda))')' = H(\lambda).$$

故$(H')' = H$.

(ii) $\forall \lambda \in [0,1]$,由定义 4.2,有

$$\begin{aligned}(H_1 \cup H_2)'(\lambda) &= \{(H_1 \cup H_2)(1-\lambda)\}' \\ &= \{H_1(1-\lambda) \cup H_2(1-\lambda)\}' \\ &= (H_1(1-\lambda))' \cap (H_2(1-\lambda))' \\ &= H_1'(\lambda) \cap H_2'(\lambda) \\ &= (H_1' \cap H_2')(\lambda)\end{aligned}$$

故$(H_1 \cup H_2)' = H_1' \cap H_2'$.

(iii) 由(i),(ii),知

$$(H_1' \cup H_2')' = (H_1')' \cap (H_2')' = H_1 \cap H_2.$$

故 $(H_1 \cap H_2)' = H_1' \cup H_2'$. 证毕.

下面是 F 集的表现定理的一般形式.

定理 4.2(表现定理 Ⅲ)·

命 $f: \mathscr{H}(X) \to [0,1]^X$, $\forall H \in \mathscr{H}(X)$,

$$f(H) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda).$$

则映射 f 是$\langle \mathscr{H}(X), \cup, \cap, ' \rangle$到$\langle [0,1]^X, \vee, \wedge, ' \rangle$上的同态满射,且$\forall \lambda \in [0,1]$,有

(i) $(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq (f(H))_\lambda$;

(ii) $(f(H))_\lambda = \bigcap\limits_{\alpha < \lambda} H(\alpha)$;

(iii) $(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup\limits_{\alpha > \lambda} H(\alpha)$.

证明 (1) f 是满射:$\forall A \in [0,1]^X$,令 $H(\lambda) = A_\lambda$, $\lambda \in [0,1]$,

则 $H\in\mathscr{H}(X)$(见例 4.1).由(分解)定理 3.5,

$$f(H)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda=A,\quad \text{故 } f \text{ 是满射.}$$

(2) 验证(i),(ii),(iii).$\forall\ \lambda\in[0,1]$,若 $x\in H(\lambda)$,即$(H(\lambda))(x)=1$,知

$$(f(H))(x)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge H(\alpha)(x)]\geqslant\lambda,$$

故 $x\in(f(H))_\lambda$. 因此 $H(\lambda)\subseteq(f(H))_\lambda$.

再者,若 $x\overline{\in}H(\lambda)$, 即$(H(\lambda))(x)=0$, 由 H 的定义知,$\forall\ \alpha\in[\lambda,1]$,$(H(\alpha))(x)=0$. 于是

$$(f(H))(x)=\bigvee_{\alpha\in[0,\lambda]}[\alpha\wedge H(\alpha)(x)]\leqslant\bigvee_{\alpha\in[0,\lambda)}\alpha=\lambda,$$

故 $x\overline{\in}(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.因此$(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)$.

总之,(i)成立.

根据(分解)定理 3.8,得到

$$(f(H))_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha),\quad (f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha),$$

即(ii),(iii)成立.

(3) f 是软代数之间的同态,即 f 保持格上的并、交、补运算:$\forall\ \lambda\in[0,1]$,$H_t\in\mathscr{H}(X)$ $(t\in T)$,于是

$$\begin{aligned}(f(\bigcup_{t\in T}H_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}}&=\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T}H_t)(\alpha) && \text{(由(iii))}\\ &=\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T}H_t(\alpha)) && \text{(定义 4.2)}\\ &=\bigcup_{t\in T}(\bigcup_{\alpha>\lambda}H_t(\alpha))\\ &=\bigcup_{t\in T}(f(H_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}} && \text{(由(iii))}\\ &=(\bigvee_{t\in T}f(H_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}}, && \text{(命题 3.2(iii))}\end{aligned}$$

根据(分解)定理 3.6,

$$f(\bigcup_{t\in T}H_t)=\bigvee_{t\in T}f(H_t).$$

类似地,

$$(f(\bigcap_{t\in T}H_t))_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcap_{t\in T}H_t)(\alpha) \qquad \text{(由(ii))}$$

$$=\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcap_{t\in T}H_t(\alpha)) \qquad \text{(定义 4.2)}$$

$$=\bigcap_{t\in T}(\bigcap_{\alpha<\lambda}H_t(\alpha))$$

$$=\bigcap_{t\in T}(f(H_t))_\lambda \qquad \text{(由(ii))}$$

$$=(\bigwedge_{t\in T}f(H_t))_\lambda \qquad \text{(命题 3.2(ii))}$$

根据(分解)定理 3.5,

$$f(\bigcap_{t\in T}H_t)=\bigwedge_{t\in T}f(H_t).$$

最后,$\forall\ \lambda\in[0,1]$,$H\in\mathscr{H}(X)$,有

$$(f(H'))_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H'(\alpha) \qquad \text{(由(ii))}$$

$$=\bigcap_{\alpha<\lambda}(H(1-\alpha))' \qquad \text{(定义 4.2)}$$

$$=(\bigcup_{1-\alpha>1-\lambda}H(1-\alpha))' \qquad \text{(De Morgan 律)}$$

$$=(\bigcup_{\alpha>1-\lambda}(H(\alpha))'$$

$$=(f(H)_{1-\lambda})' \qquad \text{(由(iii))}$$

$$=((f(H))')_\lambda \qquad \text{(命题 3.4(i))}$$

根据(分解)定理 3.5,

$$f(H')=(f(H))'. \qquad \text{证毕.}$$

定理表明,一般$<\mathscr{H}(X),\cup,\cap>$与$<[0,1]^X,\vee,\wedge>$并不同构,即不同的集合套可以对应同一 F 集,为了进一步刻划$[0,1]^X$,在$\mathscr{H}(X)$中引入等价关系:

定义 4.3 设 f: $\mathscr{H}(X)\to[0,1]^X$ 如定理 4.2,$H_1,H_2\in\mathscr{H}(X)$适合 $f(H_1)=f(H_2)$,则称 H_1 与 H_2 是等价集合套,记作 $H_1\sim H_2$.

命题 4.3 设 $H_1,H_2\in\mathscr{H}(X)$,则下述结论等价:

(1) $H_1\sim H_2$;

(2) $\forall\ \lambda\in[0,1]$, $\bigcap_{\alpha<\lambda}H_1(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H_2(\alpha)$;

(3) $\forall\ \lambda\in[0,1]$, $\bigcup_{\alpha>\lambda}H_1(\alpha)=\bigcup_{\gamma>\lambda}H_2(\alpha)$.

证明　由分解定理Ⅰ,Ⅱ(定理3.5,定理3.6)及定理4.2的(ii),(iii)立得.证毕.

显然,"$\sim$"是$\mathscr{H}(X)$上的等价关系.$\forall\ H\in\mathscr{H}(X)$,记

$$[H]=\{H^*\in\mathscr{H}(X)\mid H^*\sim H\}$$

为H所在的集合套类,于是$\mathscr{H}(X)$对"$\sim$"的商集

$$\mathscr{H}(X)/\sim=\{[H]\mid H\in\mathscr{H}(X)\}.$$

在$\mathscr{H}(X)/\sim$上定义运算:

$$\bigcup_{t\in T}[H_t]=[\bigcup_{t\in T}H_t],$$

$$\bigcap_{t\in T}[H_t]=[\bigcap_{t\in T}H_t],$$

$$[H]'=[H'].$$

可以验证,上述运算$\cup,\cap,'$的定义是一意的,即与集合套类中的代表选取无关.

事实上,若$H\sim H^*$,$H_t\sim H_t^*(t\in T)$,则$\forall\ \lambda\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha>\lambda}((\bigcup_{t\in T}H_t)(\alpha))&=\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T}H_t(\alpha))\\&=\bigcup_{t\in T}(\bigcup_{\alpha>\lambda}H_t(\alpha)\\&=\bigcup_{t\in T}(\bigcup_{\alpha>\lambda}H_t^*(\alpha))\\&=\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T}H_t^*(\alpha))\\&=\bigcup_{\alpha>\lambda}((\bigcup_{t\in T}H_t^*)(\alpha)),\end{aligned}$$

据命题4.3,$\bigcup_{t\in T}H_t\sim\bigcup_{t\in T}H_t^*$.

同理可知,$\bigcap_{t\in T}H_t\sim\bigcap_{t\in T}H_t^*$.　$H'\sim(H^*)'$.

定理4.4　设$f:\mathscr{H}(X)\to[0,1]^X$如定理4.2,则$f$自然诱导的映射

$$f^*:\mathscr{H}(X)/\sim\to[0,1]^X,\quad [H]\mapsto f(H)$$

是$\langle\mathscr{H}(X)/\sim,\cup,\cap,'\rangle$到$\langle[0,1]^X,\vee,\wedge,'\rangle$上的同构映射,简记$\mathscr{H}(X)/\sim\overset{f^*}{\cong}[0,1]^X$.

证明 首先，f^* 的定义是一意的：若 $H\sim H^*$，则

$$f^*([H^*])=f(H^*)=f(H)=f^*([H]).$$

其次，根据定义 4.3，$\mathscr{H}(X)/\sim$ 上的运算是由集合套类的代表，作相应的运算决定的，因此 $<\mathscr{H}(X)/\sim,\cup,\cap,'>$ 也是软代数，且由定理 4.2 知，f^* 是单的满同态，故

$$\mathscr{H}(X)/\sim \overset{f^*}{\simeq} [0,1]^X. \quad \text{证毕.}$$

下面我们给出表现定理的其他形式，即用集轮，开集轮来刻画 F 集.

定义 4.4 在 $\Phi(X)$ 中定义运算：

设 $E,E_t\in\Phi(X)(t\in T)$，$\lambda\in[0,1]$，注意到 $\Phi(X)\subseteq\mathscr{H}(X)$，命

$$(\bigcup_{t\in T}E_t)(\lambda)=(f(\bigcup_{t\in T}E_t))_\lambda,$$

$$(\bigcap_{t\in T}E_t)(\lambda)=(f(\bigcap_{t\in T}E_t))_\lambda,$$

$$E'(\lambda)=(f(E'))_\lambda.$$

则 $\bigcup_{t\in T}E_t,\bigcap_{t\in T}E_t,E'\in\Phi(X)$（参见例 4.1），分别称为 X 上的集轮族 $\{E_t|t\in T\}$ 的**并**，**交**及集轮 E 的**补**.

由定理 4.2(ii)，定义 4.1(2)等，易知

$$(\bigcup_{t\in T}E_t)(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcup_{t\in T}E_t(\alpha)),$$

$$(\bigcap_{t\in T}E_t)(\lambda)=\bigcap_{t\in T}E_t(\lambda),$$

$$E'(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda}(E(1-\alpha))'$$

命题 4.5 命 $g:\ \Phi(X)\to\mathscr{H}(X)/\sim,\quad E\mapsto[E]$，

则 g 是 $\langle\Phi(X),\cup,\cap,'\rangle$ 到 $\langle\mathscr{H}(X)/\sim,\cup,\cap,'\rangle$ 上的同构映射.

证明 (1) g 是单射：设 $E,E^*\in\Phi(X)$，$g(E)=g(E^*)$，即 $[E]=[E^*]$. 由定义 4.3 知，$f(E)=f(E^*)$，于是依定理 4.2(ii)，$\forall\ \lambda\in[0,1]$，

$$E(\lambda)=E(\bigvee_{\alpha<\lambda}\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}E(\alpha)=(f(E))_\lambda$$

$$=(f(E^*))_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}E^*(\alpha)=E^*(\lambda).$$

故 $E=E^*$.

(2) g 是满射：$\forall\ [H]\in\mathscr{H}(X)/\sim$，记 $E_H:[0,1]\to\mathscr{P}(X)$，$\forall\ \lambda\in[0,1]$，$E_H(\lambda)=(f(H))_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)$. 则　$E_H\in\Phi(X)$，且$\forall\ \lambda\in[0,1]$，因

$$\begin{aligned}(f(E_H))_\lambda&=\bigcap_{\alpha<\lambda}E_H(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\ \bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)\\&=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)=(f(H))_\lambda,\end{aligned}$$

据(分解)定理 3.5，　$f(E_H)=f(H)$.　故　$g(E_H)=[E_H]=[H]$.

(3) 显然 g 保持格上运算$\cup,\cap,{}'$.

总之，$\Phi(X)\overset{g}{\cong}\mathscr{H}(X)/\sim$.　证毕.

定理4.6(表现定理 I)存在 $\varphi:\Phi(X)\to[0,1]^X$，使得$\langle\Phi(X),\cup,\cap,{}'\rangle\overset{\varphi}{\cong}\langle[0,1]^X,\vee,\wedge,{}'\rangle$.

证明　命 $\varphi=f^*\circ g$，由定理4.4，命题4.5，

$\forall\ E\in\Phi(X)$，$\varphi(E)=f^*([E])=f(E)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda E(\lambda)$.　证毕.

类似地，我们有

定义4.5　在 $\underset{\cdot}{\Phi}(X)$中定义运算：

设 $G,G_t\in\underset{\cdot}{\Phi}(X)\ (t\in T)$，$\lambda\in[0,1]$，命

$$(\bigcup_{t\in T}G_t)(\lambda)=(f(\bigcup_{t\in T}G_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}},$$

$$(\bigcap_{t\in T}G_t)(\lambda)=(f(\bigcap_{t\in T}G_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}},$$

$$G'(\lambda)=(f(G'))_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

则 $\bigcup_{t\in T}G_t,\bigcap_{t\in T}G_t,G'\in\underset{\cdot}{\Phi}(X)$（参见例4.1），分别称为 X 上的开集轮族$\{G_t|t\in T\}$的**并**、**交**及开集轮 G 的**补**.

易见，$(\bigcup_{t\in T}G_t)(\lambda)=\bigcup_{t\in T}G_t(\lambda)$，

$$(\bigcap_{t\in T}G_t)(\lambda)=\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcap_{t\in T}G_t(\alpha)),$$

$$G'(\lambda)=\bigcup_{\alpha>\lambda}(G(1-\alpha))'.$$

定理4.7(表现定理Ⅱ) 存在 $\psi:\Phi(X)\to[0,1]^X$,使得

$$\langle\Phi(X),\cup,\cap,'\rangle\overset{\psi}{\simeq}\langle[0,1]^X,\vee,\wedge,'\rangle.$$

实际上, $\forall G\in\Phi(X),\psi(G)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda G(\lambda)$.

根据定理4.4,论域 X 上的 F 集与 X 上的集合套的等价类是一一对应的(且保持相应的格运算).归纳上述讨论,现在我们可以利用集合套来直接给出 F 集及其隶属函数的构造性定义.

设 X 为论域,$\mathscr{H}(X)$为 X 上的全体集合套的集合,即

$\mathscr{H}(X)=\{H:[0,1]\to\mathscr{P}(X)\mid\lambda\leqslant\mu\Rightarrow H(\mu)\subseteq H(\lambda)\}$.

设 $H_1,H_2\in\mathscr{H}(X)$, 若 $\forall\lambda\in[0,1]$,

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}H_1(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H_2(\alpha),$$

则记 $H_1\sim H_2$, $\forall H\in\mathscr{H}(X)$,命

$$[H]=\{H^*\in\mathscr{H}(X)\mid H^*\sim H\}$$

及

$$\mathscr{F}^*(X)=\{[H]\mid H\in\mathscr{H}(X)\},$$

$$\mathscr{P}^*(X)=\{[H]\mid H:[0,1]\to\mathscr{P}(X),\exists A_H\in\mathscr{P}(X),\forall\lambda\in[0,1],H(\lambda)=A_H\},$$

于是 $\langle\mathscr{P}^*(X),\cup,\cap,'\rangle\simeq\langle\mathscr{P}(X),\cup,\cap,'\rangle$.

如果我们在 $\mathscr{F}^*(X)$中,用 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)=2^X$ 替换 $\mathscr{P}(X)$,命

$$\mathscr{F}(X)=(\mathscr{F}^*(X)-\mathscr{P}^*(X))\cup\mathscr{P}(X).$$

故有$\langle\mathscr{F}(X),\cup,\cap,'\rangle\simeq\langle[0,1]^X,\vee,\wedge,'\rangle$.

(正因为此,我们在§1—3及以后用 $\mathscr{F}(X)$表示$[0,1]^X$.)

定义4.6 设 $A\in\mathscr{F}(X)=(\mathscr{F}^*(X)-\mathscr{P}^*(X))\cup\mathscr{P}(X)$,则称 A 是 X 上的 **F 集**.

$\forall A\in\mathscr{F}(X)$, 命 $\mu_A:X\to[0,1]$如下:

若 $A\in\mathscr{P}(X)$，$\forall\ x\in X$，

$$\mu_A(x)=\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A,\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in} A;\end{cases}$$

若 $A=[H]\in\mathscr{F}^*(X)-\mathscr{P}^*(X)$，$\forall\ x\in X$，

$$\mu_A(x)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\wedge\chi_{H(\lambda)}(x),$$

其中 χ_B 表示 $B\in\mathscr{P}(X)$的特征函数.

此时，称 μ_A 是 F 集 $A\in\mathscr{F}(X)$的**隶属函数**，$\mu_A(x)$是 x 对于 F 集 A 的**从属度**.（注意，以后仍将 A 与 μ_A 不加区别.）

这样，我们就实现了用普通集合来规定 F 集，用普通集合的特征函数定义 F 集的隶属函数，从而完成了由幂集格$\langle\mathscr{P}(X),\cup,\cap,'\rangle$到 F 集格$\langle\mathscr{F}(X),\vee,\wedge,'\rangle$的扩张，既阐明了 F 集是普通集合的推广，又有严格的数学理论基础.

§5 L-F 集

本节介绍比前述的模糊集更一般的，隶属函数的值域是某完备格 L 的 L 模糊集，及其相应的运算、分解定理和表现定理.

事实上，在§1定义 F 集时，隶属函数的值是具有全序结构的[0,1]上的确定值. 然而在 F 集的理论和应用中，可能出现其隶属函数值并非总是可以比较的情形(如例5.1)，也可能需考虑其隶属函数值不是准确的数值，而具有一定的模糊性(如例5.2).

为此，我们将 F 集的概念加以推广，考虑以一般的完备格 L 为值域的隶属函数，得到 L 模糊集，它为模糊数学的理论和应用提供了更一般的框架和基础.

以下总设$L=\langle L,\leqslant,\vee,\wedge\rangle$是具有最大元1，最小元0的完备格．特别，当$L$是具有逆序对合对应的完全分配格，则称$L$为Fuzzy格，简称**F格**．

定义5.1 设X为非空集合，L为完备格，则称映射$A:X\to L$为X上的**L模糊集**，简称**L-F集**．此时，X称为**论域**，L称为**值格**，$A(x)$称为x对于A的**隶属度**．

X上的L-F集的全体记作L^X，即

$$L^X=\{A\mid A:X\to L\}.$$

例5.1 设X为论域，$L=\mathscr{P}(Y)$，即通常集合Y的全体子集的集合．因$\langle\mathscr{P}(Y),\cup,\cap\rangle$是完备格，则$A:X\to L$是$L$-$F$集，此时，$A$的隶属函数值是$Y$的通常子集，$A$常称为$X$上的**集值映射**．

例5.2 设X为论域，$\mathscr{F}([0,1])$表示$[0,1]$上F集的全体．因$L=\langle\mathscr{F}([0,1]),\vee,\wedge\rangle$是完备格，则$L$-$F$集$A:X\to L$称为$X$上的**二型$F$集**，此时，$x\in X$对于$A$的隶属度$A(x)$是一个有模糊性的$F$集．

一般，若取隶属度都是$[0,1]$上的$(m-1)$型F集，便得到论域X上的**m型F集**．

定义5.2 (1)设$A,B\in L^X$，如果$\forall x\in X,A(x)\leqslant B(x)$，则称$B$包含$A$，记作$A\leqslant B$．

特别，如果$\forall x\in X,A(x)=B(x)$，则称A与B**相等**，记作$A=B$．显然$A=B$当且仅当$A\leqslant B$且$B\leqslant A$．

(2)设$A,B\in L^X,\forall x\in X$，命

$$(A\vee B)(x)=A(x)\vee B(x),$$

$$(A\wedge B)(x)=A(x)\wedge B(x).$$

则$A\vee B,A\wedge B\in L^X$，分别称为A与B的**并集**，**交集**．

进而，设$\{A_t\mid t\in T\}\subseteq L^X,\forall x\in X$，命

$$(\bigvee_{t\in T} A_t)(x) = \bigvee_{t\in T} A_t(x),$$

$$(\bigwedge_{t\in T} A_t)(x) = \bigwedge_{t\in T} A_t(x).$$

则 $\bigvee_{t\in T} A_t, \bigwedge_{t\in T} A_t \in L^X$，分别称为$\{A_t | t\in T\}$的**并集**，**交集**.

(3)若完备格 L 上有逆序对合对应"$'$"，$A\in L^X$. 则$\forall\ x\in X$，命 $A'(x)=(A(x))'$，此时，称 $A'\in L^X$ 为 A 的**补**.

下面的定理是容易直接验证的.

定理5.1　设 X 为论域，L 为完备格. 则$\langle L^X, \leqslant, \vee, \wedge\rangle$是完备格.

若 L 上具有逆序对应对应"$'$"，则定义5.2(3)決定的 $':L^X\to L^X, A\mapsto A'$，是 L^X 上的逆序对合对应.

进而，若 L 是分配格，L^X 也是分配格；特别，当 L 是完全分配格或 F 格，L^X 也是完全分配格或 F 格.

例如，设 $L_0=\langle\{0,1\},\vee,\wedge,'\rangle$，$L_1=\langle[0,1],\vee,\wedge,'\rangle$，则$\langle L_0{}^X,\vee,\wedge,'\rangle$是与$\langle\mathscr{P}(X),\cup,\cap,'\rangle$同构的布尔代数，$\langle L_1{}^X,\vee,\wedge,'\rangle=\langle[0,1]^X,\vee,\wedge,'\rangle$是§2建立的 X 上全体 F 集作成的软代数(也是 F 格).

注意，当 L 是全序格时，L^X 并不一定是全序格. 如 $L=[0,1]$的情形.

现在我们来建立 L-F 集的分解定理.

定义5.3　设 $A\in L^X$，$\forall\ \lambda\in L$，

$$A_\lambda = \{x\in X | A(x)\geqslant\lambda\}\subseteq X,$$

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x\in X | A(x)>\lambda\}\subseteq X$$

分别称为 L-F 集 A 的 λ **截集**与 λ **强截集**.

显然 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq A_\lambda$.

下面诸命题是有关截集的性质，可直接验证，证明从略(注意

与§3相应结论的不同之处).

命题5.2 设 $A,B\in L^X$, $\lambda,\mu\in L$.

(i) 若 $A\leqslant B$,则 $A_\lambda\subseteq B_\lambda$, $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$;

(ii) 若 $\lambda<\mu$,则 $A_\mu\subseteq A_\lambda$, $A_{\underset{\cdot}{\mu}}\subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 且 $A_\mu\subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

命题5.3 设 $\{A_t \mid t\in T\}\subseteq L^X$, $\lambda\in L$,则

(i) $(\bigvee\limits_{t\in T} A_t)_\lambda\supseteq\bigcup\limits_{t\in T}(A_t)_\lambda$;

(ii) $(\bigwedge\limits_{t\in T} A_t)_\lambda=\bigcap\limits_{t\in T}(A_t)_\lambda$;

(iii) $\bigvee\limits_{t\in T} A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\supseteq\bigcup\limits_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$;

(iv) $(\bigwedge\limits_{t\in T} A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq\bigcap\limits_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

特别,当 L 是全序完备格时,(*iii*)成为等式.

命题5.4 设 $A\in L^X$, $\{\lambda_t \mid t\in T\}\subseteq L$,记

$$\lambda=\bigvee_{t\in T}\lambda_t,\quad \mu=\bigwedge_{t\in T}\lambda_t.$$

则 (i) $A_\lambda=\bigcap\limits_{t\in T}A_{\lambda_t}$;

(ii) $A_{\underset{\cdot}{\mu}}\supseteq\bigcup\limits_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\lambda_t}}$.

特别,当 L 是全序完备格时,(ii)成为等式.

命题5.5 设 $A\in L^X$, $\lambda\in L$. 则

(i) $A_\lambda\subseteq\bigcap\limits_{\alpha<\lambda}A_\alpha$;

(ii) $A_\lambda\subseteq\bigcap\limits_{\alpha<\lambda}A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$;

(iii) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\supseteq\bigcup\limits_{\alpha>\lambda}A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$;

(iv) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup\limits_{\alpha>\lambda}A_\alpha$

特别,当 L 是稠密的完备格时,(i),(ii),(iii)皆成为等式.

定理5.6(分解定理) 设 L 是完备格, $A\in L^X$,则

(i) $A=\bigvee\limits_{\lambda\in L}\lambda A_\lambda$;

(ii) $A\geqslant\bigvee\limits_{\lambda\in L}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

其中$\forall\ x\in X$, $(\lambda A_\lambda)(x)=\lambda\wedge\chi_{A_\lambda}(x)$, $(\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}})(x)=\lambda\chi_{A_{\underset{\cdot}{\lambda}}}(x)$.

特别,若 L 是稠密的完备格,(ii)成为等式.

证明 (i) 因

$$\chi_{A_\lambda}(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A_\lambda,\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in} A_\lambda,\end{cases}$$

于是,$\forall\ x\in X$,

$$(\bigvee_{\lambda\in L}\lambda A_\lambda)(x)=\bigvee_{\lambda\leqslant A(x)}(\lambda\wedge\chi_{A_\lambda}(x))=\bigvee_{\lambda\leqslant A(x)}\lambda=A(x).$$

故 $A=\bigvee\limits_{\lambda\in L}A_\lambda$.

(ii) $\forall\ \lambda\in L$,因 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq A_\lambda$,故由(i),有

$$A\geqslant\bigvee_{\lambda\in L}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

进而,如果 L 是稠密的,则$\forall\ x\in X$,

$$(\bigvee_{\lambda\in L}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}})(x)=\bigvee_{\lambda<A(x)}(\lambda\wedge\chi_{A_{\underset{\cdot}{\lambda}}}(x))=\bigvee_{\lambda<A(x)}\lambda=A(x).$$

故 $A=\bigvee\limits_{\lambda\in L}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$. 证毕.

推论5.7 设 L 是稠密的完备格,$A\in L^X$. 映射 $H:L\to\mathscr{P}(X)$适合:$\forall\ \lambda\in L$, $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda$,则

$$A=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda H(\lambda),$$

且 $\forall\ \lambda\in L$, $A_\lambda=\bigcap\limits_{\alpha<\lambda}H(\alpha)$, $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup\limits_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$.

证明 首先,由假设及定理5.6,有

$$A=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\leqslant\bigvee_{\lambda\in L}\lambda H(\lambda)\leqslant\bigvee_{\lambda\in L}\lambda A_\lambda=A.$$

故 $A=\bigvee\limits_{\lambda\in L}\lambda H(\lambda)$.

其次,因 L 是稠密的,由命题5.5,有

$$A_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}A_\alpha=A_\lambda.$$

故 $A_\lambda=\bigcap\limits_{\alpha<\lambda}H(\alpha)$.

同理可证 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup\limits_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$. 证毕.

现在我们转向建立 L-F 集的表现定理

定义5.4　设 X 为论域，L 为完备格，映射 $H: L \to \mathscr{P}(x)$适合：

(i)　若 $\lambda, \mu \in L, \lambda < \mu$，有 $H(\mu) \subseteq H(\lambda)$；

(ii)　若$\{\lambda_t | t \in T\} \subseteq L$，记 $\lambda = \bigvee_{t \in T} \lambda_t$，有

$$\bigcap_{t \in T} H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha)$$

则称 H 为 X 上的一个 **L-集合套**. X 上的 L-集合套全体记为 $\mathscr{H}_L(X)$.

注　如果完备格 L 具有性质：

$$\alpha < \bigvee_{t \in T} \lambda_t \ \Rightarrow\ \text{存在 } t_0 \in T, \alpha \leqslant \lambda_{t_0},$$

则易验证，定义5.4中的条件(i)蕴涵条件(ii). 例如 $L=[0,1]$便具有上述性质，见定义4.1(1).

例5.3　设 $A \in L^X$，命 $E, \underset{\cdot}{E}: L \to \mathscr{P}(X)$，$\forall\ \lambda \in L$，

$$E(\lambda) = A_\lambda, \quad \underset{\cdot}{E}(\lambda) = A_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

则 $E, \underset{\cdot}{E}$分别都是 X 上的 L-集合套. 且如 $H: L \to \mathscr{P}(X)$适合：$\forall\ \lambda \in L$, $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$，则 H 也是 X 上的 L-集合套.（自证）

类似于§4，在 $\mathscr{H}_L(X)$上可规定关系$\leqslant$及运算$\cap$，$\cup$如下.

定义5.5　设 L 为完备格.

(i)　对于 $H_1, H_2 \in \mathscr{H}_L(X)$，若$\forall\ \lambda \in L, H_1(\lambda) \subseteq H_2(\lambda)$，则称 H_2**包含** H_1，记作 $H_1 \leqslant H_2$.

(ii)　若$\{H_t | t \in T\} \subseteq \mathscr{H}_L(X)$，$\forall\ \lambda \in L$，命

$$(\bigcap_{t \in T} H_t)(\lambda) = \bigcap_{t \in T} H_t(\lambda)$$

及

$$\bigcup_{t \in T} H_t = \bigcap \{H \in \mathscr{H}_L(X) \mid \forall\ t \in T, H_t \leqslant H\}.$$

则易验证，$\bigcap_{t \in T} H_t \in \mathscr{H}_L(X)$，因而，$\bigcup_{t \in T} H_t \in \mathscr{H}_L(X)$，分别称为 L-集合套的**交**，**并**.

命题5.8　$\langle \mathscr{H}_L(X), \leqslant, \cup, \cap \rangle$是完备格，其中最大元，最小元分别是$\overline{X}, \overline{\varnothing}$：$\forall\ \lambda \in L$，

$$\overline{X}(\lambda) = X, \quad \overline{\varnothing}(\lambda) = \varnothing.$$

证明　显然$\langle \mathscr{H}_L(X), \leqslant \rangle$是偏序集，且$\overline{X}$是最大元．欲证$\mathscr{H}_L(X)$是完备格，只须验证：设$\{H_t | t \in T\} \subseteq \mathscr{H}_L(X)$，

$$\bigcap_{t \in T} H_t = \inf_{t \in T} H_t.$$

（此时，　$\bigcup_{t \in T} H_t = \sup_{t \in T} H_t$）事实上，因$\forall\ t \in T$，$\bigcap_{t \in T} H_t \leqslant H_t$，知$\bigcap_{t \in T} H_t$是$\{H_t | t \in T\}$的下界；又若$H \in \mathscr{H}_L(X)$是$\{H_t | t \in T\}$的下界，即$\forall\ t \in T$，$H \leqslant H_t$．于是$\forall\ \lambda \in L$，$H(\lambda) \subseteq H_t(\lambda)$，从而　$H(\lambda) \subseteq \bigcap_{t \in T} H_t(\lambda) = (\bigcap_{t \in T} H_t)(\lambda)$，$H \leqslant \bigcap_{t \in T} H_t$．故　$\bigcap_{t \in T} H_t = \inf_{t \in T} H_t$．　证毕．

定义5.6　设L是完备格，对于$H_1, H_2 \in \mathscr{H}_L(X)$，若$\forall\ \lambda \in L$，$\bigcap_{\alpha < \lambda} H_1(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_2(\alpha)$，则称$H_1$与$H_2$**等价**，记作$H_1 \sim H_2$．

显然，"$\sim$"是$\mathscr{H}_L(X)$上的等价关系．$\forall\ H \in \mathscr{H}_L(X)$，记$[H] = \{H^* \in \mathscr{H}_L(X) | H^* \sim H\}$为$H$所在的$L$-集合套类．命$\mathscr{H}_L(X)$对"$\sim$的商集为

$$\mathscr{H}_L^*(X) = \{[H] | H \in \mathscr{H}_L(X)\}.$$

为了在$H_L^*(X)$上引入格的运算，先作一些准备．

命题5.9　设L是稠密的完备格，$H \in \mathscr{H}_L(X)$．则

(i)．$\forall\ \lambda \in L$，

$$\bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha) = \bigcup_{\alpha > \lambda} \bigcap_{\beta < \alpha} H(\beta),$$

$$\bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \bigcup_{\beta > \alpha} H(\beta);$$

(ii)　$H^* \in [H]$当且仅当，$\forall\ \lambda \in L$，

$$\bigcup_{\alpha > \lambda} H^*(\alpha) = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha).$$

证明　(i) 一方面，因若$\beta < \alpha$时，$H(\alpha) \subseteq H(\beta)$，知$H(\alpha) \subseteq \bigcap_{\beta < \alpha} H(\beta)$，从而　$\bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha > \lambda} \bigcap_{\beta < \alpha} H(\beta)$．

另一方面，当 $\alpha>\lambda$ 时，由 L 的稠密性，存在 $\mu\in L$，使得 $\alpha>\mu>\lambda$. 于是

$$\bigcap_{\beta<\alpha} H(\beta)\subseteq H(\mu)\subseteq\bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha),$$

从而，$\bigcup\limits_{\alpha>\lambda}\bigcap\limits_{\beta<\alpha} H(\beta)\subseteq\bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$. 故 $\bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H(\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha>\lambda}\bigcap\limits_{\beta<\alpha} H(\beta)$.

同理可证 $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha<\lambda}\bigcup\limits_{\beta>\alpha} H(\beta)$.

(ii) 设 $H^*\in[H]$，即 $\forall\ \alpha\in L$，

$$\bigcap_{\beta<\alpha} H^*(\beta)=\bigcap_{\beta<\alpha} H(\beta).$$

于是，由 (i)，$\forall\ \lambda\in L$，

$$\bigcup_{\alpha>\lambda} H^*(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha} H^*(\beta)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha} H(\beta)=\bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha).$$

反之，若 $\forall\ \lambda\in L$，$\bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H^*(\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$，则由 (i)，

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} H^*(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcup_{\beta>\alpha} H^*(\beta)=\bigcap_{\alpha>\lambda}\bigcup_{\beta>\alpha} H(\beta)=\bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha).$$

故 $H^*\sim H$，即 $H^*\in[H]$. 证毕.

命题5.10 设 L 是稠密的完备格，$H\in\mathscr{H}_L(X)$，命 $E_H,\underset{\cdot}{E}_H:L\to\mathscr{P}(X)$，$\forall\ \lambda\in L$，

$$E_H(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha),\quad \underset{\cdot}{E}_H(\lambda)=\bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha).$$

则 (i) $E_H,\underset{\cdot}{E}_H\in\mathscr{H}_L(X)$，且 $\underset{\cdot}{E}_H\leqslant H\leqslant E_H$；

(ii) 若 $\lambda,\mu\in L$，$\lambda<\mu$，有 $E_H(\mu)\subseteq\underset{\cdot}{E}_H(\lambda)$；

(iii) $\forall\ \lambda\in L$，有

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} E_H(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\underset{\cdot}{E}_H(\alpha)=E_H(\lambda),$$

$$\bigcup_{\alpha>\lambda} E_H(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\underset{\cdot}{E}_H(\alpha)=\underset{\cdot}{E}_H(\lambda);$$

(iv) $E_H,\underset{\cdot}{E}_H\in[H]$，且 $E_H,\underset{\cdot}{E}_H$ 仅与 H 的 L-集合套类有关.

证明 (i) 首先，若 $\lambda,\mu\in L$，$\lambda<\mu$，则

$$E_H(\mu)=\bigcap_{\alpha<\mu} H(\alpha)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)=E_H(\lambda),$$

$$\underset{\cdot}{E}_H(\mu)=\bigcup_{\alpha>\mu} H(\alpha)\subseteq\bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha)=\underset{\cdot}{E}_H(\lambda).$$

其次，若 $\{\lambda_t \mid t\in T\}\subseteq L$，记 $\lambda=\bigvee_{t\in T}\lambda_t$，则

$$\begin{aligned}\bigcap_{t\in T}E_H(\lambda_t)&=\bigcap_{t\in T}\bigcap_{\beta<\lambda_t}H(\beta)\\&=\bigcap\{H(\beta)\mid\exists\ t\in T,\beta<\lambda_t\}\\&\subseteq\bigcap\{H(\beta)\mid\beta<\bigvee\{\beta\mid\exists\ t\in T,\beta<\lambda_t\}\}\\&=\bigcap\{H(\beta)\mid\beta<\lambda\}\qquad(\text{因 } L \text{ 是稠密的})\\&=E_H(\lambda)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}E_H(\alpha),\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\bigcap_{t\in T}\underset{\cdot}{E}_H(\lambda_t)&\subseteq\bigcap_{t\in T}H(\lambda_t)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)\\&=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcup_{\beta>\alpha}H(\beta)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\underset{\cdot}{E}_H(\alpha).\end{aligned}$$

故 $E_H,\underset{\cdot}{E}_H\in\mathscr{H}_L(X)$.

显然，$\forall\ \lambda\in L$，$\underset{\cdot}{E}_H(\lambda)\subseteq H(\lambda)\subseteq E_H(\lambda)$，即 $\underset{\cdot}{E}_H\leqslant H\leqslant E_H$.

(ii) 若 $\lambda<\mu$，由 L 的稠密性，存在 $\alpha\in L$，使得 $\lambda<\alpha<\mu$，于是，$E_H(\mu)=\bigcap_{\beta<\mu}H(\beta)\subseteq H(\alpha)\subseteq\bigcup_{\beta>\lambda}H(\beta)=\underset{\cdot}{E}_H(\lambda)$.

(iii) $\forall\ \lambda\in L$，有

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}E_H(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)=\bigcap_{\beta<\lambda}H(\beta)=E_H(\lambda).$$

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}\underset{\cdot}{E}_H(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcup_{\beta>\alpha}H(\beta)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)=E_H(\lambda).$$

同理可证第二式.

(iv) $\forall\ \lambda\in L$，由(iii)知

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}E_H(\alpha)=\underset{\cdot}{E}_H(\lambda)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha),$$

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}\underset{\cdot}{E}_H(\alpha)=E_H(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha).$$

故 $E_H\sim H,\underset{\cdot}{E}_H\sim H$，即 $E_H,\underset{\cdot}{E}_H\in[H]$.

显然，若 $H_1\sim H_2$，由定义5.6及命题5.9(ii)，有

$$E_{H_1}=E_{H_2},\underset{\cdot}{E}_{H_1}=\underset{\cdot}{E}_{H_2}.\qquad\text{证毕.}$$

命题5.11 设 L 是稠密的完备格，$H_t,H_t^*\in\mathscr{H}_L(X)$，$t\in T$，且 $\forall\ t\in T$，$H_t\sim H_t^*$. 则

(i) $\bigcap_{t\in T} H_t \sim \bigcap_{t\in T} H_t^*$；

(ii) $\bigcup_{t\in T} H_t \sim \bigcup_{t\in T} H_t^*$.

证明 (i) $\forall\ t\in T, \lambda\in L$，有 $\bigcap_{\alpha<\lambda} H_t(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda} H_t^*(\alpha)$. 于是，$\bigcap_{\alpha<\lambda}$

$$(\bigcap_{t\in T} H_t)(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\ \bigcap_{t\in T} H_t(\alpha)=\bigcap_{t\in T}\ \bigcap_{\alpha<\lambda} H_t(\alpha)$$

$$=\bigcap_{t\in T}\ \bigcap_{\alpha<\lambda} H_t^*(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\ \bigcap_{t\in T} H_t^*(\alpha)$$

$$=\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcap_{t\in T} H_t^*)(\alpha)$$

故 $\bigcap_{t\in T} H_t \sim \bigcap_{t\in T} H_t^*$

(ii) 记 $H=\sup H_t=\bigcup_{t\in T} H_t, H^*=\sup H_t^*=\bigcup_{t\in T} H_t^*$.

因$\forall\ t\in T, \lambda\in L$，有

$$H_t^*(\lambda)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda} H_t^*(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda} H_t(\alpha)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcup_{t\in T} H_t)(\alpha)=E_H(\lambda)$$，知

$H^*\leqslant E_H$，同理 $H\leqslant E_{H^*}$.

于是，由命题5.10(iii)，$\forall\ \lambda\in L$，

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda} E_{H^*}(\alpha)=E_{H^*}(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda} H^*(\alpha).$$

同理 $\bigcap_{\alpha<\lambda} H^*(\alpha)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$，故 $\bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda} H^*(\alpha)$，即

$$\bigcup_{t\in T} H_t \sim \bigcup_{t\in T} H_t^*.$$

证毕.

现在我们可以在 $\mathscr{H}_L^*(X)$上规定关系$\leqslant$及运算$\bigcap,\bigcup$如下.

定义5.7 设 L 是稠密的完备格.

(i) 对于$[H_1],[H_2]\in\mathscr{H}_L^*(X)$，若 $H_1\leqslant H_2$，则称$[H_2]$**包含**$[H_1]$，记作$[H_1]\leqslant[H_2]$

(ii) 若$\{[H_t]|t\in T\}\subseteq\mathscr{H}_L^*(X)$，命

$$\bigcap_{t\in T}[H_t]=[\bigcap_{t\in T} H_t],\quad \bigcup_{t\in T}[H_t]=[\bigcup_{t\in T} H_t].$$

根据命题5.11，易见 $\mathscr{H}_L^*(X)$上关系$\leqslant$，运算$\bigcap,\bigcup$与 L—集合类中代表的选取无关，即定义是一意的.

命题5.12 设 L 是稠密的完备格，则 $<\mathscr{H}_L^*(X),\leqslant,\bigcup,$

$\cap>$是完备格，其中最大元，最小元分别是$[\overline{X}]$，$[\overline{\Phi}]$.

证明类似于命题5.8，从略.

定理5.13(表现定理)　设 L 是稠密的完备格. 命 $f:\mathscr{H}_L{}^*(X)\to L^X$，　$\forall\ [H]\in\mathscr{H}_L{}^*(X)$，

$$f([H])=\bigvee_{\alpha\in L}\lambda H(\lambda),$$

其中$\forall\ x\in X,(\lambda H(\lambda))(x)=\lambda\wedge\chi_{H(\lambda)}(x)$.

则 f 是$<\mathscr{H}_L{}^*(X),\cup,\cap>$到$<L^X,\vee,\wedge>$上的格同构映射，且$\forall\ \alpha\in L,f([H])_\alpha=E_H(\alpha)$，　$f([H])_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\underset{\cdot}{E}_H(\alpha)$.

证明　分下面几步验证.

(1)　f 是 $\mathscr{H}_L{}^*(X)$到 L^X 的映射，即 f 的定义是一意的.

事实上，　$\forall\ [H]\in\mathscr{H}_L{}^*(X)$，　$\forall\ \lambda\in L$，因　$\underset{\cdot}{E}_H(\lambda)\subseteq H(\lambda)\subseteq E_H(\lambda)$，有$\bigvee\limits_{\lambda\in L}\lambda\ \underset{\cdot}{E}_H(\lambda)\leqslant f([H])\leqslant\bigvee\limits_{\lambda\in L}\lambda E_H(\lambda)$；反之，$\forall\ \lambda\in L\backslash\{0\}$，由 L 的稠密性，$\exists\ \alpha\in L,\alpha<\lambda$. 于是，依命题5.10(ii)，$E_H(\lambda)\subseteq\underset{\cdot}{E}_H(\alpha)$. 从而

$$\bigvee_{\lambda\in L}\lambda E_H(\lambda)=\bigvee_{\lambda\in L\backslash\{0\}}\lambda E_H(\lambda)\leqslant\bigvee_{\alpha\in L}\alpha\underset{\cdot}{E}_H(\alpha),$$

故　$f([H])=\bigvee\limits_{\lambda\in L}\lambda E_H(\lambda)=\bigvee\limits_{\lambda\in L}\lambda\ \underset{\cdot}{E}_H(\lambda)$. 根据命题5.10(iv)，$f([H])$由$[H]$唯一确定.

(2)　$\forall\ \alpha\in L,A_\alpha=E_H(\alpha),A_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\underset{\cdot}{E}_H(\alpha)$，其中 $A=f([H])$.

事实上，$\forall\ x\in E_H(\alpha)$，由(1)知

$$A(x)=\bigvee_{\lambda\in L}(\lambda\wedge\chi_{E_H(\lambda)}(x))\geqslant\alpha\wedge\chi_{E_H(\alpha)}(x)=\alpha,$$

即 $x\in A_\alpha$；反之，若 $x\in A_\alpha$，即

$$A(x)=\bigvee_{\lambda\in L}(\lambda\wedge\chi_{E_H(\lambda)}(x))=\vee\ \{\lambda|\lambda\in L,x\in E_H(\lambda)\}\geqslant\alpha,$$

于是，存在$\{\lambda_t|t\in T\}\subseteq L$，$\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t=A(x)$，且　$\forall\ t\in T,x\in E_H(\lambda_t)$. 因 $E_H\in\mathscr{H}_L(X)$知，

$$x\in\bigcap_{t\in T}E_H(\lambda_t)\subseteq\bigcap_{\lambda<A(x)}E_H(\lambda)=E_H(A(x))\subseteq E_H(\alpha).$$

故 $A_a=E_H(a)$.

类似可证 $A_{\underset{\cdot}{a}}=\underset{\cdot}{E}_H(a)$.

(3) f 是单射.

事实上,设$[H_1],[H_2]\in\mathscr{H}_{L^*}(X)$,$f([H_1])=A=f([H_2])$,则由(2)知,$\forall\ a\in L$,$E_{H_1}(a)=A_a=E_{H_2}(a)$,从而 $H_1\sim H_2$. 故$[H_1]=[H_2]$.

(4) f 是满射.

事实上,$\forall\ A\in L^X$,命 $H_A:L\to\mathscr{P}(X)$,$\forall\ \lambda\in L$,

$$H_A(\lambda)=A_\lambda.$$

由例5.3,$H_A\in\mathscr{H}_L(X)$,且依定理5.6,

$$f([H_A])=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda A_\lambda=A.$$

(5) f 是完备格之间的同态,即 f 保持格上的并、交运算.

首先,设$\{[H_t]\mid t\in T\}\subseteq\mathscr{H}_{L^*}(X)$,记

$$A_t=f([H_t])\in L^X,t\in T,A=f([\bigcap_{t\in T}H_t]).$$

于是,由(2)及命题5.3,$\forall\ \lambda\in L$,

$$(\bigwedge_{t\in T}A_t)_\lambda=\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda=\bigcap_{t\in T}\bigcap_{a<\lambda}H_t(a)=\bigcap_{a<\lambda}(\bigcap_{t\in T}H_t)(a)=A_\lambda.$$

故 $f([\bigcap_{t\in T}H_t])=A=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda A_\lambda=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda(\bigwedge_{\lambda\in T}A_t)_\lambda=\bigwedge_{t\in T}A_t=\bigwedge_{t\in T}f([H_t])$,

即 f 是保交的.

其次,若$[H_1],[H_2]\in\mathscr{H}_{L^*}(X)$,由 f 的保交性质及 f 是单射等,有

$$\begin{aligned}[H_1]\leqslant[H_2]&\Leftrightarrow[H_1]\cap[H_2]=[H_1]\\&\Leftrightarrow f([H_1])\wedge f([H_2])=f([H_1])\\&\Leftrightarrow f([H_1])\leqslant f([H_2])\end{aligned}$$

最后,设$\{[H_t]\mid t\in T\}\subseteq\mathscr{H}_{L^*}(X)$,一方面$\forall\ t\in T$,

$$f([H_t])\leqslant f(\bigcup_{t\in T}[H_t]),$$

从而　$\bigvee_{t\in T} f([H_t]) \leqslant f(\bigcup_{t\in T}[H_t])$；

另一方面，由 f 是满射，存在 $[H]\in \mathscr{H}_L{}^*(X)$，使得

$$f([H]) = \bigvee_{t\in T} f([H_t]),$$

于是 $f(\bigcup_{t\in T}[H_t]) = f(\bigcap\{[H]\in \mathscr{H}_L{}^*(X) \mid \forall\, t\in T, [H_t]\leqslant [H]\})$

$$= \bigcap\{f([H]) \mid \forall\, t\in T, [H_t]\leqslant [H]\}$$

$$= \bigcap\{f([H]) \mid \forall\, t\in T, f([H_t])\leqslant f([H])\}.$$

因为　$\forall\, t\in T, f([H_t])\leqslant f([H])$，知

$$f(\bigcup_{t\in T}[H_t]) \leqslant f([H]) = \bigvee_{t\in T} f([H_t]).$$

故　$\bigvee_{t\in T} f([H_t]) = f(\bigcup_{t\in T}[H_t])$，即 f 是保并的.

总之，$<\mathscr{H}_L{}^*(X), \cup, \cap> \overset{f}{\cong} <L^X, \vee, \wedge>$.　　　证毕.

§6　F 点

本节介绍一类特殊的 F 集——F 点，它不仅提供了一般 F 集的一种等价描述方式，而且借助于 F 点与 F 集的"重于"这种本质的邻属关系，对于 F 集论，F 拓扑学(参见附录)的研究是很大的推动.

定义6.1　设 X 为论域，$\forall\, x\in X, \lambda\in(0,1]$. 命 $x_\lambda: X\to[0,1]$，使得　$\forall\, y\in X$，

$$x_\lambda(y) = \begin{cases} \lambda, & \text{当 } y = x, \\ 0, & \text{当 } y \neq x, \end{cases}$$

则称 x_λ 为 X 的**模糊点**，简称 **F 点**，其中 x 称为 x_λ 的**承点**，λ 称为 x_λ 的**高**.

设 L 是完备格，类似可定义 X 的 LF 点 $x_\lambda\in L^X$：

$x_\lambda(x)=\lambda\in L(\lambda\neq 0)$，$x_\lambda(y)=0(y\neq x)$.

显然，X 的通常点（作为单点集与其特征函数等同）是 X 的 F 点.

定义6.2　设 $A\in\mathscr{F}(X)$，称 F 点 x_λ **属于** F 集 A，如果 $\lambda\leqslant A(x)$（即 $x_\lambda\leqslant A$）记为 $x_\lambda\in A$.

命题6.1　设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$A\neq\varnothing$，则

$$A=\bigvee_{x_\lambda\in A}x_\lambda.$$

证明是直接的（从略）.

注　命题表明，与通常集合论有类似之处，非空 F 集可认为是由一些 F 点组成，且若 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，有

$A\leqslant B\Leftrightarrow\forall$ F 点 x_λ，$x_\lambda\in A$，则 $x_\lambda\in B$；

$A=B\Leftrightarrow\forall$ F 点 x_λ，$x_\lambda\in A$ 当且仅当 $x_\lambda\in B$；

$x_\lambda\in A\vee B\Leftrightarrow x_\lambda\in A$ 或 $x_\lambda\in B$；

$x_\lambda\in A\wedge B\Leftrightarrow x_\lambda\in A$ 且 $x_\lambda\in B$.

但需注意，F 点与 F 集的"属于"关系与通常集合论中点属于集合有很大差别：

（1）　设 $A_t\in\mathscr{F}(X)$，$t\in T$，$x_\lambda\in\bigvee_{t\in T}A_t$　一般推不出存在 $t_0\in T$，使得 $x_\lambda\in A_{t_0}$，即"择一原则"（参见定义6.5）不成立. 例如对 $n=1,2,\cdots$，命 $A_n\in\mathscr{F}(X)$，$\forall$ $x\in X$，$A_n(x)=1-\dfrac{1}{n}$，则对 $x\in X$，F 点 $x=x_1\in\bigvee_{n=1,2,\cdots}A_n$，但$\forall$ n，$x_1\overline{\in}A_n$.

（2）　设 $A\in\mathscr{F}(X)$，F 点 $x_\lambda\overline{\in}A$ 一般推不出 $x_\lambda\in A'$（$\mathscr{F}(X)$中补余律不成立）. 例如 $A\in\mathscr{F}(X)$，$\forall$ $x\in X$，$A(x)=\dfrac{1}{2}$，则 $A=A'$.

（3）　F 点作为特殊的 F 集不再是"不可分的基本元"，例如 $x_\lambda=\bigvee_{0<\mu\leqslant\lambda\alpha}x_\mu$，$F$ 点之间可以有严格的包含关系. F 点与 F 集统一于

X 到[0,1]的映射形式.

现在我们转向介绍 F 点与 F 集的重要邻属关系——重于关系.从一定意义上说,"重于"比"属于"更为自然,特别是当值格为一般的具有逆序对合对应的完全分配格(即 F 格)的情形.

定义6.4 设 X 为论域,$A\in\mathscr{F}(X)$,x_λ 为 X 的 F 点.称 x_λ **重于** A,如果 $\lambda+A(x)>1$(即 $A(x)>1-\lambda$),记为 $x_\lambda qA$,否则记为 $x_\lambda \bar{q}A$.

若 L 是 F 格,X 的 LF 点 x_λ 称为重于 LF 集 A,如果 $A(x)\not\leqslant\lambda'$($\lambda$ 在 L 中的补元).

易见,若 $x=x_1$,A 分别是 X 的通常点($\lambda=1$),通常子集,则 $xqA\Leftrightarrow x\in A$.换言之,"重于"关系是通常点对集合的"属于"关系的推广.

定理6.3 设 L 是 F 格,$A_t\in L^X$,$t\in T$,则 X 的 LF 点 $x_\lambda q(\bigvee\limits_{t\in T}A_t)\Leftrightarrow\exists\ t_0\in T$,$x_\lambda qA_{t_0}$.

证明 "$\Leftarrow$" 因 $x_\lambda qA_{t_0}$,$t_0\in T$,知

$$(\bigvee_{t\in T}A_t)(x)=\bigvee_{t\in T}A_t(x)\geqslant A_{t_0}(x)\not\leqslant\lambda',$$

故 $(\bigvee\limits_{t\in T}A_t)(x)\not\leqslant\lambda'$,即 $x_\lambda q(\bigvee\limits_{t\in T}A_t)$.

"$\Rightarrow$" 若 $\forall\ t\in T$,$x_\lambda\bar{q}A_t$.即 $A_t(x)\leqslant\lambda'$,从而

$\bigvee\limits_{t\in T}A_t(x)\leqslant\lambda'$.故 $x_\lambda\bar{q}(\bigvee\limits_{t\in T}A_t)$. 证毕.

注:定理表明,重于关系适合"择一原则",这是同 F 点与 F 集的属于关系(定义6.2)有本质区别之处.

下面设 $\lhd$ 是 LF 点与 LF 集的某种邻属关系:

当 x_λ 邻属于 $A\in L^X$,记作 $x_\lambda\lhd A$,否则记为 $x_\lambda\ntriangleleft A$.例如"$\in$"($x_\lambda\in A\Leftrightarrow\lambda\leqslant A(x)$),"$q$"($x_\lambda qA\Leftrightarrow A(x)\not\leqslant\lambda'$)都是邻属关系.

定义6.5 设 L 是 F 格,X 的 LF 点与 LF 集的邻属关系"$\lhd$"称为**正则的**,如果它适合:

Ⅰ.(扩充原则) 对任意 F 格 L,当 $x=x_1$,A 分别是 X 的通常点,通常子集时,则 $x\lhd A$ 当且仅当 $x\in A$,即 $\lhd$ 是通常集合中属于关系的推广;

Ⅱ.(值域决定原则) 对任意 F 格 L,$\forall x\in X,\lambda\in L(\lambda\neq 0)$,$LF$ 点 x_λ 与 LF 集 A 是否具有邻属关系 $\lhd$,完全由 λ 与 $A(x)$ 借助于 L 上的偏序关系 $\leqslant$、逆序对合对应"$'$"等给出的普遍适用的关系式(及它们的联立式)来确定.例如 $\lambda\leqslant A(x)$,$A(x)\leqslant\lambda$,$\lambda\not\leqslant A(x)$,$\lambda\leqslant(A(x))'$,$A(x)\not\leqslant\lambda'$ 及其联立式等;

Ⅲ.(最大元与最小元原则) 对任意 LF 点 x_λ,有

$$x_\lambda\lhd X,\quad x_\lambda\not\lhd\Phi;$$

Ⅳ.(择一原则) 设 $A_t\in L^X,t\in T$,LF 点 $x_\lambda\lhd\bigvee_{t\in T}A_t$,则 $\exists\ t_0\in T$,$x_\lambda\lhd A_{t_0}$.

下述结果显然是重要的.

定理6.4 "重于"关系 q 是 LF 点与 LF 集(L 是任意 F 格)的唯一的正则邻属关系.

证明从略.读者可参见《数学年刊》1984,5:461—466.

F 点与 F 集的重于关系可以推广到一般 LF 集之间的相重关系.

定义6.6 设 L 为 F 格,$A,B\in L^X$.如果存在 $x\in X$,$A(x)\not\leqslant B'(x)$,则称 A 与 B **相重**,记为 AqB.此时也称 A 与 B 在 x 处相重.

命题6.5 设 L 为 F 格.

(i) 若 A,B 是 X 的通常子集,则

$$AqB\Leftrightarrow A\cap B\neq\Phi;$$

(ii) 若 $A\in L^X$,则 $A\bar{q}A'$,即 A 与$'$ 不相重.

证明是直接的.

注 命题表明 LF 集的"相重"关系是通常子集的"相交"关系

的推广.

§7　F 集的公理化定义

本节首先引入基本 F 点的概念，并把它作为原始概念，给出 F 集合的公理化定义.

设　$\underset{\sim}{X}=X\times(0,1]$. $\underset{\sim}{X}$ 中的元记作 (x,λ) 且称为 X 的**基本 F 点**，其中 $x\in X$ 为 (x,λ) 的支点，$\lambda\in(0,1]$ 为 (x,λ) 的值或水平. 在 $\underset{\sim}{X}$ 上规定关系"$\leqslant$". 设 $(x,\lambda),(y,\mu)\in\underset{\sim}{X}$,

$$(y,\mu)\leqslant(x,\lambda)\Leftrightarrow y=x,\mu\leqslant\lambda.$$

易见，$\langle\underset{\sim}{X},\leqslant\rangle$ 是一个偏序集.

定义7.1　设 $A\subseteq\underset{\sim}{X}$ 适合 $A=\varnothing$ 或者满足下列条件

(1)　$(x,\lambda)\in A\Rightarrow\forall\ \mu\in(0,\lambda],(x,\mu)\in A$,

(2)　$\{(x,\lambda_t],t\in T\}\subseteq A$ 且 $\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t=\lambda\Rightarrow(x,\lambda)\in A$.

称 A 为 X 的 **F 集合**（参见图1.5），X 的 F 集合全体记作 $\mathscr{F}(X)$.

显然，$\mathscr{F}(X)\subseteq\mathscr{P}(\underset{\sim}{X})$.

对于任何 $x\in X$，记 $A(x)=\bigvee\{x\mid(x,\lambda)\in A\}$（约定 $\bigvee\varnothing=0$），称 $A(x)$ 为 x 对于 F 集 A 的**隶属度**. 显然 $A(\cdot):X\to[0,1]$ 为 X 到 $[0,1]$ 的映射，且称 $A(\cdot)$ 为 F 集的隶属函数. 这样一

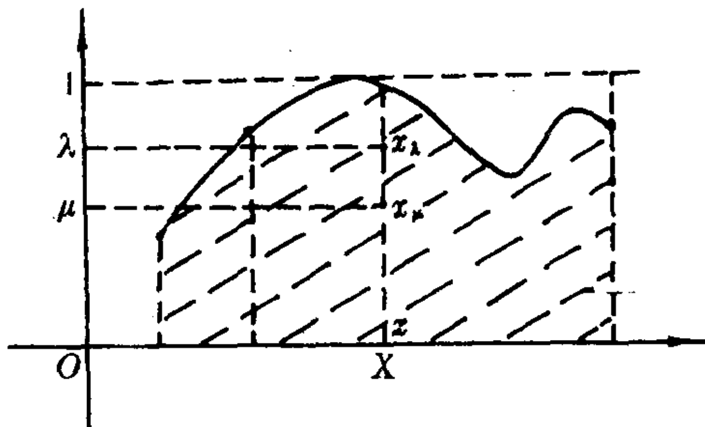


图1.5

来，A（F 集）与 $A(\cdot)$（隶属函数）之间的关系，正如经典集合论中集与（集的）特征函数之间的关系，而且 $A=\{(x,\lambda)\in \underset{\sim}{X} \mid \lambda\leqslant A(x)\}$. 特别，$F$ 点 $x_\lambda=\{(x,\mu)\mid \mu\in(0,\lambda]\}$. 值得注意的是，$F$ 点 x_λ 正如 §6中所说，是一个特殊的 F 集即支集为单点集$\{x\}$的 F 集，基本 F 点(x,λ)是以 x 为支点，λ 为其值的元序偶，是 $\underset{\sim}{X}$ 的元素. 两者之间的关系正如经典集合论中单元素集$\{x\}$与元素 x 之间的关系，这是两个本质不同的概念.

如果把原来定义的 F 集全体记作$[0,1]^X=\{A\mid A:X\to[0,1]\}$不难验证，$[0,1]^X$ 与 $\mathscr{F}(X)$存在一一对应关系（见后面的定理7.1）.

如果 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，$\forall\ (x,\lambda)\in A\Rightarrow(x,\lambda)\in B$，称 A 为 B 的 F 子集，记作 $A\leqslant B$ 或 $B\geqslant A$. 如果$(x,\lambda)\in A\Leftrightarrow(x,\lambda)\in B$，称 A 与 B 相等，记作 $A=B$. 不难验证，$\langle\mathscr{F}(X),\leqslant\rangle$为偏序集.

现在定义 $\mathscr{F}(X)$上的运算.

设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，$\{A_n,n\geqslant1\}\subseteq\mathscr{F}(X)$，$*\in\{\vee,\wedge,\hat{+},\hat{\cdot},\oplus,\odot\}$，界定

(1) $A*B=\{(x,\lambda)\in \underset{\sim}{X}\mid \lambda\leqslant A(x)*B(x)\}$，

(2) $A'=\{(x,\lambda)\in \underset{\sim}{X}\mid \lambda\leqslant 1-A(x)=[A(x)]'\}$，

(3) $\overline{\lim_n}A_n=\{(x,\lambda)\in \underset{\sim}{X}\mid \lambda\leqslant \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty}\bigvee\limits_{k=n}^{\infty}A_k(x)=\overline{\lim_n}A_n(x)\}$，

$\underline{\lim_n}A_n=\{(x,\lambda)\in \underset{\sim}{X}\mid \lambda\leqslant \bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\bigwedge\limits_{k=n}^{\infty}A_k(x)=\underline{\lim_n}A_n(x)\}$.

如果 $\underline{\lim_n}A_n=\overline{\lim_n}A_n=A$，称$\{A_n,n\geqslant1\}$收敛于（极限）$A$，记作$\lim\limits_n A_n=A$.

(4) $\mathop{*}\limits_{n=1}^{k}A_n=A_1*A_2*\cdots*A_k\triangleq(A_1*\cdots*A_{k-1})*A_k$.

(5) $\mathop{*}\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\lim\limits_k \mathop{*}\limits_{n=1}^{k}A_n$.

如果 $\{A_t, t\in T\}\subseteq\mathscr{F}(X)$. 界定

(6) $\bigvee_{t\in T} A_t=\{(x,\lambda)\in \underset{\sim}{X}\mid \lambda\leqslant \bigvee_{t\in T} A_t(x)\}$.

(7) $\bigwedge_{t\in T} A_t=\{(x,\lambda)\in \underset{\sim}{X}\mid \lambda\leqslant \bigwedge_{t\in T} A_t(x)\}$.

定理7.1 $\langle\mathscr{F}(X),\leqslant,\vee,\wedge,'\rangle$与$\langle[0,1]^X,\leqslant,\vee,\wedge,'\rangle$是同构的 F 格.

证明 首先 $\mathscr{F}(X)$与$[0,1]^X$ 均为完备格. 命映射

$$f:\mathscr{F}(X)\to[0,1]^X,\quad A\mapsto f(A).$$

其中 $\forall\, x\in X,\quad f(A)(x)=\vee\{\lambda\mid(x,\lambda)\in A\}$,

(约定 $\vee\Phi=0$). 以下分五步证明.

(1) f 是单射.

设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$且 $f(A)=f(B)$. 则 $\forall\,(x,\lambda)\in A$ 有

$$\lambda\leqslant A(x)=\vee\{\lambda\mid(x,\lambda)\in A)\}=f(A)(x)=f(B)(x)$$
$$=\vee\{\lambda\mid(x,\lambda)\in B\}=B(x).$$

于是, $(x,\lambda)\in B$. 从而, $A\subseteq B$. 同理 $B\subseteq A$. 所以 $A=B$.

(2) f 是满射.

设 $\underset{\sim}{A}\in[0,1]^X$, 即 $\underset{\sim}{A}:X\to[0,1]$. 命

$$A=\{(x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}\mid\lambda\leqslant\underset{\sim}{A}(x)\}\subseteq\underset{\sim}{X}.$$

易见, $A\in\mathscr{F}(X)$, 且$\forall\, x\in X$, 有

$$f(A)(x)=\vee\{\lambda\mid(x,\lambda)\in A\}=\underset{\sim}{A}(x).$$

故 $f(A)=\underset{\sim}{A}$.

(3) f 是完备格之间的同态, 即 f 保持格上的并、交运算.

设 $\{A_t,t\in T\}\subseteq\mathscr{F}(X)$, 则 $\forall\, x\in X$,

$$f(\bigvee_{t\in T}A_t)(x)=\vee\{\lambda\mid(x,\lambda)\in\bigvee_{t\in T}A_t\}$$
$$=\vee\{\lambda\mid 0<\lambda\leqslant\bigvee_{t\in T}A_t(x)\}$$
$$=\bigvee_{t\in T}A_t(x)=\bigvee_{t\in T}(\vee\{\lambda\mid(x,\lambda)\in A_t\})$$

$$=(\bigvee_{t\in T} f(A_t))(x),$$

$$f(\bigwedge_{t\in T} A_t)(x)=\bigvee\{\lambda\mid(x,\lambda)\in\bigwedge_{t\in T} A_t\}$$

$$=\bigvee\{\lambda\mid 0<\lambda\leqslant\bigwedge_{t\in T} A_t(x)\}$$

$$=\bigwedge_{t\in T} A_t(x)=\bigwedge_{t\in T}(\bigvee\{\lambda\mid(x,\lambda)\in A_t\})$$

$$=(\bigwedge_{t\in T} f(A_t))(x).$$

(4) $\langle\mathscr{F}(X),\leqslant,\vee,\wedge\rangle\overset{f}{\simeq}\langle[0,1]^X,\leqslant,\vee,\wedge\rangle$，这由(1)，(2)，(3)即得. 再由$\langle[0,1]^X,\leqslant,\vee,\wedge\rangle$是完全分配格(见第0章命题3.10)知$\langle\mathscr{F}(X),\leqslant,\vee,\wedge\rangle$是完全分配格.

(5) $f(A')(x)=\bigvee\{\lambda\mid(x,\lambda)\in A'\}=A'(x)=1-A(x)$

$$=1-f(A)(x)=(f(A))'(x).$$

由于$\langle[0,1]^X,\leqslant,\vee,\wedge,'\rangle$是 F 格，则$\langle\mathscr{F}(X),\leqslant,\vee,\wedge,'\rangle$是与之同构的 F 格. 证毕.

定义7.2 设$(x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}$，$A\in\mathscr{F}(X)$. 称$(x,\lambda)$重于 A，记作$(x,\lambda)qA$是指 $\lambda\nleqslant(A(x))'$（或等价地 $\lambda+A(x)>1$）. 否则称(x,λ)不重于 A，记作$(x,\lambda)\bar{q}A$.

定理7.2 $(x,\lambda)\bar{q}A$ 当且仅当$(x,\lambda)\in A'$.

证明 $(x,\lambda)\bar{q}A\Leftrightarrow\lambda\leqslant(A(x))'\Leftrightarrow\lambda\leqslant A'(x)\Leftrightarrow(x,\lambda)\in A'$. 证毕.

推论 如果 $A\in\mathscr{F}(X)$，则 $A'=\{(x,\lambda)\mid(x,\lambda)\bar{q}A\}$.

定义7.3 (1) 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$\lambda\in(0,1]$，记 $A_\lambda=\{x\mid(x,\lambda)\in A\}$且称为 A 的 λ **截集**. 称 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\mu>\lambda} A_\mu$，为 A 的 λ **强截集**.

(2) 设 $B\in\mathscr{P}(X)$，$\lambda\in(0,1]$，记 $\lambda B=\{(x,\delta)\mid x\in B,\delta\in(0,\lambda]\}$，且称为 λ 与 B 的**积**. 显然 $\lambda B\in\mathscr{F}(X)$.

定理7.3 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，则

(1) $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$x\in A_\lambda$ 当且仅当 $A(x)\geqslant\lambda$.

(2) $\forall\ \lambda\in[0,1), x\in A_{\dot{\lambda}}$当且仅当 $A(x)>\lambda$.

(3) $A=\bigvee\limits_{\lambda\in(0,1]}\lambda A_{\lambda}=\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\dot{\lambda}}$

证明 (1) $x\in A_{\lambda}\Leftrightarrow(x,\lambda)\in A\Leftrightarrow\lambda\leqslant A(x)$.

(2) $x\in A_{\dot{\lambda}}\Leftrightarrow x\in\bigcup\limits_{\mu>\lambda}A_{\mu}\Leftrightarrow\exists\ \mu_0>\lambda, x\in A_{\mu_0}$

$\Leftrightarrow\exists\ \mu_0>\lambda, A(x)\geqslant\mu_0$,

$\Leftrightarrow A(x)>\lambda$.

(3) $(\bigvee\limits_{\lambda\in(0,1]}\lambda A_{\lambda})(x)=\bigvee\limits_{\lambda\in(0,1]}(\lambda A_{\lambda})(x)=\bigvee\{\lambda\mid\lambda\in(0,1], x\in A_{\lambda}\}=\bigvee\{\lambda\mid(x,\lambda)\in A\}=A(x)$.

故 $A=\bigvee\limits_{\lambda\in(0,1]}\lambda A_{\lambda}$. 同理可证 $A=\bigvee\limits_{\lambda\in(0,1]}\lambda A_{\dot{\lambda}}$ 证毕.

定理7.4就是 F 集合的分解定理Ⅰ,Ⅱ,同样可以得到相应的分解定理Ⅲ以及在本节定义的 F 集合框架下相应的表现定理.因为在形式上和证明方法的步骤上与§4中相应的定理基本相同,就不再赘述了.值得指出的是§4中集合套、集轮的框架阐明了 F 集合既是普通集合的推广,又有严格的数学理论基础,完成了由 $\langle\mathscr{P}(X),\cup,\cap,'\rangle$ 到 $\langle[0,1]^X,\vee,\wedge,'\rangle$ 的扩张,进一步给出了 F 集的定义.但仅限于三种运算 $\vee,\wedge,'$.如果要讨论 F 集合的其他运算,按§4中 F 集合定义(定义4.6)就不适合了.因此定义4.6给出的 F 集的框架,虽然在理论上是严格的,但不具有普遍的意义.

本节给出的公理化定义,不仅理论上是严格的,而且在其理论框架的普遍性方面,也超过目前任何一种框架.比如对于在[0,1]中有定义的任何一种运算 $*$ 在 $\mathscr{F}(X)$ 中也有定义,当然在 $[0,1]^X$ 也可定义运算 $*$.而且可以证明:$\langle\mathscr{F}(X),*\rangle$ 与 $\langle[0,1]^X,*\rangle$ 是同构的代数系统.

类似地,设 L 为一个 F 格,(至少是完备格,)$L_0=\{\lambda\in L\mid\lambda>0\}$,$X$ 为论域,令

$$X_{(L)} = X \times L_0 = \{(x,\lambda) | \lambda \in X, \lambda \in L_0\}.$$

$\mathscr{F}_L(X) = \{A \subseteq X_{(L)} | A = \varnothing$ 或适合定义7.1的条件(1)与(2)$\}$

称 $X_{(L)}$ 中的元素为基本 LF 点，$\mathscr{F}_L(X)$ 中的元素为 X 的 $L-F$ 集，而且类似于 $\underset{\sim}{X}$ 与 $\mathscr{F}(X)$ 的情形，在 $X_{(L)}$ 上定义偏序关系≤；在 $\mathscr{F}_L(X)$ 中定义偏序关系≤与∨，∧，′运算. 而且同样有

定理7.5 (1)若 L 是完备格，则 $\langle \mathscr{F}_L(X), \leqslant, \vee, \wedge \rangle$ 与 $\langle L^X, \leqslant, \vee, \wedge \rangle$ 是同构的完备格.

(2) 若 L 是软代数，则 $\langle \mathscr{F}_L(X), \leqslant, \vee, \wedge, ' \rangle$ 与 $\langle L^X, \leqslant, \vee, \wedge, ' \rangle$ 是同构的软代数.

(3) 若 L 是 F 格，则 $\langle \mathscr{F}_L(X), \leqslant, \vee, \wedge, ' \rangle$ 与 $\langle L^X, \leqslant, \vee, \wedge, ' \rangle$ 是同构的 F 格.

到现在为止，本章已先后给出了 F 集合的三种形式不同的定义，它们在不同场合，各有其方便之处. 从所给出框架结构的理论严密性和概念的普遍性方面，本节的公理化定义(定义7.1)及其框架，是 F 集合论的公理化结构的基础. 其他关于 F 集合的定义形式都可以作为它的特殊情形或一定意义下的等价形式，统一在此定义的框架之内. 因此，在本书以后各章的叙述中，如无特殊需要都一律不加任何说明地采用其中一种或交替采用二种或三种 F 集合定义的模式下的概念和记号.

第二章 模糊关系与模糊矩阵

模糊关系是集合间的普通关系的推广，它为描述和处理模糊现象提供了一些有效的方法，在模糊集合论及其应用中占有相当重要的地位．当论域是有限集时，模糊关系可用模糊矩阵来表达，而模糊矩阵的理论已在电路网络，医疗诊断，模糊自动机以及模糊系统的理论和应用中起着显著的作用．

本章内容包括：模糊关系的基本概念，模糊关系的合成，模糊关系的常见类型，模糊矩阵及其运算，模糊矩阵的类型，秩，正则性及广义逆矩阵，模糊关系方程的可解性和求解方法，最后简单介绍模糊图．

§1 F关系的概念

从第0章§2看到，设 X,Y 是非空集合，则 X 到 Y 的（如 $X=Y$，称为 X 上的）一个二元关系 R 即是笛卡儿积 $X\times Y$ 的子集，换言之，$\forall\ (x,y)\in X\times Y,(x,y)\in R$ 当且仅当 x 与 y 具有关系 R．因而论域 X,Y 中的元素要么有关系 R，要么无关系 R，二者必居其一且只

居其一，这是一种清晰的普通关系. 例如男人集合中的"弟兄"关系，"父子"关系，全体实数集 $X=(-\infty,\infty)$ 上的"小于"关系等.

然而，客观事物之间还存在大量具有模糊性的关系，即不是要么具有，要么不具有，而是在一定程度上密切或疏远的情形. 如外貌是否"相像"，性格是否"相似"，全体实数集 X 上的"远小于"关系等. 这些是模糊关系.

定义 1.1 设 X,Y 为论域，笛卡儿积 $X\times Y$ 上的一个 F 集 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$（即 $R:X\times Y\to[0,1]$）称为 X 到 Y 的一个（二元）**模糊关系**，简称 F **关系**.

此时，$\forall\ x\in X,y\in Y$，隶属度 $R(x,y)$ 表示 x 与 y 的相关程度.

特别，当 $X=Y$，F 关系 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$ 称为 X 上的（二元）F 关系.

一般，若 $L=\langle L,\leqslant,\vee,\wedge,\rangle$ 是完备格，则 $R\in L^{X\times Y}$ 称为 X 到 Y 的 $L-F$ 关系.

如 $L=\{0,1\}$，$L-F$ 关系即为普通关系. 可见，F 关系是普通关系的推广.

例 1.1 设 $X=(-\infty,\infty)$ 为全体实数集，X 上的"远小于"关系 R（常记为 $\ll$）可规定为：$\forall\ x,y\in X$，

$$R(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\geqslant y,\\ \left[1+\dfrac{100}{(y-x)^2}\right]^{-1}, & \text{当 } x<y.\end{cases}$$

则 R 是 X 上的 F 关系. 例如

$R(0,1)=0.010, R(10,20)=0.5,$

$R(100,400)=0.999.$

例 1.2 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 表示某五人的集合，$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,\}$ 代表中国四部古典文学名著：西游记，水浒传，三国演

义，红楼梦的集合．X 到 Y 的“熟悉”关系 R 是一个 F 关系，如下表所示：

$R(x,y)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.9	0.4	0.8	0.5
x_2	0.1	0.6	0.8	0.2
x_3	0.7	0.8	0.1	0.3
x_4	0.9	0.8	0.9	0.8
x_5	0.3	0.2	0.1	0.9

由此可见，x_4 对四部著作都相当熟悉，尤其是对西游记，三国演义；x_2 对西游记相当不熟悉，而 x_5 在四部著作中对红楼梦要熟悉得多．

注　定义 1.1 所述二元 F 关系可以自然推广为 n 元 F 关系：设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是 n 个非空集合，则

$$R:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to[0,1]$$

称为 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 上的 **n 元 F 关系**．

根据定义 1.1，X 到 Y 的 F 关系 R 即是 $X\times Y$ 的 F 子集，因此，按照 F 集的并，交，补运算便定义了 F 关系的并，交，补运算：

设 $R,S,R_t\in\mathscr{F}(X\times Y),t\in T$，则

$$R\leqslant S\quad\Leftrightarrow\quad\forall\ (x,y)\in X\times Y,\quad R(x,y)\leqslant S(x,y),$$

$$R=S\quad\Leftrightarrow\quad\forall\ (x,y)\in X\times Y,\quad R(x,y)=S(x,y),$$

及 $\forall\ (x,y)\in X\times Y$，

$$(\bigvee_{t\in T}R_t)(x,y)=\sup_{t\in T}R_t(x,y),$$

$$(\bigwedge_{t\in T}R_t)(x,y)=\inf_{t\in T}R_t(x,y),$$

$R^c(x,y)=1-R(x,y)$（R^c 是 R 的**补关系**）．于是由第一章的定理 2.1，有

命题 1.1　设 $R,S,P,R_t\in\mathscr{F}(X,Y),t\in T$，则

(1) $R\vee R=R, R\wedge R=R$;

(2) $R\vee S=S\vee R, R\wedge S=S\wedge R$;

(3) $(R\vee S)\vee P=R\vee(S\vee P)$,

$(R\wedge S)\wedge P=R\wedge(S\wedge P)$;

(4) $(R\vee S)\wedge R=R, (R\wedge S)\vee R=R$;

(5) $R\wedge(\bigvee_{t\in T}R_t)=\bigvee_{t\in T}(R\wedge R_t)$,

$R\vee(\bigwedge_{t\in T}R_t)=\bigwedge_{t\in T}(R\vee R_t)$;

(6) $R\vee I=I, R\wedge I=R$,

$R\vee O=R, R\wedge O=O$,

其中 $I,O\in\mathscr{F}(X\times Y)$, $\forall\ (x,y)\in X\times Y$,

$I(x,y)=1, O(x,y)=0$,分别称为 X 到 Y 的**全称关系**,**零关系**;

(7) $(R^c)^c=R$;

(8) $(\bigvee_{t\in T}T_t)^c=\bigwedge_{t\in T}R_t^c, (\bigwedge_{t\in T}R_t)^c=\bigvee_{t\in T}R_t^c$.

定义 1.2 设 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$,命 $R^{-1}:Y\times X\to[0,1]$使得$\forall\ (y,x)\in Y\times X, R^{-1}(y,x)=R(x,y)$. 则 $R^{-1}\in\mathscr{F}(Y\times X)$称为 F 关系 R 的**逆关系**(亦称**转置关系**)

命题 1.2 设 $R,S,R_t\in\mathscr{F}(X\times Y), t\in T$,则

(1) $R\leqslant S\Leftrightarrow R^{-1}\leqslant S^{-1}$;

(2) $(\bigvee_{t\in T}R_t)^{-1}=\bigvee_{t\in T}R_t^{-1}, (\bigwedge_{t\in T}R_t^{-1}=\bigwedge_{t\in T}R_t^{-1}$;

(3) $(R^c)^{-1}=(R^{-1})^c$;

(4) $(R^{-1})^{-1}=R$.

证明是直接的.

同样,对于 F 集的 λ **截集**,**分解定理**,**表现定理**等也可引入到 F 关系中.

设 X 到 Y 的 F 关系 $R\in\mathscr{F}(X\in Y)$，$\forall\ \alpha\in[0,1]$，R 的 λ 截集 R_λ（相应地，R 的 λ 强截集 $R_{\underline{\lambda}}$）是 X 到 Y 的普通关系（称为 R 的 **λ 截关系**）：

$$xR_\lambda y\Leftrightarrow R_\lambda(x,y)=1\quad\Leftrightarrow\quad R(x,y)\geqslant\lambda,$$

$$xR_{\underline{\lambda}}y\Leftrightarrow R_{\underline{\lambda}}(x,y)=1\quad\Leftrightarrow\quad R(x,y)>\lambda.$$

于是，由第一章的定理 3.5，3.6，3.8，有

命题 1.3（F 关系的分解定理）　设 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，则

(1)　$R=\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_\lambda$；

(2)　$R=\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_{\underline{\lambda}}$；

(3)　$R=\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda H_R(\lambda)$，

其中 $H_R:[0,1]\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\forall\ \lambda\in[0,1]$，

$$R_{\underline{\lambda}}\subseteq H_R(\lambda)\subseteq R_\lambda.$$

由此可见，F 关系可以分解为一组特殊的普通关系（截关系）；反之，一组普通关系如构成 $X\times Y$ 的集合套（亦称 X 到 Y 的**关系套**），利用表现定理也可以用来表示 F 关系.

§2　F 关系的合成

F 关系的合成是常用的运算之一，许多 F 关系的性质都与合成运算有关. 自然，F 关系的合成是普通关系的合成的推广.

定义 2.1　设 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，$S\in\mathscr{F}(Y\times Z)$，命

$$R\circ S:X\times Z\to[0,1],\forall\ (x,z)\in X\times Z,$$

$$(R\circ S)(x,z)=\bigvee_{y\in Y}[R(x,y)\wedge S(y,z)],$$

其中 $\vee=\sup$，$\wedge=\min$，则 $R\circ S\in\mathscr{F}(X\times Z)$ 称为 F 关系 R 与 S 的

合成.

例 2.1 设 X 代表全体男人的集合，$R,S\in\mathscr{P}(X\times X)$ 分别是 X 上普通的“弟兄”关系，“父子”关系，则依定义 2.1，$\forall\ x,z\in X$，

$$\begin{aligned}(R\circ S)(x,z)=1 &\Leftrightarrow \exists\ y\in X, R(x,y)=1=S(y,z)\\ &\Leftrightarrow \exists\ y\in X, y\text{ 是 }x\text{ 的哥哥，且}\\ &\qquad y\text{ 是 }z\text{ 的父亲}.\end{aligned}$$

此时，通常称 x 是 z 的叔叔，即(普通)关系的合成 $R\circ S$ 是 X 上的“叔侄”关系.

例 2.2 设 X 为全体实数集，R 是 X 上的 F 关系“远小于”(见例 1.1)，则 F 关系的合成 $R\circ R$ 表示 X 上的“远远小于”关系：$\forall\ x,z\in X$，由定义 2.1，

$$\begin{aligned}(R\circ R)(x,z) &= \bigvee_{y\in X}[R(x,y)\wedge R(y,z)]\\ &=\begin{cases}0, & \text{当 } x\geqslant z,\\ \left[1+\dfrac{100}{\left(\dfrac{z-x}{2}\right)^2}\right]^{-1}, & \text{当 } x<z.\end{cases}\end{aligned}$$

定理 2.1 设 $R,R_1,R_2\in\mathscr{F}(X\times Y)$，$S,S_1,S_2\in\mathscr{F}(Y\times Z)$，$P\in\mathscr{F}(Z\times W)$，则

(1) $(R\circ S)\circ P=R\circ(S\circ P)$；

(2) $(R_1\vee R_2)\circ S=(R_1\circ S)\vee(R_2\circ S)$，

$R\circ(S_1\vee S_2)=(R\circ S_1)\vee(R\circ S_2)$；

(3) $(R_1\wedge R_2)\circ S\leqslant(R_1\circ S)\wedge(R_2\circ S)$，

$R\circ(S_1\wedge S_2)\leqslant(R\circ S_1)\wedge(R\circ S_2)$；

(4) $R_1\leqslant R_2\Rightarrow R_1\circ S\leqslant R_2\circ S$，

$S_1\leqslant S_2\Rightarrow R\circ S_1\leqslant R\circ S_2$；

(5) $R\circ E_y=E_x\circ R=R$，$O\circ R=R\circ O=O$，

其中 E_x, E_y 分别是 X, Y 上的**恒等关系**，$\forall\ x,u\in X, y,v\in Y$，

$$E_X(x,u)=\begin{cases}1, & 当\ u=x,\\ 0, & 当\ u\neq x,\end{cases}$$

$$E_Y(y,v)=\begin{cases}1, & 当\ v=y,\\ 0, & 当\ v\neq y;\end{cases}$$

(6)　$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

证明　只证(1)，(2)的第二式及(6)，其余类似.

(1)　$\forall\ (x,w)\in X\times W$，

$$\begin{aligned}[(R\circ S)\circ P](x,w)&=\bigvee_{z\in Z}[(R\circ S)(x,z)\wedge P(z,w)]\\&=\bigvee_{z\in Z}[\bigvee_{y\in Y}\{R(x,y)\wedge S(y,z)\}\wedge P(z,w)]\\&=\bigvee_{z\in Z,y\in Y}[R(x,y)\wedge S(y,z)\wedge P(z,w)]\end{aligned}$$

同理，$[R\circ(S\circ P)](x,w)=\bigvee\limits_{y\in Y,z\in Z}[R(x,y)\wedge S(y,z)\wedge P(z,w)]$，故(1)成立.

(2)的第二式.　$\forall\ (x,z)\in X\times Z$，

$$\begin{aligned}[R\circ(S_1\vee S_2)](x,z)&=\bigvee_{y\in Y}\{R(x,y)\wedge[S_1(y,z)\vee S_2(y,z)]\}\\&=\{\bigvee_{y\in Y}[R(x,y)\wedge S_1(y,z)]\}\\&\quad\vee\{\bigvee_{y\in Y}[R(x,y)\wedge S_2(y,z)]\}\\&=(R\circ S_1)(x,z)\vee(R\circ S_2)(x,z)\\&=[(R\circ S_1)\vee(R\circ S_2)](x,z),\end{aligned}$$

故　$R\circ(S_1\vee S_2)=(R\circ S_1)\vee(R\circ S_2)$.

(6)　$\forall\ (z,x)\in Z\times X$，

$$\begin{aligned}(R\circ S)^{-1}(z,x)&=(R\circ S)(x,z)\\&=\bigvee_{y\in Y}[R(x,y)\wedge S(y,z)]\\&=\bigvee_{y\in Y}[S^{-1}(z,y)\wedge R^{-1}(y,x)]\\&=(S^{-1}\circ R^{-1})(z,x),\end{aligned}$$

故(6)成立. 证毕.

注(i) 性质(2)可推广到一般情形:

$$(\bigvee_{t\in T} R_t) \circ S = \bigvee_{t\in T} (R_t \circ S),$$

$$R \circ (\bigvee_{t\in T} S_t) = \bigvee_{t\in T} (R \circ S_t)$$

(ii) 一般 $R \circ S \neq S \circ R$(参见例 4.1).

(iii) 性质(3)中等号未必成立(参见例 4.2).

现在我们利用 F 关系的合成引入 F 关系的方幂.

定义 2.2 设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$,命 F 关系 R 的非负整数次幂为 $R^0 = E_X, R^1 = R, R^2 = R \circ R, \cdots, R^n = R^{n-1} \circ R, \cdots$.

命题 2.2 设 $R, S \in \mathscr{F}(X \times X)$.

(1) 若 $R \leqslant S$,则对任何正整数 n, $R^n \leqslant S^n$;

(2) 若 R 与 S 可交换(即 $R \circ S = S \circ R$),则对任何正整数 k, l, $R^k \circ S^l = S^l \circ R^k$.

证明 (1) 由定理 2.1(4)易验证.

(2) 首先,用数学归纳法证明 R^k 与 S 可交换:因 $R \circ S = S \circ R$,即结论对 $k=1$ 成立;如果 $R^{k-1} = S \circ R^{k-1}$,则

$$\begin{aligned} R^k \circ S &= (R^{k-1} \circ R) \circ S = R^{k-1} \circ (R \circ S) = R^{k-1} \circ (S \circ R) \\ &= (R^{k-1} \circ S) \circ R = S \circ (R^{k-1} \circ R) = S \circ R^k. \end{aligned}$$

故对任何正整数 k, $R^k \circ S = S \circ R^k$.

其次,对任给的正整数 k,因 R^k 与 S 可交换,应用上述推证知,对任意正整数 l, S^l 与 R^k 可交换,即

$$R^k \circ S^l = S^l \circ R^k.$$

证毕.

推论 2.3 设 $R, S \in \mathscr{F}(X \times X)$.

(1) 对任何正整数 k, l,有 $R^{k+l} = R^k \circ R^l$;

(2) 若 R 与 S 可交换,则对任何正整数 n,

$$(R \circ S)^n = R^n \circ S^n.$$

注(i)　本节介绍的合成运算，依其定义也称为 sup－min 合成. 类似可考虑其他类型的合成运算，其中较为有用的如 Inf－max 合成：设 $R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$S \in \mathscr{F}(Y \times Z)$，命 $R \bar{\circ} S \in \mathscr{F}(X \times Z)$，$\forall\ (x,z) \in X \times Z$，

$$(R \bar{\circ} S)(x,z) = \bigwedge_{y \in Y} [R(x,y) \vee S(y,z)].$$

则 $R \bar{\circ} S$ 称为 F 关系 R 与 S 的 inf- max 合成.

(ii)　设 $L = \langle L, \leqslant, \vee, \wedge \rangle$ 是完备格，则 $L-F$ 关系的合成运算可类似定义.

§3　F 关系的类型

本节介绍常见的 F 关系具有的一些性质，如自反性、对称性、传递性. 在此基础上引入 F 关系的重要类型——F 相似关系，F 等价关系.

定义 3.1　设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$.

(1)　R 称为是**弱自反的**，如果 $\forall\ x,y \in X$，$R(x,y) \leqslant R(x,x)$；

(2)　R 称为是**自反的**，如果 $E_x \leqslant R$，即 $\forall\ x \in X$，$R(x,x) = 1$；

(3)　R 称为是**反自反的**，如果 R^c 是自反的，即 $\forall\ x \in X$，$R(x,x) = 0$；

(4)　R 称为是**对称的**，如果 $R = R^{-1}$，即 $\forall\ x,y \in X$，$R(x,y) = R(y,x)$；

(5)　R 称为**完全反对称的**，如果 $\forall\ x,y \in X$，$R(x,y) > 0$，$R(y,x) > 0$，有 $x = y$；

(6)　R 称为**反对称的**，如果 $\forall\ x,y \in X$，$R(x,y) = R(y,x) \neq 0$，

有 $x=y$；

(7) R 称为**传递的**，如果 $R\circ R\leqslant R$.

易见，自反的 F 关系必是弱自反的，完全反对称的 F 关系必是反对称的.

命题 3.1 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$ 是弱自反的，则对任何正整数 n，$R^n\leqslant R^{n+1}$ 且 R^n 也是弱自反的.

证明 首先，用数学归纳法证明 $R^n\leqslant R^{n+1}$：

当 $n=1$，$\forall\ x,y\in X$，依定义 2.1 及 3.1(1)，

$$\begin{aligned}R^2(x,y)&=\bigvee_{z\in X}[R(x,z)\wedge R(z,y)]\\&\geqslant R(x,x)\wedge R(x,y)\\&=R(x,y).\end{aligned}$$

故 $R\leqslant R^2$，即 $n=1$ 时结论成立.

若归纳假设 $R^{n-1}\leqslant R^n$，则由定理 2.1(4)，

$$R^n=R^{n-1}\circ R\leqslant R^n\circ R=R^{n+1}.$$

故对任何正整数 n，$R^n\leqslant R^{n+1}$.

其次，仍用数学归纳法证明 R^n 的弱自反性：

当 $n=1$，由假设 $R^1=R$ 是弱自反的.

若归纳假设 R^{n-1} 是弱自反的，即 $\forall\ x,y\in X$，$R^{n-1}(x,y)\leqslant R^{n-1}(x,x)$，则

$$\begin{aligned}R^n(x,y)&=(R^{n-1}\circ R)(x,y)=\bigvee_{z\in X}[R^{n-1}(x,z)\wedge R(z,y)]\\&\leqslant\bigvee_{z\in X}R^{n-1}(x,z)=R^{n-1}(x,x)\leqslant R^n(x,x).\end{aligned}$$

故对任何正整数 n，R^n 是弱自反的. 证毕.

推论 3.2 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$ 是自反的，则对任何正整数 n，$R^n\leqslant R^{n+1}$，且 R^n 也是自反的.

证明 R^n 的自反性由

$$E_X \leqslant R \leqslant R^2 \leqslant \cdots\cdots \leqslant R^n \leqslant R^{n+1} \leqslant \cdots$$

立得. 证毕.

命题 3.3 设 $R,S \in \mathscr{F}(X \times X)$ 都是自反的,则 $R \vee S \leqslant R \circ S$ 且 $R \circ S$ 也是自反的.

证明 $\forall\, x,y \in X$,

$$\begin{aligned}(R \circ S)(x,y) &= \bigvee_{z \in X}[R(x,z) \wedge S(z,y)] \\ &\geqslant R(x,y) \wedge S(y,y) \\ &= R(x,y),\end{aligned}$$

即 $R \leqslant R \circ S$. 同理可知, $S \leqslant R \circ S$, 故 $R \vee S \leqslant R \circ S$; 且由 $\forall\, x \in X$, $(R \circ S)(x,x) \geqslant R(x,x) = 1$ 知, $(R \circ S)(x,x) = 1$, 即 $R \circ S$ 是自反的 F 关系. 证毕.

注 一般,若 $R_t (t \in T)$ 都是 X 上的自反的 F 关系,则 $\bigvee_{t \in T} R_t$, $\bigwedge_{t \in T} R_t$ 亦然.

命题 3.4 设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$,则 F 关系 $R \circ R^{-1}$ 是对称的,弱自反的.

证明 由定理 2.1(6),命题 1.2(4)知

$$(R \circ R^{-1})^{-1} = (R^{-1})^{-1} \circ R^{-1} = R \circ R^{-1},$$

即 $R \circ R^{-1}$ 是对称的,且因 $\forall\, x,y \in X$,

$$\begin{aligned}(R \circ R^{-1})(x,x) &= \bigvee_{z \in X}[R(x,z) \wedge R^{-1}(z,x)] \\ &\geqslant R(x,y) \wedge R^{-1}(y,x) \\ &= R(x,y) \wedge R(x,y) \\ &= R(x,y),\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}(R \circ R^{-1})(x,y) &= \bigvee_{z \in X}[R(x,z) \wedge R^{-1}(z,y)] \\ &\leqslant \bigvee_{z \in X} R(x,z) \\ &\leqslant (R \circ R^{-1})(x,x),\end{aligned}$$

故 $R\circ R^{-1}$是弱自反的. 证毕.

命题 3.5 设 $R,S\in\mathscr{F}(X\times X)$都是对称的,则 $R\circ S$ 是对称的 F 关系的主要条件是,R 与 S 可交换.

证明 充分性. 若 $R\circ S=S\circ R$,知

$$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R=R\circ S,$$

故 $R\circ S$ 是对称的.

必要性. 由 $R,S,R\circ S$ 的对称性,有

$$R\circ S=(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R,$$

故 R 与 S 可交换. 证毕.

推论 3.6 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$是对称的,则对任何正整数 n,R^n 是对称的.

注 一般,若 $R_t(t\in T)$都 X 上的对称的 F 关系,易见 $\bigvee\limits_{t\in T}R_t$, $\bigwedge\limits_{t\in T}R_t$ 亦然.

命题 3.7 设 $R_t\in\mathscr{F}(X\times X)$,$t\in T$,均是传递的 F 关系,则 $\bigwedge\limits_{t\in T}R_t$ 也是传递的.

证明 因$\forall\, t\in T$,有

$$\begin{aligned}(\bigwedge_{t\in T}R_t)^2&=(\bigwedge_{t\in T}R_t)\circ(\bigwedge_{t\in T}R_t)\leqslant R_t\circ(\bigwedge_{t\in T}R_t)\\&\leqslant R_t\circ R_t\leqslant R_t,\end{aligned}$$

知$(\bigwedge\limits_{t\in T}R_t)^2\leqslant\bigwedge\limits_{t\in T}R_t$,故$\bigwedge\limits_{t\in T}R_t$ 是传递的. 证毕.

注 一般而言,若 R,S 是 X 上传递的 F 关系,$R\vee S$ 未必是传递的(参见例 4.5).

命题 3.8 设 $R,S\in\mathscr{F}(X\times X)$都是传递的,且 R 与 S 可交换,则 $R\circ S$ 也是传递的.

证明 因$(R\circ S)^2=(R\circ S)(R\circ S)=R\circ(S\circ R)\circ S=R\circ(R\circ S)\circ S=(R\circ R)\quad(S\circ S)\leqslant R\circ S$,故 $R\circ S$ 是传递的. 证毕.

命题3·9 设$R\in\mathscr{F}(X\times X)$是传递的，则对任何正整数$n$，$R^n\leqslant R$且$R^n$是传递的.

定义3.2 设$R\in\mathscr{F}(X\times X)$，命

$$\hat{R}=\wedge\{S\in\mathscr{F}(X\times X)\mid R\leqslant S \text{ 且 } S^2\leqslant S\},$$

称$\hat{R}$为F关系R的**传递闭包**.

显然，$\hat{R}$是X上包含R的“最小”的传递的F关系.

定理3.10 设$R\in\mathscr{F}(X\times X)$，则

$$\hat{R}=\bigvee_{n=1}^{\infty}R^n.$$

证明 因$R\leqslant\hat{R}$，由$\hat{R}$的传递性知，对任何正整数n，$R^n\leqslant[\hat{R}]^n\leqslant\hat{R}$，从而$\bigvee_{n=1}^{\infty}R^n\leqslant\hat{R}$.

反之，因$R\leqslant\bigvee_{n=1}^{\infty}R^n$及

$$\begin{aligned}(\bigvee_{n=1}^{\infty}R^n)\circ(\bigvee_{n=1}^{\infty}R^n)&=\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigvee_{m=1}^{\infty}(R^n\circ R^m)\\&=\bigvee_{n=1}^{\infty}\bigvee_{m=1}^{\infty}R^{n+m}\\&=\bigvee_{k=2}^{\infty}\bigvee_{n+m=k}R^{n+m}\\&\leqslant\bigvee_{k=1}^{\infty}R^k.\end{aligned}$$

由$\hat{R}$的定义，$\hat{R}\leqslant\bigvee_{n=1}^{\infty}R^n$.

故 $\hat{R}=\bigvee_{n=1}^{\infty}R^n$. 证毕.

推论3.11 设$R\in\mathscr{F}(X\times X)$，则对某个正整数$n$，$\hat{R}=\bigvee_{k=1}^{n}R^k$的充要条件是，$R^{n+1}\leqslant\bigvee_{k=1}^{n}R^k$.

证明 必要性显然.

充分性. $\forall\ m\geqslant 1$，可归纳证明$R^{n+m}\leqslant\bigvee_{k=1}^{n}R^k$：

事实上，当$m=1$，由假设已成立.

若归纳假设$R^{n+(m-1)}\leqslant\bigvee_{k=1}^{n}R^k$，则

$$R^{n+m}=R^{n+(m-1)}\circ R\leqslant(\bigvee_{k=1}^{n}R^k)\circ R$$

$$= \bigvee_{k=1}^{n} R^{k+1} \leqslant \bigvee_{k=1}^{n} R^{k},$$

归纳步骤完成，于是，由定理 3.10,

$$\hat{R} = \bigvee_{k=1}^{\infty} R^{k} = \bigvee_{k=1}^{n} R^{k}.$$

证毕.

命题 3.12 F 关系 R 的传递闭包 $\hat{R}$ 具有下述性质:

(1) 如果 $R \leqslant S$，则 $\hat{R} \leqslant \hat{S}$;

(2) 如果 R 是自反的，则 $\hat{R}$ 亦然;

(3) 如果 R 是对称的，则 $\hat{R}$ 亦然;

(4) 如果 R 是传递的，则 $\hat{R} = R$;

(5) $(\hat{R})^{-1} = \widehat{R^{-1}}$.

证明 由定理 3.10 可直接验证性质成立.

现在我们转向介绍 F 相似关系，F 等价关系.

定义 3.3 设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$，如果 R 是自反的，对称的，则 R 称为 X 上的 **F 相似关系**.

此时，$\forall\, x, y \in X$，$R(x,y)$ 表示 x 与 y 关于 R 的相似程度.

由前述讨论易见，若 $R_t (t \in T)$ 均是 F 相似关系，则 $\bigvee_{t \in T} R_t$，$\bigwedge_{t \in T} R_t$ 亦然.

命题 3.13 设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$ 是 F 相似关系，则对任何正整数 n，R^n 也是 F 相似关系.

证明由推论 3.2，3.6 立得.

定理 3.14 设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$，则 R 是 F 相似关系的充要条件是，$\forall\, \lambda \in [0,1]$，$\lambda$ 截关系 R_λ 是 X 上普通的相似关系，即具有自反性，对称性.

证明 必要性. $\forall\, \lambda \in [0,1]$，因 $\forall\, x \in X$,

$$R(x,x) = 1 \geqslant \lambda,$$

知$(x,x)\in R_\lambda$；若$(x,y)\in R_\lambda$，有

$$R(y,x) = R(x,y) \geqslant \lambda,$$

知$(y,x)\in R_\lambda$；故 R_λ 是 X 上普通的相似关系.

充分性. 由 F 关系的分解定理 I(命题 1.3)，

$$R = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \lambda R_\lambda$$

及 R_λ 适合自反性，对称性. 于是，$\forall\ x\in X$，

$$R(x,x) = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} [\lambda \wedge R_\lambda(x,x)] = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \lambda = 1;$$

$\forall\ x,y\in X$，

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} [\lambda \wedge R_\lambda(x,y)] \\ &= \bigvee_{\lambda\in[0,1]} [\lambda \wedge R_\lambda(y,x)] \\ &= R(y,x). \end{aligned}$$

故 R 是 F 相似的关系. 证毕.

定理 3.15　设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，则

$$\overset{*}{R} = R \vee R^{-1} \vee E_X$$

是 F 相似关系，常称为 R 的**相似闭包**，因为它是包含 R 的最小的 F 相似关系.

证明是直接的.

定义 3.4　设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，如果 R 是自反的，对称的和传递的，则 R 称为 X 上的 F **等价关系**.

显然，F 等价关系是 F 相似关系.

易见，若 $R_t(t\in T)$均是 F 等价关系，则 $\bigwedge_{t\in T} R_t$ 亦然.

命题 3.16　设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$是 F 等价关系，则对任何正整数 n，R^n 也是 F 等价关系.

证明由命题 3.13，3.9 立得.

与定理 3.14 类似，我们有

定理 3.17 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，则 R 是 F 等价关系的充要条件是，$\forall\ \lambda\in[0,1]$，λ 截关系 R_λ 是 X 上普通的等价关系.

定理 3.18 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，记 $S=R\vee R^{-1}$，则

$$\check{R}=\hat{S}\vee E_X$$

是 X 上的 F 等价关系，常称为 R 的**等价闭包**，它是包含 R 的最小的 F 等价关系.

证明 由命题 3.12 知，$\check{R}$ 是自反的，对称的，而由命题 2.1 等，有

$$\begin{aligned}\check{R}\circ\check{R}&=(\hat{S}\vee E_X)\circ(\hat{S}\vee E_X)\\&=(\hat{S}\circ\hat{S})\vee(\hat{S}\circ E_X)\vee(E_X\circ\hat{S})\vee(E_X\circ E_X)\\&=\hat{S}\vee E_X\\&=\check{R}.\end{aligned}$$

故 $\check{R}$ 是传递的，即 $\check{R}$ 是 F 等价关系.

容易验证：若 $R\leqslant P$，P 是 X 上 F 等价关系，则 $\check{R}\leqslant P$，故 $\check{R}$ 是包含 R 的最小 F 等价关系. 证毕.

命题 3.19 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$ 是 F 相似关系，则

$$\hat{R}=\bigvee_{n=1}^{\infty}R^n$$

是 F 等价关系.

证明由命题 3.12 立得，或此时 $\hat{R}=\check{R}$.

下面的性质对于判定 F 相似关系是否为 F 等价关系有方便之处.

命题 3.20 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$ 是 F 相似关系，则 R 是 F 等价关系的充要条件是，$\forall\ x,y,z\in X$，$R(x,y)$，$R(y,z)$，$R(z,x)$ 三者中必有二者相等且不超过第三者.

证明 必要性，设 R 是 F 等价关系，不失一般性，可设

$$R(x,y)\leqslant R(y,z)\leqslant R(z,x),$$

则由 R 的对称性，传递性，有

$$\begin{aligned} R(x,y) &\geqslant \bigvee_{u\in X}[R(x,u) \wedge R(u,y)] \\ &\geqslant R(x,z) \wedge R(z,y) \\ &= R(y,z) \wedge R(z,x) \\ &= R(y,z). \end{aligned}$$

故 $R(x,y)=R(y,z)\leqslant R(z,x)$.

充分性. 因 R 是 F 相似关系，由假设条件 $\forall\, x,y,z\in X$,

$$R(x,z) \wedge R(y,z) \leqslant R(x,y),$$

从而

$$\begin{aligned} R(x,y) &\geqslant \bigvee_{z\in X}[R(x,z) \wedge R(y,z)] \\ &= R^2(x,y), \end{aligned}$$

即 R 是传递的，故 R 是 F 等价关系. 证毕.

定理 3.21　设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，则 R 是 F 等价关系当且仅当，R 的补关系 $R^c\in\mathscr{F}(X\times X)$ 适合反自反性，对称性及对 inf- max 合成的传递性（即 $R^c\leqslant R^c \,\bar{\circ}\, R^c$，其中 $\bar{\circ}$ 的定义见 §2 末的注(i)).

证明　设 R 是 F 等价关系，$\forall\, x,y\in X$，有

$$R^c(x,x)=1-R(x,x)=1-1=0,$$

$$R^c(x,y)=1-R(x,y)=1-R(y,x)=R^c(y,x),$$

$$\begin{aligned} (R^c \,\bar{\circ}\, R^c)(x,y) &= \bigwedge_{z\in X}[R^c(x,z) \vee R^c(z,y)] \\ &=1-\bigvee_{z\in X}[R(x;z) \wedge R(z,y)] \\ &=1-(R\circ R)(x,y) \\ &\geqslant 1-R(x,y) \\ &=R^c(x,y). \end{aligned}$$

故 R^c 具有反自反性，对称性及适合 $R^c\leqslant R^c \,\bar{\circ}\, R^c$.

反之，若条件成立，类似可证 R 具有自反性，对称性，传递性

(注意到$(R\circ R)^c=R^c\circ R^c$),即 R 是 F 等价关系. 证毕.

注 F 关系 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$适合反自反性,对称性及对Inf-max合成的传递性($R\leqslant R\,\bar{\circ}\,R$),常称为 X 上的 F **距离关系**. 定理表明:

$$R\text{是}F\text{等价关系}\quad\Leftrightarrow\quad R^c\text{是}F\text{距离关系}.$$

定义 3.5 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$是 F 等价关系,$\forall\, x\in X$,命$[x]\in\mathscr{F}(X)$,使得$\forall\, y\in X$,

$$[x](y)=R(x,y),$$

则 $X/R=\{[x]\mid x\in X\}$称为由 F 等价关系 R 决定的 F **商集**(注意它是通常集合).

与普通的等价关系的性质类似,我们有

命题 3.22 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$是 F 等价关系,X/R 是 R 决定的 F 商集,则

(i) $\forall\, x,y\in X, R(x,y)=0\Leftrightarrow[x]\wedge[y]=\varnothing$;

(ii) $\forall\, x,y\in X, R(x,y)=1\Leftrightarrow[x]=[y]$;

(iii) $\bigvee\limits_{x\in X}[x]=X$.

证明 (i) ($\Rightarrow$)若 $R(x,y)=0$,则$\forall\, z\in X$,

$$\begin{aligned}([x]\wedge[y])(z)&=[x](z)\wedge[y](z)\\&=R(x,z)\wedge R(y,z)\\&=R(x,z)\wedge R(z,y)\\&\leqslant\bigvee_{z\in X}[R(x,z)\wedge R(z,y)]\\&=(R\circ R)(x,y)\\&\leqslant R(x,y)\\&=0.\end{aligned}$$

故$[x]\wedge[y]=\varnothing$.

($\Leftarrow$)若$[x]\wedge[y]=\varnothing$,则

$$R(x,y)=R(x,y)\wedge R(y,y)=([x]\wedge[y])(y)=0$$

(ii)　(⇒)若 $R(x,y)=1$,则$\forall z\in X$,

$$
\begin{aligned}
[x](z) &= R(x,z) = R(x,z) \wedge R(x,y) \\
&= R(y,x) \wedge R(x,z) \\
&\leqslant (R \circ R)(y,z) \\
&\leqslant R(y,z) \\
&= [y](z),
\end{aligned}
$$

即$[x]\leqslant[y]$,同理可证$[y]\leqslant[x]$(因 $R(y,x)=1$),故$[x]=[y]$.

(⇐)若$[x]=[y]$,则

$$R(x,y) = [x](y) = [y](y) = R(y,y) = 1.$$

(iii)$\forall y\in X$,有

$$(\bigvee_{x\in X}[x](y) = \bigvee_{x\in X}[x](y) \geqslant [y](y) = R(y,y) = 1,$$

故$(\bigvee_{x\in X}[x])(y)=1$,即$\bigvee_{x\in X}[x]=X$. 证毕.

§4　F 矩阵代数

当论域是有限集合时,F 关系可以用 F 矩阵的形式来表达,而作为布尔矩阵的推广,F 矩阵的研究与 F 语言,F 算法,F 自动机的理论等有密切关系. 本节介绍的 F 矩阵代数包括 F 矩阵的概念,运算及其性质,F 矩阵的各种类型,F 矩阵的幂收敛,对称 F 矩阵的可实现问题,F 矩阵的秩,正则性与广义逆矩阵,F 矩阵的不变式等.

定义 4.1　形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的矩阵称为 $m\times n$ 的 F **矩阵**，其中 $a_{ij}\in[0,1]$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$ 并记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij}称为 F 矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素.

全体 $m\times n$ 的 F 矩阵的集合记为$[0,1]^{m\times n}$.

以下常用大写字母 A,B,C,D 等表示 F 矩阵.

注 (1) 设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 及 X 到 Y 的 F 关系 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，记

$$a_{ij}=R(x_i,y_j),i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n.$$

则 R 可由 F 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$来表示，且这种表示使得 $\mathscr{F}(X\times Y)$与$[0,1]^{m\times n}$成一一对应，因此，§1、§2、§3 的许多概念，运算，性质可以自然应用到 F 矩阵中.

(2) 设 L 是完备格(分别以 0,1 为最小元，最大元)，则形如 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$a_{ij}\in L$，称为 L-F **矩阵**.

特别，$L=\{0,1\}$，称为**布尔矩阵**.

(3) 当 $m=n$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$称为 n 阶 F **方阵**，而

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\in[0,1]^{m\times n},$$

$$I_{m\times n}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\in[0,1]^{m\times n}$$

分别称为**零矩阵**，**全矩阵**(相应于零关系，全称关系).

$$E_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\in[0,1]^{n\times n}$$

称为 n 阶**单位矩阵**(相应于恒等关系).

显然，零矩阵，全矩阵，单位矩阵都是布尔矩阵.

定义 4.2　设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in[0,1]^{m\times n}$.

(i)　若$\forall\ i\in\{1,2,\cdots,m\},j\in\{1,2,\cdots,n\},a_{ij}=b_{ij}$，则称 F 矩阵 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

(ii)　若$\forall\ i\in\{1,2,\cdots,m\},j\in\{1,2,\cdots,n\},a_{ij}\leqslant b_{ij}$，则称 B **包含** A，记作 $A\leqslant B$.

例如，$\forall\ A\in[0,1]^{m\times n},O_{m\times n}\leqslant A\leqslant I_{m\times n}$.

(iii)　命

$$A+B=(a_{ij}\vee b_{ij})_{m\times n}\in[0,1]^{m\times n},$$

$$A\wedge B=(a_{ij}\wedge b_{ij})_{m\times n}\in[0,1]^{m\times n},$$

分别称为 F 矩阵 A 与 B 的**和**，**交积**(相应于 F 关系的并，交)；且

$$A^c=(1-a_{ij})_{m\times n}\in[0,1]^{m\times n}$$

称为 A 的 F **补矩阵**(相应于 F 关系的补)，

$$A'=(a_{ji})_{n\times m}\in[0,1]^{n\times m}$$

称为 A 的 F **转置矩阵**(相应于 F 关系的逆关系).

例如，设

$$A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.8 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0.6\end{pmatrix},$$

则

$$A'=\begin{bmatrix}0.3 & 0.5\\ 0.8 & 0\\ 0.5 & 0.6\end{bmatrix},$$

注 同 F 关系一样，可定义 $[0,1]^{m\times n}$ 中一族 F 矩阵的和，交积.

下面的定理 4.1、4.2、4.3 是 F 矩阵运算的基本性质. 因都可由相应的 F 关系的性质直接给出，故证明从略.

定理 4.1 设 $A,B,C\in[0,1]^{m\times n}$，则

(1) $A+A=A, A\wedge A=A$;

(2) $A+B=B+A, A\wedge B=B\wedge A$;

(3) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

$(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$;

(4) $A+(A\wedge B)=A, A\wedge(A+B)=A$;

(5) $A\wedge(B+C)=(A\wedge B)+(A\wedge c)$,

$A+(B\wedge C)=(A+B)\wedge(A+C)$;

(6) $A+I_{m\times n}=I_{m\times n}, A\wedge I_{m\times n}=A$,

$A+O_{m\times n}=A \quad , A\wedge O_{m\times n}=O_{m\times n}$;

(7) $(A^c)^c=A$;

(8) $(A+B)^c=A^c\wedge B^c$,

$(A\wedge B)^c=A^c+B^c$.

定理 4.2 设 $A,B\in[0,1]^{m\times n}$，则

(1) $A\leqslant B\Leftrightarrow A'\leqslant B'$;

(2) $(A+B)'=A'+B', (A\wedge B)'=A'\wedge B'$;

(3) $(A^c)'=(A')^c$;

(4)　$(A')'=A$.

定义 4.3　设 $A=(a_{ik})\in[0,1]^{m\times l}$，$B=(b_{kj})\in[0,1]^{l\times n}$. 命 $A\circ B=(c_{ij})\in[0,1]^{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\bigvee_{k=1,2,\cdots,l}\{a_{ik}\wedge b_{kj}\},$$

$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$. 则称 $A\circ B$ 为 F 矩阵 A 与 B 的**乘积**(相应于 F 关系的合成).

注　F 矩阵乘积的定义形式上类似于通常矩阵的乘积，只是分别用取 $\wedge=\min$，$\vee=\max$ 代替数的乘积，数的和.

例 4.1　设

$$A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.2 & 0.1\\ 0.4 & 0.6 & 0.2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.5 & 0.3\\ 0 & 0.7\end{pmatrix},$$

则

$$A\circ B=\begin{pmatrix}(0.3\wedge0.2)\vee(0.2\wedge0.5)\vee(0.1\wedge0) & (0.3\wedge0.1)\vee(0.2\wedge0.3)\vee(0.1\wedge0.7)\\ (0.4\wedge0.2)\vee(0.6\wedge0.5)\vee(0.2\wedge0) & (0.4\wedge0.1)\vee(0.6\wedge0.3)\vee(0.2\wedge0.7)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.2 & 0.2\\ 0.5 & 0.3\end{pmatrix},$$

$$B\circ A=\begin{pmatrix}(0.2\wedge0.3)\vee(0.1\wedge0.4) & (0.2\wedge0.2)\vee(0.1\wedge0.6) & (0.2\wedge0.1)\vee(0.1\wedge0.2)\\ (0.5\wedge0.3)\vee(0.3\wedge0.4) & (0.5\wedge0.2)\vee(0.3\wedge0.6) & (0.5\wedge0.1)\vee(0.3\wedge0.)\\ (0\wedge0.3)\vee(0.7\wedge0.4) & (0\wedge0.2)\vee(0.7\wedge0.4) & (0\wedge0.1)\vee(0.7\wedge0.2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.2 & 0.2 & 0.1\\ 0.3 & 0.3 & 0.2\\ 0.4 & 0.6 & 0.2\end{pmatrix}.$$

可见，在一般情况下，$A\circ B\neq B\circ A$. 事实上，按照定义 4.3，当 $A\circ B$ 有意义时，$B\circ A$ 未必有意义($m\neq n$ 时).

定理 4.3　设 $A,A_1,A_2\in[0,1]^{m\times l}$，$B,B_1,B_2\in[0,1]^{l\times s}$，$C\in[0,1]^{s\times n}$，则

(1)　$(A\circ B)\circ C=A\circ(B\circ C)$;

(2) $(A_1+A_2)\circ B=(A_1\circ B)+(A_2\circ B)$,

$A\circ(B_1+B_2)=(A\circ B_1)+(A\circ B_2)$;

(3) $(A_1\wedge A_2)\circ B\leqslant(A_1\circ B)\wedge(A_2\circ B)$,

$A\circ(B_1\wedge B_2)\leqslant(A\circ B_1)\wedge(A\circ B_2)$;

(4) $A_1\leqslant A_2\Rightarrow A_1\circ B\leqslant A_2\circ B$,

$B_1\leqslant B_2\Rightarrow A\circ B_1\leqslant A\circ B_2$;

(5) $A\circ E_l=E_m\circ A=A$,

$A\circ O_{l\times l}=O_{m\times m}\circ A=O_{m\times l}$;

(6) $(A\circ B)'=B'\circ A'$.

例 4.2 设

$$A=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.4 & 0.4\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.7\end{pmatrix},$$

则

$$(A\wedge B)\circ C=\begin{pmatrix}0.5\wedge 0 & 0\wedge 1\\ 1\wedge 0.4 & 1\wedge 0.4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0.4 & 0.4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0.4 & 0.4\end{pmatrix},$$

$$(A\circ C)\wedge(B\circ C)=\begin{pmatrix}(0.5\wedge 0.3)\vee(0\wedge 0.6) & (0.5\wedge 0.3)\vee(0\wedge 0.7)\\ (1\wedge 0.3)\vee(1\wedge 0.6) & (1\wedge 0.3)\vee(1\wedge 0.7)\end{pmatrix}$$

$$\wedge\begin{pmatrix}(0\wedge 0.3)\vee(1\wedge 0.6) & (0\wedge 0.3)\vee(1\wedge 0.7)\\ (0.4\wedge 0.3)\vee(0.4\wedge 0.6) & (0.4\wedge 0.3)\vee(0.4\wedge 0.7)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.7\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0.6 & 0.7\\ 0.4 & 0.4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.3 & 0.3\\ 0.4 & 0.4\end{pmatrix}$$

可见，$(A\wedge B)\circ C\neq(A\circ C)\wedge(B\circ C)$，即定理 4.3 中性质(3)一般不能成为等号.

定义 4.4　设 $A=(a_{ij})\in[0,1]^{m\times n}$，$\forall\ \lambda\in[0,1]$，命

$$a_{ij}(\lambda)=\begin{cases}1, & \text{当 } a_{ij}\geqslant\lambda,\\ 0, & \text{当 } a_{ij}<\lambda,\end{cases}$$

则称 $m\times n$ 的布尔矩阵 $A_\lambda=(a_{ij}(\lambda))$ 是 F 矩阵 A 的 λ **截矩阵**.

例如，设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0.4 & 0.8\\ 0.4 & 0.2 & 0.3\\ 0.7 & 0 & 0.5\end{pmatrix},$$

则

$$A_{0.5}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

定理 4.4　设 $A,B\in[0,1]^{m\times n}$，$C\in[0,1]^{n\times l}$，则

(1)　$A\leqslant B\Leftrightarrow\forall\ \lambda\in[0,1]$，$A_\lambda\leqslant B_\lambda$；

且 $\forall\ \lambda\in[0,1]$，有

(2)　$(A+B)_\lambda=A_\lambda+B_\lambda$；

(3)　$(A\wedge B)_\lambda=A_\lambda\wedge B_\lambda$；

(4)　$(A')_\lambda=(A_\lambda)'$；

(5)　$(A\circ C)_\lambda=A_\lambda\circ C_\lambda$.

证明　只证(5)，其余是明显的.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$C=(c_{jk})_{n\times l}$，$A\circ C=(d_{ik})_{m\times l}$，$\lambda\in[0,1]$，则 $\forall\ i\in\{1,2,\cdots,m\}$，$k\in\{1,2,\cdots,l\}$，若 $(A\circ C)_\lambda$ 的第 i 行 k 列元素为 1，即

$$\bigvee_{j=1,2,\cdots,n}\{a_{ij}\wedge c_{jk}\}=d_{ik}\geqslant\lambda.$$

于是，存在 $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$，$a_{ij_0}\wedge c_{j_0k}\geqslant\lambda$，知 $a_{ij_0}\geqslant\lambda$，$c_{j_0k}\geqslant\lambda$. 从而 a_{ij_0}

$(\lambda)=1, c_{j_0k}(\lambda)=1$,故 $A_\lambda \circ C_\lambda$ 的第 i 行 k 列元素为 1.

同理,若 $(A \circ C)_\lambda$ 的第 i 行 k 列元素为零,可证 $A_\lambda \circ C_\lambda$ 的第 i 行 k 列元素为零.

总之 $(A \circ C)_\lambda = A_\lambda \circ C_\lambda$. 证毕.

考虑 F 方阵的情形,F 矩阵的乘积运算便给出 F 方阵的方幂的概念.

定义 4.5 设 $A \in [0,1]^{n\times n}$ 是 n 阶 F 方阵,命 A 的非负整数次幂为

$$A^0 = E_n, A^1 = A, A^2 = A \circ A, \cdots, A^{k+1} = A^k \circ A, \cdots.$$

由定理 4.3(1),易见

$$A^k \circ A^l = A^{k+l}, (A^k)^l = A^{kl}.$$

一般,我们还有

定理 4.5 设 $A, B \in [0,1]^{n\times n}$,且 A 与 B 可交换(即 $A \circ B = B \circ A$),则对任何非负整数 k,A^k 与 B^k 可交换,且 $(A \circ B)^k = A^k \circ B^k = (B \circ A)^k$.

证明 首先,对 k 作数学归纳法,可验证

$$A^k \circ B = B \circ A^k,$$

进而可知,$A^k \circ B^k = B^k \circ A^k$.

其次,仍用数学归纳法可验证

$$(A \circ B)^k = A^k \circ B^k = (B \circ A)^k.$$

证毕.

定理 4.6 设 $A \in [0,1]^{n\times n}$ 是 n 阶 F 方阵,则存在正整数 d, k,使得

$$A^{k+d} = A^k.$$

证明 考虑 A 的方幂组成的序列

$$A, A^2, \cdots, A^m, \cdots.$$

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中共有 s 个互不相同的元素 $\{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$,显然

$s\leqslant n^2$，因为经过"$\vee$"，"$\wedge$"的运算不会增加新的元素，若记 $A^m=(a_{ij}^{(m)})_{n\times n}$，知

$$a_{ij}^{(m)}\in \{b_1,b_2,\cdots,b_s\},i,j=1,2,\cdots,n.$$

由于 s 个元素最多可以有 $s^{n\times n}$ 个不同的 n 阶 F 方阵，可见，在序列

$$A,A^2,\cdots,A^m,\cdots$$

中最多有 M 个互不相同的项，其中 $M\leqslant s^{n\times n}$. 故存在正整数 d,k，使得 $A^{k+d}=A^k$. 证毕.

定义 4.6 设 $A\in[0,1]^{n\times n}$，则

$$i(A)=\min\{k\mid A^{k+d}=A^k,d \text{ 是正整数}\},$$

$$p(A)=\min\{d\mid A^{d+k}=A^k,k \text{ 是正整数}\}$$

分别称为 F 方阵 A 的**指数**，**周期**.

特别，如果 A 的周期 $p(A)=1$（即存在正整数 k，使得 $A^{k+1}=A^k$）则称 A **幂收敛**（于 A^k）.

例 4.3 设

$$A=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 1 & 0.3\end{pmatrix},$$

则

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 1 & 0.5\end{pmatrix},$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{pmatrix},\quad A^5=A^3,\cdots.$$

故 $i(A)=2,p(A)=2$.

例 4.4 设

$$A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7\\ 0.5 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} = A^3 = \cdots.$$

故 $i(A)=2$, $p(A)=1$, A 幂收敛于 A^2.

现在我们来介绍 F 矩阵的一些常见类型及其简单性质.

定义 4.7　设 $A=(a_{ij})\in[0,1]^{n\times n}$,则

(1)　A 称为**对角占优的**(亦称弱自反的),如果 $\forall\, i,j=1,2,\cdots,n$, $a_{ij}\leqslant a_{ii}$;

(2)　A 称为**自反的**,如果 $E_n\leqslant A$(即 $a_{ii}=1$);

(3)　A 称为**反自反的**,如果 $A\wedge E_n=O_{n\times n}$(即 $a_{ii}=0$);

(4)　A 称为**对称的**,如果 $A'=A$(即 $a_{ij}=a_{ji}$);

(5)　A 称为**传递的**,如果 $A^2\leqslant A$;

(6)　A 称为**紧的**,如果 $A\leqslant A^2$;

(7)　A 称为**幂等的**,如果 $A^2=A$;

(8)　A 称为**幂零的**,如果存在正整数 m,使得 $A^m=O_{n\times n}$;

(9)　A 称为 F **相似矩阵**,如果 A 是自反的,对称的;

(10)　A 称为 F **等价矩阵**,如果 A 是自反的,对称的,传递的.

此外,$\hat{A}=\sum\limits_{m=1}^{\infty}A^m=A+A^2+\cdots+A^m+\cdots$ 称为 A 的**传递闭包**(见定理 3.10).

例 4.5　设

$$A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix},$$

则 $A^2=A$, $B^2=B$,知 A,B 均是幂等的(因而是传递的);而

$$A+B=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0.2 & 0.2\\ 0.2 & 0.3\end{pmatrix},$$

可知$(A+B)^2\not\leq A+B$,故$A+B$不是传递的.

显然,§3中关于各种F关系的性质对相应的F矩阵成立,下面叙述一些进一步的性质.

定理 4.7　设$A=(a_{ij})$是对角占优的n阶F方阵,则$A\leqslant A^2\leqslant\cdots\leqslant A^{n-1}=A^n=\cdots$.

证明　设$A^m=(a_{ij}^{(m)})$,$m=2,3,\cdots$.于是,$\forall\ i,j$,由

$$a_{ij}^{(2)}=\bigvee_{k=1,2,\cdots,n}\{a_{ik}\wedge a_{kj}\}$$
$$=(a_{i1}\wedge a_{1j})\vee\cdots\vee(a_{ii}\wedge a_{ij})\vee\cdots\vee(a_{in}\wedge a_{nj})$$

及A的对角占优性质,知

$$a_{ij}=a_{ii}\wedge a_{ij}\leqslant a_{ij}^{(2)}.$$

从而　　$A\leqslant A^2\leqslant\cdots\leqslant A^{n-1}\leqslant A^n\leqslant\cdots$.

下面证明$A^n\leqslant A^{n-1}$.

首先,直接由数学归纳法易验证:当$m\geqslant 2$,

$$a_{ij}^{(m)}=\bigvee_{k_1,k_2,\cdots,k_{m-1}\in\{1,2,\cdots,n\}}\{a_{ik_1}\wedge a_{k_1k_2}\wedge\cdots\wedge a_{k_{m-1}j}\}.$$

其次,对$a_{ij}^{(n)}$的并展开式中任一项

$$a=a_{ik_1}\wedge a_{k_1k_2}\wedge\cdots\wedge a_{k_{n-1}j},$$

知脚标$i,k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},j$中至少有两个相同.

(i)　如果$i=k_s$,$1\leqslant s\leqslant n-1$,因

$$a\leqslant a_{ik_{s+1}}\wedge\cdots\wedge a_{k_{n-1}j}$$

及在A^{n-s}中

$$a_{ij}^{(n-s)}=\bigvee_{k_{s+1},\cdots,k_{n-1}}\{a_{ik_{s+1}}\wedge\cdots\wedge a_{k_{n-1}j}\}$$

$$\leqslant a_{ij}^{(n-1)},$$

从而 $a\leqslant a_{ij}^{(n-1)}$.

(ii) 如果 $j=k_s$, $1\leqslant s\leqslant n-1$, 类似可证 $a\leqslant a_{ij}^{(n-1)}$;

(iii) 如果 $k_r=k_s$, $1\leqslant r<s\leqslant n-1$, 因

$$a\leqslant a_{ik_1}\wedge\cdots\wedge a_{k_{r-1}k_r}\wedge a_{k_sk_{s+1}}\wedge\cdots\wedge a_{k_{n-1}j}$$

及在 A^{n-s+r} 中

$$a_{ij}^{(n-s+r)}=\bigvee_{k_1,\cdots,k_r=k_s,\cdots,k_{n-1}}\{a_{ik_1}\wedge\cdots\wedge a_{k_{r-1}k_r}\wedge a_{k_sk_{s+1}}\wedge\cdots\wedge a_{k_{n-1}j}\}$$

$$\leqslant a_{ij}^{(n-1)},$$

从而 $a\leqslant a_{ij}^{(n-1)}$.

总之,由项 a 的任意性, $\forall\ i,j$, $a_{ij}^{(n)}\leqslant a_{ij}^{(n-1)}$.

故 $A^n=A^{n-1}$. 证毕.

推论 4.8 设 n 阶 F 方阵 A 是自反的,则

$$E_n\leqslant A\leqslant A^2\leqslant\cdots\leqslant A^{n-1}=A^n=\cdots.$$

注 可见,对角占优的 F 方阵,自反 F 方阵是幂收敛的.

定理 4.9 设 $A=(a_{ij})\in[0,1]^{n\times n}$,则

$$\hat{A}=\sum_{m=1}^{n}A^m.$$

证明 只须证明

$$A^{n+1}\leqslant A+A^2+\cdots+A^n.$$

设 $A^m=(a_{ij}^{(m)})$, 当 $m\geqslant 2$, $\forall\ i,j$, 有

$$a_{ij}^{(m)}=\bigvee_{k_1,k_2,\cdots,k_{m-1}}\{a_{ik_1}\wedge a_{k_1k_2}\wedge\cdots\wedge a_{k_{m-1}j}\}$$

(见定理 4.7 的证明).

于是, $\forall\ i,j$, 存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得

$$a_{ij}^{(n+1)}=a_{ik_1}\wedge a_{k_1k_2}\wedge\cdots\wedge a_{k_nj},$$

其中 $i,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中至少有两个相同.

(i)　如果 $i=k_s$, $1\leqslant s\leqslant n$,则

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(n+1-s)} &\geqslant a_{ik_{s+1}} \wedge \cdots \wedge a_{k_n j} \\ &= a_{k_s k_{s+1}} \wedge \cdots \wedge a_{k_n j} \\ &\geqslant a_{ik_1} \wedge \cdots \wedge a_{k_s k_{s+1}} \wedge \cdots \wedge a_{k_n j} \\ &= a_{ij}^{(n+1)}. \end{aligned}$$

(ii)　如果 $k_r=k_s$, $1\leqslant r<s\leqslant n$. 则

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(n+1-s+r)} &\geqslant a_{ik_1} \wedge \cdots \wedge a_{k_{r-1}k_r} \wedge a_{k_r k_{s+1}} \wedge \cdots \wedge a_{k_n j} \\ &= a_{ik_1} \wedge \cdots \wedge a_{k_{r-1}k_r} \wedge a_{k_s k_{s+1}} \wedge \cdots \wedge a_{k_n j} \\ &\geqslant a_{ik_1} \wedge \cdots \wedge a_{k_{r-1}k_r} \wedge a_{k_r k_{r+1}} \wedge \cdots \\ &\quad \wedge a_{k_{s-1}k_s} \wedge a_{k_s k_{s+1}} \wedge \cdots \wedge a_{k_n j} \\ &= a_{ij}^{(n+1)}. \end{aligned}$$

总之,$\forall\ i,j$,存在正整数 $s=s(i,j)\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得 $a_{ij}^{(n+1-s)}\geqslant a_{ij}^{(n+1)}$. 从而有

$$A^{n+1} \leqslant A + A^2 + \cdots + A^n.$$

证毕.

推论 4.10　设 A 是 n 阶自反的 F 方阵,则

$$\hat{A} = A^{n-1}.$$

证明由定理 4.9,推论 4.8 立得.

推论 4.11　设 A 是 n 阶 F 相似矩阵,则 $\hat{A}=A^{n-1}$是 n 阶 F 等价矩阵.

证明由命题 3.19,推论 4.10 立得.

注　(1)　对于 n 阶自反的 F 方阵 A,因

$$\hat{A} = A^{n-1} = A^n = A^{n+1} = \cdots,$$

当 n 较大时,我们可以用“逐次平方法”来求得 A 的传递闭包 $\hat{A}$. 例

如 $n=15$，则依照平方法，计算四次

$$A \to A^2 \to A^4 \to A^8 \to A^{16},$$

便得到 $\hat{A}=A^{14}=A^{16}$.

(2) 上述“逐次平方法”用于 F 相似矩阵，则可容易得到相应的 F 等价矩阵.

命题 4.12 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶幂零的 F 方阵，则 A 是反自反的；反之，若 A 是自反的，传递的，则 A 是幂零的.

证明 设 A 是幂零的，即存在正整数 m，使得 $A^m=0$，于是，对任意 $i,k_1,k_2,\cdots,k_{m-1},j\in\{1,2,\cdots,n\}$，有

$$a_{ik_1}\wedge a_{k_1k_2}\wedge\cdots\wedge a_{k_{m-1}j}=0.$$

特别取 $i=k_1=k_2=\cdots=k_{m-1}=j$，知 $a_{ii}=0$. 故 A 是反自反的.

反之，对任意 $i,k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},j\in\{1,2,\cdots,n\}$，记

$$a=a_{ik_1}\wedge a_{k_1k_2}\wedge\cdots\wedge a_{k_{n-1}j},$$

则 $k_0=i,k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},k_n=j$ 中存在 r,s，且 $0\leqslant r<s\leqslant n$，$k_r=k_s$. 根据 A 的传递性及反自反性，

$$\begin{aligned}a&\leqslant a_{k_rk_{r+1}}\wedge a_{k_{r+1}k_{r+2}}\wedge\cdots\wedge a_{k_{s-1}k_s}\\&\leqslant a_{k_sk_s}\\&=0.\end{aligned}$$

从而，$a=0$，故 $A^n=0$. 证毕.

命题 4.13 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶对称的传递的 F 方阵，则 A 是幂等的.

证明 只须验证 $A\leqslant A^2$.

记 $A^2=(a_{ij}^{(2)})$，$\forall\ i,j$，因 $a_{ij}=a_{ji}$ 及 $A^2\leqslant A$，知 $a_{ij}=a_{ij}\wedge a_{ji}\leqslant a_{ii}^{(2)}\leqslant a_{ii}$，于是

$$a_{ij}=a_{ii}\wedge a_{ij}\leqslant a_{ij}^{(2)}.$$

故 $A\leqslant A^2$. 证毕.

命题 4.14　设 A 是 n 阶传递的或紧的 F 方阵,则 A 是幂收敛的.

证明　由定理 4.6,存在正整数 d,k,使得

$$A^{k+d}=A^k.$$

若 A 是传递的,知

$$A\geqslant A^2\geqslant\cdots\geqslant A^m\geqslant A^{m+1}\geqslant\cdots,$$

于是,

$$A^k\geqslant A^{k+1}\geqslant\cdots\geqslant A^{k+d}=A^k.$$

故 $A^{k+1}=A^k$,即 A 是幂收敛的.

同理可证,若 $A\leqslant A^2$ 时,A 是幂收敛的. 证毕.

命题 4.15　设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶 F 对称方阵($n\geqslant 2$),则

$$p(A)\leqslant 2,\quad i(A)\leqslant 2n\text{-}2.$$

证明　设 $A^2=(a_{ij}^{(2)})$,由 A 的对称性,$\forall\ i,j$,

$$\begin{aligned}a_{ij}^{(2)}&=\bigvee_{k=1,2,\cdots,n}\{a_{ik}\wedge a_{kj}\}\\&\leqslant\bigvee_{k=1,2,\cdots,n}\{a_{ik}\}\\&=\bigvee_{k=1,2,\cdots,n}\{a_{ik}\wedge a_{ki}\}\\&=a_{ii}^{(2)},\end{aligned}$$

知 A^2 是对角占优的 n 阶 F 方阵. 根据定理 4.7,$p(A^2)=1$,从而,存在正整数($n-1$),使得

$$A^{2n-2}=(A^2)^{n-1}=(A^2)^n=A^{2n}.$$

故 $p(A)\leqslant 2$,且 $i(A)\leqslant 2n-2$. 证毕.

设 $B\in[0,1]^{n\times m}$,显然 $B\circ B'$ 是 n 阶 F 对称方阵;反过来,我们要问:一个 n 阶 F 对称方阵,何时能表示成一个 F 矩阵与其转置 F 矩阵的乘积? 即 F 对称方阵的可实现问题.

定义 4.8 设 A 是 n 阶 F 对称方阵，如果存在 $B\in[0,1]^{n\times m}$，使得 $A=B\circ B'$，则称 A 是**可实现的**. 此时

$$r(A)=\min\{m\mid\exists\ B\in[0,1]^{n\times m},A=B\circ B'\}$$

称为 A 的**容度**.

易见，若 $A=B\circ B'$，则在 B 的右边添加任意有限列全为零的元素，作成的 F 矩阵 C，有 $A=C\circ C'$. 可见，适合 $A=B\circ B'$ 的 B 不是唯一的，且 m 无最大值.

例 4.6 n 阶 F 全矩阵 I 是可实现的，且 $r(I)=1$. 事实上，

$$I=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\&\cdots\cdots&\cdots&\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{n\times 1}\circ(1,1,\cdots,1)_{1\times n}.$$

例 4.7 n 阶 F 单位方阵 E_n 是可实现的，且 $r(E_n)=n$. 事实上，由 $E_n\circ E_n'=E_n$ 可知，E_n 是可实现的，且 $r(E_n)\leqslant n$. 若 $B=(b_{ik})\in[0,1]^{n\times m}$，$B\circ B'=E_n$，即

$$\bigvee_{k=1,2,\cdots,m}\{b_{ik}\wedge b_{jk}\}=\begin{cases}1, & 当\ i=j,\\0, & 当\ i\neq j.\end{cases}$$

于是，$\forall\ i$，$\max\{b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{im}\}=\bigvee\limits_{k=1,2,\cdots,m}\{b_{ik}\wedge b_{ik}\}=1$，可见，$B$ 中每行至少有一个元素是 1；若 $j\neq i$，因

$$\max\{b_{i1}\wedge b_{j1},b_{i2}\wedge b_{j2},\cdots,b_{im}\wedge b_{jm}\}=0,$$

知 B 的每一列至多只有一个元素为 1，从而 $m\geqslant n$.

故 $r(E_n)=n$.

定理 4.16 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶 F 对称方阵，则 A 是可实现的充要条件是：A 是对角占优的，即 $\forall\ i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，

$$a_{ij}\leqslant a_{ii}.$$

证明 必要性. 设 $A=B\circ B'$，$B=(b_{ik})\in[0,1]^{n\times m}$，则 $\forall\ i,j\in$

$\{1,2,\cdots,n\}$,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \bigvee_{k=1,2,\cdots,m} \{b_{ik} \wedge b_{jk}\} \\ &\leqslant \bigvee_{k=1,2,\cdots,m} \{b_{ik} \wedge b_{ik}\} \\ &= a_{ii}. \end{aligned}$$

充分性. 设$\forall\ i,j,a_{ij}\leqslant a_{ii}$,对$n$作数学归纳法.

当$n=1$,取$B=A$即得.

归纳假设n阶对角占优的F对称方阵是可实现的,设$A=(a_{ij})$是$(n+1)$阶对角占优的F对称方阵. 记$A_1=(a_{ij})_{n\times n}$为A的前n行、n列组成的F矩阵,知存在$B_1\in[0,1]^{n\times m}$,使得$A_1=B_1\circ B_1'$. 命

$$B=\left(\begin{array}{ccc:cccc} & & & a_{1,n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & a_{2,n+1} & \cdots & 0 \\ & B_1 & & & \cdots & & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n+1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,n+1} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{array}\right)\in[0,1]^{(n+1)\times(m+n)},$$

则易验证

$$B\circ B'=\left(\begin{array}{ccc:c} & & & a_{1,n+1} \\ & & & a_{2,n+1} \\ & A_1 & & \cdots \\ & & & a_{n,n+1} \\ a_{1,n+1} & \cdots & a_{n,n+1} & a_{n+1,n+1} \end{array}\right)=A.$$

啊故A是可实现的,归纳步骤完成. 证毕.

命题 4.17　设$A=(a_{ij})$是n阶可实现的F对称方阵,则当$n\geqslant 3$时,$r(A)\leqslant\dfrac{n(n-1)}{2}$.

证明　对n作数学归纳法.

当$n=3$,命

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

易见，有 $B \circ B' = A$，知 $r(A) \leqslant 3$，即结论成立.

归纳假设对 n 阶情形结论已成立，A 是 $(n+1)$ 阶可实现的 F 对称方阵，由定理 4.16 证明的充分性部份可见，

$$r(A) \leqslant \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

即结论对 A 成立，归纳步骤完成. 证毕.

命题 4.18 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶 F 对称方阵，且 $\forall\ i,j, a_{ij}<a_{ii}$（称严格对角占优），则 $r(A) \geqslant n$.

证明 据定理 4.16 知，A 是可实现的.

设 $B=(b_{ik}) \in [0,1]^{n \times m}$，$B \circ B' = A$，下证 $m \geqslant n$.

事实上，因 $a_{ii} = \bigvee\limits_{k=1,2,\cdots,m} \{b_{ik} \wedge b_{ik}\} = \bigvee\limits_{k=1,2,\cdots,m} b_{ik}$，存在 $k_i \in \{1,2,\cdots,m\}$，使得 $b_{ik_i} = a_{ii}$.

若 $m<n$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中至少有两个相同，设 $k_i = k_j (1 \leqslant i, j \leqslant n)$，于是

$$\begin{aligned} a_{ii} \wedge a_{jj} &= b_{ik_i} \wedge b_{jk_j} \\ &\leqslant \bigvee_{k=1,2,\cdots,m} \{b_{ik} \wedge b_{jk}\} \\ &= a_{ij}, \end{aligned}$$

此与 $a_{ij} < a_{ii} \wedge a_{jj}$ 矛盾，故 $m \geqslant n$. 证毕.

命题 4.19 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

是二阶可实现的 F 对称方阵，则 $r(A) \leqslant 2$，且 $r(A)=1$ 的充要条件是：$a_{12} = a_{11} \wedge a_{22}$.

证明　由定理 4.16 证明的充分性部份可知，$r(A)\leqslant 2$.

若 $r(A)=1$，即有

$$A=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\circ(a,b),\quad a,b\in[0,1].$$

于是，$a\wedge a=a_{11}$，$a\wedge b=a_{12}$，$b\wedge b=a_{22}$. 故

$$a_{11}\wedge a_{22}=a\wedge b=a_{12}.$$

反之，若 $a_{12}=a_{11}\wedge a_{22}$，命

$$B=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\end{pmatrix},$$

易见，$B\circ B'=A$. 故 $r(A)=1$. 证毕.

众所周知，秩是矩阵的重要数值函数，它与矩阵的许多重要性质有关. 现在我们把秩的概念推广到 F 矩阵的情形.

为此，先作一点准备，以下 $[0,1]^{1\times n}$ 中的 F 矩阵称为 n 维 **F 行向量**，$[0,1]^{m\times 1}$ 中的 F 矩阵称为 m 维 **F 列向量**，并常记为 $V_n=[0,1]^{1\times n}$，$V^m=[0,1]^{m\times 1}$.

设 $\lambda\in[0,1]$，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in Vn$，命

$$\lambda X=(\lambda\wedge x_1,\lambda\wedge x_2,\cdots,\lambda\wedge x_n),$$

即 $\lambda X=\lambda\circ X$，其中 λ 视为 1×1 的 F 矩阵.

定义 4.9　设 $W=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}\subseteq V_n$，则 n 维 F(行)向量

$$X=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i X_i,\quad \lambda_i\in[0,1],i=1,2,\cdots,m,$$

称为 F(行)向量组 W 的**线性组合**.

进而，若 F 向量组 $U\subseteq V_n$ 中每个 F 向量都是 W 的线性组合，则称 W 是 U 的**生成组**.

例 4.8　在 V_2 中，设

$X_1=(0.8,0.3)$，$X_2=(0.4,0.6)$，

$$Y_1=(0.6,0.3),Y_2=(0.5,0.6),Y_3=(0.8,0.6).$$

则$\{X_1,X_2\}$是$\{Y_1,Y_2,Y_3\}$的生成组,因为

$$Y_1=0.6X_1+0.3X_2,$$

$$Y_2=0.5X_1+X_2,$$

$$Y_3=X_1+X_2.$$

定义 4.10 设$W\subseteq V_n$,如果$\forall\ X\in W$,X都不是F向量组$W\setminus\{X\}$的线性组合,则称W是V_n中**线性无关**的F向量组;否则W称为**线性相关**的F向量组.

例如.易验证在V_2中,例4.8的$\{X_1,X_2\}$,$\{Y_1,Y_2,Y_3\}$都是线性无关的F向量组.

注 由此可见,与通常线代数中不同:(*i*)线性无关的F向量的个数可以超过F向量的维数;(*ii*)同一F向量组的线性无关的生成组可以有不同个数的向量.

定义 4.11 设$U\subseteq V_n$,如果适合:

(i) $O=O_{1\times n}\in U$;

(ii) $X_1,X_2\in U\Rightarrow X_1+X_2\in U$;

(iii) $X\in U,\lambda\in[0,1]\Rightarrow\lambda X\in U$,

则称U是V_n的**子空间**.

易见,V_n中F向量组$W=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$的所有线性组合的F向量的集合

$$\langle W\rangle=\{X=\sum_{i=1}^{m}\lambda_iX_i\,|\,X_i\in W,\lambda_i\in[0,1]\}$$

是V_n中包含W的最小子空间,称为W**生成的子空间**.

现在我们将上述概念用到F矩阵上来.

定义 4.12 设$A=(a_{ij})\in[0,1]^{m\times n}$,则$A$的$F$行向量为$X_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\in V_n$,$i=1,2,\cdots,m$.由$\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$生成的$V_n$的

子空间称为 F 矩阵 A 的**行空间**，记为 $R(A)$.

命

$$\rho_r(A) = \min\{|W| \mid \langle W\rangle = R(A)\},$$

其中 $|W|$ 表示 F 向量组 W 的基数(W 是有限集即所含 F 向量的个数). 我们称 $\rho_r(A)$ 为 F 矩阵 A 的**行秩**.

类似可定义 F 矩阵 A 的**列空间** $C(A)$ 及 A 的**列秩**

$$\rho_c(A) = \min\{|W| \mid \langle W\rangle = C(A)\}.$$

进而，如果 $\rho_r(A)=\rho_c(A)=r$，则称 F 矩阵的秩 $\rho(A)$ 为 r.

例 4.9　设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.7 & 0 \\ 0.7 & 0.6 & 0 \end{pmatrix},$$

则易见，$\rho_c(A)=2$，$\rho_r(A)=3$(后者证明的方法可参见命题 4.20，或见命题 4.21 后的注).

可见，F 矩阵的行秩与列秩不一定相等.

命题 4.20　$\rho_r(E_n)=\rho_c(E_n)=n$.

证明　设

$X_1=(1,0,0,\cdots,0)$,

$X_2=(0,1,0,\cdots,0)$,

……………

$X_n=(0,0,0,\cdots,1)$

是 n 阶单位方阵 E_n 的 F 行向量组，按定义，$\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 是 $R(E_n)$ 的一个生成组，故 $\rho_r(E_n)\leqslant n$.

现在设

$Y_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$,

$Y_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$,

……………

$$Y_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$$

是 $R(E_n)$ 的生成组，因而 $X_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 的线性组合，即存在 $\lambda_{ij}\in[0,1]$，使得

$$X_i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}Y_j,i=1,2,\cdots,n,$$

从而

$$\bigvee_{j=1,2,\cdots,m}\{\lambda_{ij}\wedge a_{jk}\}=\begin{cases}1,当\ k=i,\\0,当\ k\neq i.\end{cases}$$

于是，对 $i=1$，存在 $s:1\leqslant s\leqslant m$，使得 $\lambda_{1s}=1,a_{s1}=1$，且当 $k\neq1$，$a_{sk}=0$ 时，知 $Y_s=X_1$.

同理，$X_2,\cdots,X_n\in\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_m\}$.

故 $m\geqslant n,\rho_r(E_n)=n$.

类似可证，$\rho_c(E_n)=n$.［或因 $E_n'=E_n$，有

$$\rho_c(E_n)=\rho_r(E_n')=\rho_r(E_n)=n.］$$

证毕.

命题 4.21　设 $A=[0,1]^{m\times n}$，$\rho_r(A)=r$. F 向量组 $W=\{X_1,X_2,\cdots,X_r\}\subseteq R(A)$ 是 $R(A)$ 的生成组. 则 W 是线性无关的 F 向量组.

证明　假设 W 是线性相关的 F 向量组，则存在 $X_i\in W$ 是 $W\backslash\{X_i\}$ 的线性组合. 于是，$\langle W\backslash\{X_i\}\rangle=R(A)$，而 $|W\backslash\{X_i\}|=r-1$，此与 $\rho_r(A)=r$ 矛盾. 证毕.

注　(1)　进一步可以证明：设 F 矩阵 A 的行向量组 $W=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$，如果 $X_1,X_2,\cdots,X_r(r\leqslant m)$ 线性无关且当 $i>r$，X_i 是 $X_1,X_2,\cdots,X_r$ 的线性组合，则 $\rho_r(A)=r$. 这是计算 F 矩阵的行秩的重要方法之一.

(2)　对 A 的列秩有类似于命题 4.21 及注(1)的结论.

现在介绍 F 矩阵的另一种秩.

定义 4.13 设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in V_m, Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in V_n$,则

$$X' \circ Y = (x_i \wedge y_i) \in [0,1]^{m\times n}$$

称为 F 向量 X 与 Y 的**叉积**.

设 $A\in[0,1]^{m\times n}$,则称

$$\rho_s(A)=\min\{s \mid A=\sum_{i=1}^{s} X_i' \circ Y_i, X_i\in V_m, Y_i\in V_n\}$$

为 F 矩阵 A 的**沙因**(**Schein**)**秩**,即和为 A 的 F 向量的叉积的最小个数.

例如,因

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}=(1,0.5)' \circ (1,0.3),$$

$\rho_s(A)=1$.

引理 4.22 $A\in[0,1]^{m\times n}(A\neq O_{m\times n})$是 F 向量的叉积的充要条件是 $\rho_r(A)=1=\rho_c(A)$.

证明 只证行秩的情形.

必要性. 设 $A=X' \circ Y$,其中

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m), Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

即

$$A=\begin{pmatrix} x_1\wedge y_1 & x_1\wedge y_2 & \cdots & x_1\wedge y_n \\ x_2\wedge y_1 & x_2\wedge y_2 & \cdots & x_2\wedge y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_m\wedge y_1 & x_m\wedge y_2 & \cdots & x_m\wedge y_n \end{pmatrix}.$$

记$\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$是 A 的 F 行向量组,且不妨设

$$x_1=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\in(0,1],$$

则易见,$X_i=x_iX_1, i=2,3,\cdots,m$. 故 $\rho_r(A)=1$.

充分性. 设 $\rho_r(A)=1$,不妨设 A 的 F 行向量组 $\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$ 有 $X_i=\lambda_i X_1, i=2,3,\cdots,m, X_1\neq O_{1\times n}$.

则

$$A=\begin{pmatrix}1\\ \lambda_2\\ \cdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}\circ X_1=(1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)'\circ X_1.$$

故 A 是 F 向量的叉积. 证毕.

于是,我们有

命题 4.23 F 矩阵 A 的沙因秩 $\rho_s(A)$ 是其和为 A 的,秩为的矩阵的最小个数.

下面的定理给出沙因秩的几何意义.

定理 4.24 设 $A\in[0,1]^{m\times n}$,则

(i) $\rho_s(A)\leqslant\min\{\rho_r(A),\rho_c(A)\}$;

(ii) $\rho_s(A)=\min\{|W|\,|\,W\subseteq V_n, R(A)\subseteq\langle W\rangle\}$.

证明 (i) 设 $\rho_r(A)=r, S=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_r\}\subseteq R(A)$ 且 $\langle S\rangle=R(A)$. 于是,A 的 F 行向量组 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 是 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_r$ 的线性组合,即存在 $\lambda_{ij}\in[0,1], i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,r$,使得

$$X_i=\lambda_{i1}Y_1+\lambda_{i2}Y_2+\cdots+\lambda_{ir}Y_r,$$

从而

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_{11}\\ \lambda_{21}\\ \cdots\\ \lambda_{m1}\end{pmatrix}\circ Y_1+\begin{pmatrix}\lambda_{12}\\ \lambda_{22}\\ \cdots\\ \lambda_{m2}\end{pmatrix}\circ Y_2+\cdots+\begin{pmatrix}\lambda_{1r}\\ \lambda_{2r}\\ \cdots\\ \lambda_{mr}\end{pmatrix}\circ Y_r$$

故 $\rho_s(A)\leqslant r=\rho_r(A)$.

同理可证,$\rho_s(A)\leqslant\rho_c(A)$.

(ii)　设 $S=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_k\}\subseteq V_n$，$R(A)\subseteq\langle S\rangle$，其中

$$k=\min\{|W|\mid W\subseteq V_n,R(A)\subseteq\langle W\rangle\}.$$

仿(i)可证，$\rho_s(A)\leqslant k$.

反过来，设 $s=\rho_s(A)$，即有 $A=\sum_{j=1}^{s}B_j'\circ C_j$，其中

$$B_j=(b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{mj})\in V_m,C_j\in V_n.$$

从而

$$A=\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\cdots\\b_{m1}\end{pmatrix}\circ C_1+\begin{pmatrix}b_{12}\\b_{22}\\\cdots\\b_{m2}\end{pmatrix}\circ C_2+\cdots+\begin{pmatrix}b_{1s}\\b_{2s}\\\cdots\\b_{ms}\end{pmatrix}\circ C_s,$$

于是，对 A 的 F 行向量组 $X_1,X_2,\cdots,X_m$，有

$$X_i=\sum_{j=1}^{s}b_{ij}C_j,i=1,2,\cdots,m.$$

记 $W=\{C_1,C_2,\cdots,C_s\}\subseteq V_n$，知

$$R(A)\subseteq\langle W\rangle.$$

故 $k\leqslant s=\rho_s(A)$.

总之，$\rho_s(A)=\min\{|W|\mid W\subseteq V_n,R(A)\subseteq\langle W\rangle\}$.

证毕.

注　同理可证

$$\rho_s(A)=\min\{|W|\mid W\subseteq V_m,C(A)\subseteq\langle W\rangle\}.$$

现在我们来给出 F 矩阵的正则性及广义逆矩阵的概念.

定义 4.14　设 $A\in[0,1]^{m\times n}$，若存在 $B\in[0,1]^{n\times m}$，使得

$$A\circ B\circ A=A,$$

则称 F 矩阵 A 是**正则的**，此时，F 矩阵 B 称为 A 的**广义逆**（或 **G 逆**）.

例 4.10　设

$$A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.3\\ 0.4 & 0.4\end{pmatrix},$$

因 $A_2=A$，知 A 是正则的且 A 是 A 的 G 逆；同时因

$$\begin{pmatrix}0.3 & 0.3\\ 0.4 & 0.4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.5 & 0.8\\ 0.7 & 0.6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.3 & 0.3\\ 0.4 & 0.4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.3\\ 0.4 & 0.4\end{pmatrix},$$

知

$$B=\begin{pmatrix}0.5 & 0.8\\ 0.7 & 0.6\end{pmatrix}$$

也是 A 的 G 逆，可见，正则 F 矩阵的 G 逆不是唯一的.

定理 4.25 设 $A\in[0,1]^{m\times n}$，则 A 是正则的充要条件是存在 n 阶 F 方阵 C 及 $B\in[0,1]^{n\times m}$，使得

$$A\circ C=A,\quad B\circ A=C.$$

证明 充分性是明显的($A\circ B\circ A=A$).

必要性. 设 A 是正则的，即存在 $B\in[0,1]^{n\times m}$，使得 $A\circ B\circ A=A$，记 $C=B\circ A\in[0,1]^{n\times n}$，则 $A\circ C=A$. 故条件成立. 证毕.

定理的意义，在于判别 F 矩阵是否正则以及求它的广义逆矩阵，都归结于解相应的 F 关系方程(参见 § 5).

下面的定理进一步给出判定正则性及计算最大广义逆的具体方法.

定理 4.26 设 $A=(a_{ij})\in[0,1]^{m\times n}$，命 $D=(d_{kl})\in[0,1]^{n\times m}$，其中

$$d_{kl}=\bigwedge\{a_{ij}\mid a_{ij}<a_{ik}\wedge a_{lj}\},$$

$$k=1,2,\cdots,n,\ l=1,2,\cdots,m.$$

则 A 是正则的充要条件是 $A\circ D\circ A=A$；且此时，D 是 A 的最大广义逆(即若 B 是 A 的任一广义逆，有 $B\leqslant D$).

证明 充分性显然，现证必要性.

设 A 是正则的，则存在 $B=(b_{kl})\in[0,1]^{n\times m}$，使得 $A\circ B\circ A=A$，即 $\forall\ i,j$，

$$a_{ij}=\bigvee_{l=1}^{m}\{[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kl})]\wedge a_{lj}\}$$

$$=\bigvee_{l=1}^{m}\bigvee_{k=1}^{n}\{a_{ik}\wedge b_{kl}\wedge a_{lj}\}.$$

于是，$\forall\ k,l,a_{ij}\geqslant a_{ik}\wedge b_{kl}\wedge a_{lj}$.

若 $a_{ij}<a_{ik}\wedge a_{lj}$，知 $0\leqslant b_{kl}\leqslant a_{ij}$，从而

$$b_{kl}\leqslant\wedge\ \{a_{ij}|a_{ij}<a_{ik}\wedge a_{lj}\}=d_{kl},$$

故 $B\leqslant D$，且 $A=A\circ B\circ A\leqslant A\circ D\circ A$.

下面验证 $A\circ D\circ A\leqslant A$.

事实上，记 $C=(c_{ij})=A\circ D\circ A$，知

$$c_{ij}=\bigvee_{l=1}^{m}\bigvee_{k=1}^{n}\{a_{ik}\wedge d_{kl}\wedge a_{lj}\}.$$

于是，$\forall\ k,l$，

若 $a_{ij}\geqslant a_{ik}\wedge a_{lj}$，自然有

$$a_{ij}\geqslant a_{ik}\wedge a_{kl}\wedge a_{lj};$$

若 $a_{ij}<a_{ik}\wedge a_{lj}$，因

$$d_{kl}=\wedge\ \{a_{ij}|a_{ij}<a_{ik}\wedge a_{lj}\},$$

知 $a_{ik}\wedge d_{kl}\wedge a_{lj}\leqslant d_{kl}\leqslant a_{ij}$.

故 $c_{ij}\leqslant a_{ij}$，即 $A\circ D\circ A\leqslant A$.

综上可知，$A\circ D\circ A=A$，且可见 D 是正则的 F 矩阵 A 的最大广义逆. 证毕.

例 4.11　设

$$A=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0.3\\ 0.4 & 0.4 & 0.3\\ 0.2 & 0.2 & 0.5\end{pmatrix}$$

按定理 4.26 中 D 的定义计算，得到

$$D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0.3\\ 1 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.2 & 1\end{pmatrix}.$$

（注意到 $\wedge\varnothing=1$）.

由于，$A\circ D\circ A=A$，故 A 是正则的，且 D 是 A 的最大 G 逆.

本节最后，我们引入 F 矩阵的不变式这一重要的矩阵函数，它推广了分明矩阵代数中行列式的概念及一些相应的性质. F 矩阵的不变式已在判断 F 矩阵是否正则，简化秩的计算及 F 关系方程的求解等方面找到它的应用.

定义 4.15 设 $A=(a_{ij})\in[0,1]^{m\times n}$，$m\leqslant n$，则 F 矩阵 A 的**不变式**定义为

$$\mathrm{Per}(A)=\bigvee_{\sigma\in S}\left(\bigwedge_{i=1}^{m}a_{i\sigma(i)}\right),$$

其中 S 是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全体单射的集合.

例如，设

$$A=(0.1\quad 0.2),\quad B=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.5 & 0.7\end{pmatrix},$$

则 $\qquad \mathrm{Per}(A)=0.1\vee 0.2=0.2,$

$\qquad \mathrm{Per}(B)=(0.4\wedge 0.7)\vee(0.6\wedge 0.5)=0.5.$

根据定义，容易直接验证如下性质：

(i) $A\leqslant B\Rightarrow \mathrm{Per}(A)\leqslant \mathrm{Per}(B)$；

(ii) $\mathrm{Per}(A+B)\geqslant \max\{\mathrm{Per}(A),\mathrm{Per}(B)\}$；

(iii) 若 $A\in[0,1]^{n\times n}$，则 $\mathrm{Per}(A')=P_{er}(A)$；

(iv) 若 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶可实现的 F 对称方阵，则

$$\mathrm{Per}(A)=\bigwedge_{i=1,2,\cdots,n}a_{ii}.$$

下面的定理是关于 F 矩阵的不变式的展开式定理，相应于矩

阵代数中行列式的拉普拉斯展开式定理.

设 $A=(a_{ij})\in[0,1]^{m\times n}$,记

$\Omega_{r,m}=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\mid 1\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_r\leqslant m\}$,其中 α_1,$\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 皆为整数.

对 $\alpha\in\Omega_{r,m},\beta\in\Omega_{s,n}$,记 $A[\alpha|\beta]$为所选定的 A 的行 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$及列 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$所组成的 A 的子阵($r\times s$ 的 F 矩阵),$A(\alpha|\beta)$为划去 A 的行 α 及列 β 后余下的行,列所组成的 A 的子阵($(m-r)\times(n-s)$的 F 矩阵).

定理 4.27 设 $A=(a_{ij})\in[0,1]^{m\times n}$,$2\leqslant m\leqslant n$. 则 $\forall\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\in\Omega_{r,m}$,有

$$\mathrm{Per}(A)=\bigvee_{\beta\in\Omega_{r,n}}\{\mathrm{Per}(A[\alpha|\beta])\wedge\mathrm{Per}(A(\alpha|\beta))\}.$$

特别,对 i:$1\leqslant i\leqslant m$,有

$$\mathrm{Per}(A)=\bigvee_{j=1}^{n}\{a_{ij}\wedge\mathrm{Per}(A(i|j))\}.$$

证明 设 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)\in\Omega_{r,n}$,因

$$\mathrm{Per}(A[\alpha|\beta])\wedge\mathrm{Per}(A(\alpha|\beta))$$
$$=\Big[\bigvee_{\sigma_1\in S_1}\{\bigwedge_{i=1}^{r}a_{\alpha_i\sigma_1(\alpha_i)}\}\Big]\wedge\Big[\bigvee_{\sigma_2\in S_2}\{\bigwedge_{j=r+1}^{m}a_{\alpha_j\sigma_2(\alpha_j)}\}\Big],$$

其中 S_1 是$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$到$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}$的全体单射的集合,$S_2$ 是$\{\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m\}$到$\{\beta_{r+1},\cdots,\beta_n\}$的全体单射的集合,且$\sigma_1(\alpha_i)\neq\sigma_2(\alpha_j)$,$\sigma_1\in S_1,\sigma_2\in S_2,i=1,2,\cdots,r,j=r+1,\cdots,m$.

这里,$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$,$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$分别是$\{1,2,\cdots,m\}$,$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列.

于是,因 S_1,S_2 为有限集及格$[0,1]$的分配性,

$$\mathrm{Per}(A)\geqslant\mathrm{Per}(A[\alpha|\beta])\wedge\mathrm{Per}(A(\alpha|\beta)).$$

由 $\beta\in\Omega_{r,n}$的任意性,

$$\mathrm{Per}(A)\geqslant\bigvee_{\beta\in\Omega_{r,n}}\{\mathrm{Per}(A[\alpha|\beta])\wedge\mathrm{Per}(A(\alpha|\beta))\}.$$

另一方面，设 S 是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全体单射的集合，$\forall\ \sigma\in S$，

$$\bigwedge_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)} = \left[\bigwedge_{i=1}^{r} a_{\alpha_i\sigma(\alpha_i)}\right] \wedge \left[\bigwedge_{j=r+1}^{m} a_{\alpha_j\sigma(\alpha_j)}\right],$$

其中 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m\}$ 是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个排列，因此，存在 $\beta\in\Omega_{r,n}$ 及 $\sigma_1\in S_1$，$\sigma_2\in S_2$，使得

$$\bigwedge_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)} = \left[\bigwedge_{i=1}^{r} a_{\alpha_i\sigma_1(\alpha_i)}\right] \wedge \left[\bigwedge_{j=r+1}^{m} a_{\alpha_j\sigma_2(\alpha_j)}\right].$$

故
$$\bigvee_{\beta\in\Omega_{r,n}} \{\mathrm{Per}(A[\alpha|\beta]) \wedge \mathrm{Per}(A(\alpha|\beta))\}$$
$$\geqslant \bigvee_{\sigma\in S} \left(\bigwedge_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)}\right) = \mathrm{Per}(A).$$

综上可知，我们有

$$\mathrm{Per}(A) = \bigvee_{\beta\in\Omega_{r,n}} \{\mathrm{Per}(A[\alpha|\beta]) \wedge \mathrm{Per}(A(\alpha|\beta))\}.$$

证毕.

§5 F 关系方程

F 关系方程在模糊数学的理论及应用中占有重要的地位.

F 关系方程一般有两种类型：

Ⅰ. 已知 F 关系 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，$S\in\mathscr{F}(X\times Z)$，求 F 关系 $P\in\mathscr{F}(Y\times Z)$，使得满足方程

$$R\circ P = S.$$

Ⅱ. 已知 F 关系 $P\in\mathscr{F}(Y\times Z)$，$S\in\mathscr{F}(X\times Z)$，求 F 关系 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，使得满足方程

$$R\circ P = S.$$

容易看出，对于类型Ⅱ的 F 关系方程，如考虑 F 关系的逆关系（转置关系），有

$$P^{-1} \circ R^{-1} = S^{-1}.$$

于是，对已知的 F 关系 P^{-1}，S^{-1}，按类型 I 求解 F 关系 R^{-1}，从而求出 F 关系 R. 因此，本节仅讨论类型 I 的 F 关系方程的求解问题.

定义 5.1 设 $R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$S \in \mathscr{F}(X \times Z)$，我们称

$$\mathscr{P} = \{P \in \mathscr{F}(Y \times Z) \mid R \circ P = S\}$$

为 F 关系方程 $R \circ P = S$ 的**解集**.

若 $\mathscr{P} \neq \varnothing$，则 $\langle \mathscr{P}, \leqslant \rangle$ 是偏序集.

(i) 如果 $\langle \mathscr{P}, \leqslant \rangle$ 有最大元（或极大元）P^*，则称 P^* 是 F 关系方程 $R \circ P = S$ 的**最大解**（或极大解）；

(ii) 如果 $\langle \mathscr{P}, \leqslant \rangle$ 有极小元（或最小元）P_*，则称 P_* 是 F 关系方程 $R \circ P = S$ 的**极小解**（或最小解）.

显然，当 $P_1, P_2 \in \mathscr{P}$，$P \in \mathscr{F}(Y \times Z)$ 适合

$$P_1 \leqslant P \leqslant P_2,$$

则 $P \in \mathscr{P}$.

当论域是有限集时，F 关系方程即为 F 矩阵方程。

设 $A = (a_{ij}) \in [0,1]^{m \times n}$，$B = (b_{ik}) \in [0,1]^{m \times s}$，求 F 矩阵 $X = (x_{jk}) \in [0,1]^{n \times s}$，使得

$$A \circ X = B.$$

（类似有 II 型的 F 矩阵方程 $X \circ A = B$.）

下面的定理是本节的基本定理之一.

定理 5.1 设 $R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$S \in \mathscr{F}(X \times Z)$. 命 $P^* \in \mathscr{F}(Y \times Z)$，$\forall\ (y,z) \in Y \times Z$，

$$P^*(y,z) = \bigwedge_{x \in X}\{S(x,z) \mid S(x,z) < R(x,y)\},$$

（注意 $\bigwedge \varnothing = 1$）则 F 关系方程 $R \circ P = S$ 的解集 $\mathscr{P} \neq \varnothing$ 的充要条件是 $P^* \in \mathscr{P}$，且此时 P^* 是 $R \circ P = S$ 的最大解.

证明 条件的充分性是明显的，现证必要性.

设 $\mathscr{P}\neq\varnothing$，即有 $P\in\mathscr{F}(Y\times Z)$，适合 $R\circ P=S$. 于是 $\forall\ (x,z)\in X\times Z$，

$$\bigvee_{y\in Y}[R(x,y)\ \wedge\ P(y,z)]=S(x,z),$$

因而，$\forall\ y\in Y, R(x,y)\wedge P(y,z)\leqslant S(x,z)$. 从而，$\forall\ x\in X, y\in Y, z\in Z$，若 $R(x,y)>S(x,z)$，有 $P(y,z)\leqslant S(x,z)$，故

$$P(y,z)\leqslant\bigwedge_{x\in X}\{S(x,z)\mid S(x,z)<R(x,y)\}=P^*(y,z).$$

即 $P\leqslant P^*$.

另一方面，$\forall\ x\in X, y\in Y, z\in Z$，

若 $R(x,y)\leqslant S(x,z)$，有

$$R(x,y)\ \wedge\ P^*(y,z)\leqslant S(x,z);$$

若 $R(x,y)>S(x,z)$，有

$$\begin{aligned}R(x,y)\ \wedge\ P^*(y,z)&\leqslant P^*(y,z)\\&=\bigwedge_{u\in X}\{S(u,z)\mid S(u,z)<R(u,y)\}\\&\leqslant S(x,z).\end{aligned}$$

于是，$\forall\ (x,z)\in X\times Z$

$$\bigvee_{y\in Y}[R(x,y)\ \wedge\ P^*(y,z)]\leqslant S(x,z),$$

即 $R\circ P^*\leqslant S$. 由

$$S=R\circ P\leqslant R\circ P^*\leqslant S,$$

知 $R\circ P^*=S$.

故 $P^*\in\mathscr{P}$ 且 P^* 是 $R\circ P=S$ 的最大解. 证毕.

注　定理给出 F 关系方程有解的判定方程，且在有解时，求出其最大解.

推论 5.2　设 $A=(a_{ij})\in[0,1]^{m\times n}, B=(b_{ik})\in[0,1]^{m\times s}$，则 F 矩阵方程 $A\circ X=B$ 有解的充要条件是 $A\circ\bar{X}=B$，其中 $\bar{X}=(\bar{x}_{ik})\in[0,1]^{n\times s}$，$\forall\ j=1,2,\cdots,n, k=1,2,\cdots,s$，

$$\bar{x}_{jk}=\bigwedge_{i=1,2,\cdots,m}\{b_{ik}\mid b_{ik}<a_{ij}\};$$

且此时 $\overline{X}$ 是 $A\circ X=B$ 的最大解. 证毕.

例 5.1 设 $X=Y=Z=[0,2]$,命

$$R(x,y)=\frac{x+y}{4},\quad x\in X,y\in Y,$$

$$S(x,z)=\frac{x+z}{4},\quad x\in X,z\in Z.$$

求证 F 关系方程 $R\circ P=S$ 有解,并求出其最大解.

解 首先,按 P^* 的定义,$\forall\ y\in Y,z\in Z$,

$$P^*(y,z)=\bigwedge_{x\in X}\{S(x,z)\mid S(x,z)<R(x,y)\},$$

而 $S(x,z)<R(x,y)\Leftrightarrow\frac{x+z}{4}<\frac{x+y}{4}\Leftrightarrow 0\leqslant z<y\leqslant 2$.

故

$$P^*(y,z)=\begin{cases}\bigwedge\{\frac{x+z}{4}\mid x\in X\}, & \text{当 } 0\leqslant z<y\leqslant 2,\\ 1, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant z\leqslant 2,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{z}{4}, & \text{当 } 0\leqslant z<y\leqslant 2,\\ 1, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant z\leqslant 2.\end{cases}$$

其次,验证 $R\circ P^*=S$. $\forall\ (x,z)\in X\times Z$,

$$\bigvee_{y\in Y}[R(x,y)\wedge P^*(y,z)]$$

$$=[\bigvee_{0\leqslant z<y\leqslant 2}(\frac{x+y}{4}\wedge\frac{z}{4})]\vee[\bigvee_{0\leqslant y\leqslant z\leqslant 2}(\frac{x+y}{4}\wedge 1)]$$

$$=[\bigvee_{y\in(z,2]}\frac{z}{4}]\vee[\bigvee_{y\in[0,z]}\frac{x+y}{4}]$$

$$=\frac{z}{4}\vee\frac{x+z}{4}=\frac{x+z}{4}$$

$$=S(x,z).$$

于是,由定理 5.1 知,$R\circ P=S$ 有解,且 P^* 为其最大解.

例 5.2 判断 F 矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

是否有解？并在有解时求出最大解.

解 因 $\bar{x}_j = \bigwedge_{i=1,2,3}\{b_i \mid b_i < a_{ij}\}, j=1,2,3$，知 $\bar{x}_1 = 0.2 \wedge 0.4 = 0.2, \bar{x}_2 = \wedge \varnothing = 1, \bar{x}_3 = 0.4$，而

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

故原 F 矩阵方程有解，且 $\bar{X} = (0.2, 1, 0.4)'$，是最大解.

注 对例 5.2 的 F 矩阵方程，进一步容易验证：

(1) $$X_1 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

也是 F 矩阵方程的解；

(2) X_1, X_2 均是方程的极小解(因而方程无最小解).

事实上，设

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.4 \end{pmatrix},$$

知 $x_2 = 0, x_1 \leqslant 0.2, x_3 \leqslant 0.4$ 且其中至少有一个不等号成立. 而当 $x_1 < 0.2$ 时，有

$$(0.3 \wedge x_1) \vee (0.2 \wedge 0) \vee (0 \wedge x_3) < 0.2,$$

当 $x_3 < 0.4$ 时，有

$$(0.5 \wedge x_1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0.6 \wedge x_3) < 0.4.$$

故 X 不是 F 矩阵方程的解，即 X_1 是极小解.

同理，X_2 是极小解.

从定理 5.1 知，当 F 关系方程 $R\circ P=S$ 的解集 $\mathscr{P}\neq\varnothing$，$\mathscr{P}$ 总有最大解. 为了求出 $R\circ P=S$ 的解集，如果能够求出 $\mathscr{P}$ 的最小元 P_*（$R\circ P=S$ 的最小解），则

$$\mathscr{P}=\{P\in\mathscr{F}(Y\times Z)\,|\,P_*\leqslant P\leqslant P^*\}.$$

然而，一般情况下 $\mathscr{P}$ 无最小元（参见例 5.2 后的注）. 因此，我们常常转而求 $\mathscr{P}$ 的一切极小元（$R\circ P=S$ 的极小解）. 下面我们来考虑有限论域上 F 关系方程（即 F 矩阵方程）的解集的求法.

设 F 矩阵方程 $A\circ X=B$，其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ik})_{m\times s}$ 为已知 F 矩阵，$X=(x_{jk})_{n\times s}$ 为未知 F 矩阵.

记 X 的 F 列向量组为 $X_1,X_2,\cdots,X_s$，B 的 F 列向量组为 B_1，$B_2,\cdots,B_s$，则

$$A\circ X=B\Leftrightarrow A\circ X_k=B_k,k=1,2,\cdots,s.$$

换言之，求解一般的 F 矩阵方程 $A\circ X=B$ 可代归于求解若干个下述形式的简单 F 矩阵方程组成的方程组：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

因此，本节下面仅讨论这种简单 F 矩阵方程的求解问题. 为此，以下普通设 F 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_i)_{m\times l}$，$X=(x_j)_{n\times l}$

命

$$\bar{X}=\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix},\text{其中 } \bar{x}_j=\bigwedge_{i=1,2,\cdots,m}\{b_i\,|\,b_i<a_{ij}\},j=1,2,\cdots,n.$$

(约定$\wedge \varnothing=1$)由推论 5.2,F 矩阵方程 $A \circ X=B$ 有解的充要条件是 $A \circ \bar{X}=B$,且此时,$\bar{X}$ 是方程的最大解.

下面的定理是本节的另一个基本定理.

定理 5.3 F 矩阵方程 $A \circ X=B$,$\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)'$ 等如前述.对 $i=1,2,\cdots,m$,记

$$S_i=\{s_i \in \{1,2,\cdots,n\} \mid a_{is_i} \wedge \bar{x}_{s_i}=b_i\},$$

及
$$S=\{s=(s_1,s_2,\cdots,s_m) \mid s_i \in S_i, i=1,2,\cdots,m\}.$$

(i) $A \circ X=B$ 有解的充要条件是 $S \neq \varnothing$;

(ii) 若 $S \neq \varnothing$,$\forall\, s=(s_1,s_2,\cdots,s_n) \in S$,命

$X_s=(x_1^s,x_2^s,\cdots,x_n^s)'$.

其中
$$x_j^s=\bigvee_{i=1,2,\cdots,m}\{b_i \mid s_i=j\}, j=1,2,\cdots,n.$$

(注意$\vee \varnothing=0$)则 $A \circ X=B$ 的解集为

$$\mathscr{P}=\bigcup_{s \in S}\{X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)' \mid X_s \leqslant X \leqslant \bar{X}\}.$$

证明 (i) 必要性.设 F 矩阵方程 $A \circ X=B$ 有解,由推论 5.2,$A \circ \bar{X}=B$,即$\forall\, i=1,2,\cdots,m$,

$$\bigvee_{j=1,2,\cdots,n}[a_{ij} \wedge \bar{x}_j]=b_i.$$

于是,$\forall\, i$,存在 $s_i \in \{1,2,\cdots,n\}$,$a_{is_i} \wedge \bar{x}_{s_i}=b_i$.命 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_m)$,则 $s \in S$,故 $S \neq \varnothing$.

充分性.设 $S \neq \varnothing$,有 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_m) \in S$.由 S 的定义,$\forall\, i=1,2,\cdots,m$,当 $j \in S_i$ 时,$a_{ij} \wedge \bar{x}_j=b_i$,从而

$$\bigvee_{j=1,2,\cdots,n}[a_{ij} \wedge \bar{x}_j] \geqslant b_i,$$

即 $A \circ \bar{X} \geqslant B$.

另一方面,由 $\bar{X}$ 的定义易知(参见定理 5.1 证明的必要性部分),$A \circ \bar{X} \leqslant B$.故 $A \circ \bar{X}=B$,因此,F 矩阵方程 $A \circ X=B$ 有解.

(ii) 设 $S \neq \varnothing$,由(i)知 $\mathscr{P} \neq \varnothing$.设

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

是 $A \circ X = B$ 的任意解，知 $X \leqslant \overline{X}$，且 $A \circ \overline{X} = B$. 于是，$\forall\ i: 1 \leqslant i \leqslant m$，存在 $s_i \in \{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$b_i = a_{is_i} \wedge x_{s_i} \leqslant a_{is_i} \wedge \bar{x}_{s_i} \leqslant b_i,$$

从而 $a_{is_i} \wedge \bar{x}_{s_i} = b_i$，故 $s_i \in S_i$，$s = (s_1, s_2, \cdots, s_m) \in S$. 且 $\forall\ j \in \{1,2,\cdots, n\}$，

若存在 $s_i = j$，知 $x_j = x_{s_i} \geqslant b_i$，有

$$x_j \geqslant \bigvee_{i=1,2,\cdots,m}\{b_i \mid s_i = j\} = x_j^s;$$

若不存在 $s_i = j$，知 $x_j \geqslant 0 = x_j^s$.

因此，$X_s \leqslant X$. 故

$$\mathscr{P} \subseteq \bigcup_{s \in S}\{X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)' \mid X_s \leqslant X \leqslant \overline{X}\}.$$

反过来，设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，对 $s = (s_1, s_2, \cdots, s_m) \in S$ 适合 $X_s \leqslant X \leqslant \overline{X}$，由 X_s 的定义，$\forall\ i: 1 \leqslant i \leqslant m$，

$$\begin{aligned} \bigvee_{j=1,2,\cdots,n}[a_{ij} \wedge x_s^j] &\geqslant a_{is_i} \wedge x_{s_i}^s \\ &= a_{is_i} \wedge (\bigvee_{k=1,2,\cdots,m}\{b_k \mid s_k = s_i\}) \\ &\geqslant b_i, \end{aligned}$$

即 $A \circ X_s \geqslant B$. 于是

$$B \leqslant A \circ X_s \leqslant A \circ X \leqslant A \circ \overline{X} = B,$$

故 $A \circ X_s = B$，$A \circ X = B$. 由 s 的任意性，

$$\bigcup_{s \in S}\{X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)' \mid X_s \leqslant X \leqslant \overline{X}\} \subseteq \mathscr{P}.$$

总之

$$\mathscr{P} = \bigcup_{s \in S}\{X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)' \mid X_s \leqslant X \leqslant \overline{X}\}.$$

注 设 $S\neq\varnothing$，我们称 $X_s(s\in S)$ 为 F 矩阵方程 $A\circ X=B$ 对应于 s 的**拟极小解**.

定理 5.3 给出 F 矩阵方程 $A\circ X=B$ 的求解方法，现将其求解序列成如下表格，按说明要求逐次填写.

$x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n$	
表 Ⅰ	b_1 b_2 $\cdots$ b_m
$\bar{x}_1\ \ \bar{x}_2\ \ \cdots\ \ \bar{x}_n$	$\bar{X}$
表 Ⅱ	X_s

说明 (1) 比较 A 的第 i 行元素 a_{ij} 与 b_i，若 $a_{ij}>b_i$，则在表 Ⅰ 的第 i 行 j 列处（以下称为 (i,j) 处）填写 b_i，否则在 (i,j) 处暂留成空白，$i=1,2,\cdots,m$.

(2) 将表 Ⅰ 各列的最小值写在相应列的下面，即为 $\bar{x}_j$，$j=1,2,\cdots,n$，从而得到 $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)'$.

(3) 再次比较 A 的第 i 行元素 a_{ij} 与 b_i，若 $a_{ij}=b_i$，则在表 Ⅰ 原空白 (i,j) 处，填上 b_i，$i=1,2,\cdots,m$.

(4) 将表 Ⅰ 中第 j 列的元素与同列的 $\bar{x}_j$ 比较，删去大于 $\bar{x}_j$ 者，$i=1,2,\cdots,n$.

此时可知，F 矩阵方程 $A\circ X=B$ 有解⇔表 Ⅰ 中各行都至少有一个非空白元素（即定理 5.3 中 $S_i\neq\varnothing$，$i=1,2,\cdots,m$）.

(5) 如果 $A\circ X=B$ 有解，在表 Ⅰ 的各行任取一个元素，然后按列求出其最大值（注意 $\vee\varnothing=0$）x_j^s，填入表 Ⅱ 的第 j 列，$j=1,2,\cdots,n$. 则得一个拟极小解

$$X_s=(x_1^s,x_2^s,\cdots,x_n^s)'.$$

因为 S_i 是表 Ⅰ 中第 i 行非空白元素所在的列脚标的集合，若

$k_i = |S_i|$,则拟极小解的个数为

$$|S| = k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_m.$$

(6)　对表Ⅱ中的全体拟极小解进行筛选(参见例 5.3),保留互不包含者,就能得到全体极小解.

(7)　根据定理 5.3,写出解集 $\mathscr{P}$.

例 5.3　求解例 5.2 中的 F 矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

解　列表如下:

	x_1	x_2	x_3	
表 I	0.2	0.2		0.2
	0.4		0.4	0.4
	0.2	0.2		0.2
	0.2	1	0.4	$\bar{X}$
表 Ⅱ	⟨0.2	0.2	0.4⟩	
	0.2	0	0.4	
	0	0.2	0.4	X_s
	⟨0.2	0.2	0.4⟩	

(1)　将 a_{ij} 与 b_i 比较,因 $a_{11} = 0.3 > 0.2$,知在表 I 的(1,1)处填写 0.2,同理,在(2,1),(2,3)处填写 0.4,其余暂留空白.

(2)　求出表 I 中各列最小值写在相应列下面,即分别为 $\bar{x}_1 = 0.2$, $\bar{x}_2 = 1$, $\bar{x}_3 = 0.4$(比较例 5.2 的结果).

(3)　再将 a_{ij} 与 b_i 比较,因 $a_{12} = 0.2 = b_1$, $a_{31} = a_{32} = 0.2 = b_3$,知在表 I 中(1,2),(3,1),(3,2)处均填上 0.2.

(4)　删去表 I 中(2,1)处的 0.4,因为它大于 $\bar{x}_1 = 0.2$. 此时,表 I 中各行皆有非空白元素,故原 F 矩阵方程有解,$\bar{X} = (0.2, 1, 0.4)'$ 是其最大解.

(5) 在表 I 中各行任取一个元素(共有 $2\times1\times2=4$ 种取法),按列求其最大值,得到全体拟极小解,填入表 Ⅱ,得

$$\begin{pmatrix}0.2\\0.2\\0.4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.2\\0\\0.4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0.2\\0.4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.2\\0.2\\0.4\end{pmatrix}.$$

(6) 经过筛选,显然互不包含的拟极小解为

$$\begin{pmatrix}0.2\\0\\0.4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0.2\\0.4\end{pmatrix}\text{(参见例 5.2 后的注)}.$$

(7) 记

$$\begin{pmatrix}0.2\\ [0,1]\\0.4\end{pmatrix}=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}0.2\\0\\0.4\end{pmatrix}\leqslant X\leqslant\begin{pmatrix}0.2\\1\\0.4\end{pmatrix}\right\},$$

$$\begin{pmatrix}[0,0.2]\\ [0.2,1]\\0.4\end{pmatrix}=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}0\\0.2\\0.4\end{pmatrix}\leqslant X\leqslant\begin{pmatrix}0.2\\1\\0.4\end{pmatrix}\right\}.$$

则原 F 矩阵方程的解集

$$\mathscr{P}=\begin{pmatrix}0.2\\ [0,1]\\0.4\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}[0,0.2]\\ [0.2,1]\\0.4\end{pmatrix}.$$

§6 F 图

众所周知,图论是数学中一门应用广泛的学科.本节介绍的 F 图是模糊数学与图论形成的新分支的一些最基本的概念,包括 F

图，F 树，F 最大生成树等.

首先叙述通常图论的一些术语.

定义 6.1　$G=\langle V,E\rangle$称为一个**图**，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots v_n\}$是非空有限集，V 的元素称为图 G 的**顶点**；$E=\{e_1,e_2,\cdots e_m\}$是非空有限集，E 的元素

$$e_k=\{v_i,v_j\mid 1\leqslant i,j\leqslant n\},k=1,2,\cdots,m,$$

称为图 G 的**边**，v_i,v_j 称为边 e_k 的**端点**，也称边 e_k 连接顶点 v_i,v_j.

例 6.1　设 $G=\langle V,E\rangle$，其中

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},$$

$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\},$$

这里，$e_1=\{v_1,v_1\},e_2=\{v_1,v_2\},e_3=\{v_2,v_3\}$，

$e_4=\{v_3,v_4\},e_5=\{v_2,v_4\},e_6=\{v_2,v_5\}$.

G 可以直观表示为图 2.1.

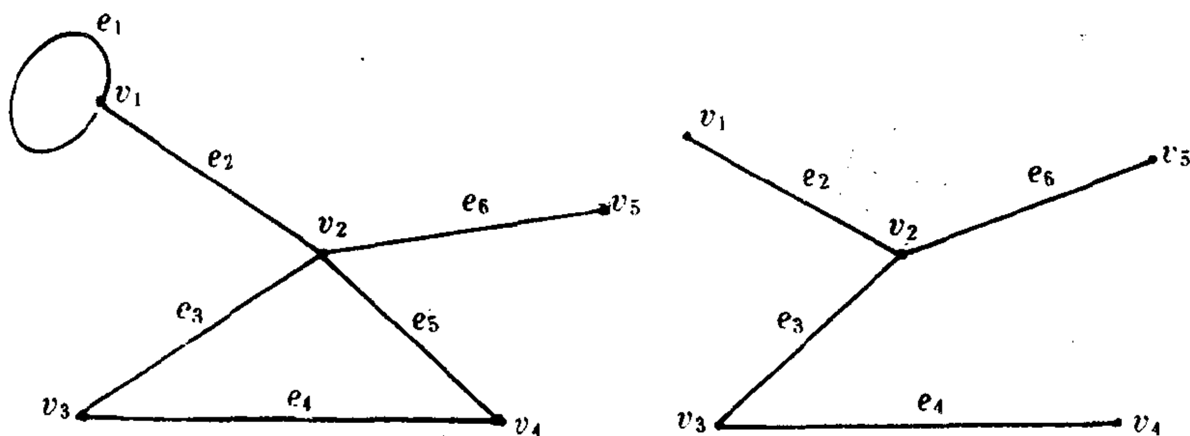


图　2.1

注　定义 6.1 中的图常称为**有限**，**无向图**，如对图 G 的每一条边的端点指定一个次序，则图 G 称为**有向图**.

定义 6.2　(1)　设 $G_1=\langle V_1,E_1\rangle,G_2=\langle V_2,E_2\rangle$都是图，如果 V_2

$\subseteq V_1, E_2 \subseteq E_1$,则称 G_2 是 G_1 的**子图**.

(2) 图 $G=\langle V,E\rangle$ 中依次连接若干个顶点的边的序列 $\{v_{i_0}, v_{i_1}\}, \{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \cdots, \{v_{i_{s-1}}, v_{i_s}\}$ 称为 G 的一条**道路**,常记为 $L(v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_s})$,其中 v_{i_0}, v_{i_s} 称为道路的端点.特别,如果 $v_{i_0}=v_{i_s}$,这条道路称为 G 的一条**回路**.

如例 6.1 中,$L(v_1,v_2,v_3,v_4,v_2,v_5)$ 是 G 的道路,而 $L(v_2,v_3,v_4,v_2)$ 是 G 的回路.

(3) 图 $G=\langle V,E\rangle$ 称为**连通图**,如果 G 中任何两个不同的顶点,都存在以这两个点为端点的道路.

如例 6.1 的图 G 是连通图.

(4) 不包含回路的连通图称为**树**.

如例 6.1 的图 G 不是树,其中的子图 $G_1=\langle V_1,E_1\rangle$:

$$V_1=V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},$$

$$E_1=\{e_2,e_3,e_4,e_6\}$$

是树(参见图 2.2).

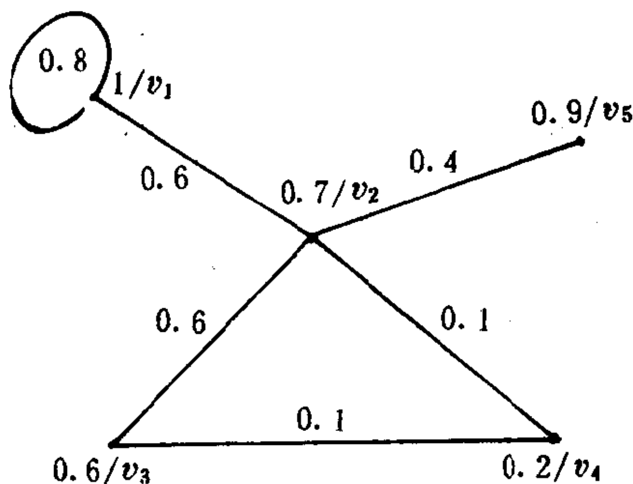


图 2.2

设 G 是连通图,但不是树,而去掉其中若干条边所得的子图 G_1 是树,则称树 G_1 是图 G 的**生成树**.

如图 2.2 表示的树是图 2.1 表示的图的生成树.

现在我们转向介绍图 F 的概念.

定义 6.3　设 $G=\langle V,E\rangle$ 是图,称 $\underset{\sim}{G}=\langle \underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}\rangle$ 是图 G 上的 F 图,如果

$$\underset{\sim}{V}:V \to (0,1],$$

$$\underset{\sim}{E}:E \to (0,1],$$

适合 $\forall\ e=\{v_i,v_j\}\in E$,

$$\underset{\sim}{E}(e) \leqslant \underset{\sim}{V}(v_i) \wedge \underset{\sim}{V}(v_j).$$

此时,称图 G 是 F 图 $\underset{\sim}{G}$ 的**基础图**.

特别,如 F 集 $\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}$ 的隶属度恒等于 1,则 F 图 $\underset{\sim}{G}$ 即为普通图 G.

以下我们把图 G 中的顶点,边,道路,回路等也称为 F 图 $\underset{\sim}{G}$ 的顶点,边,道路,回路等.例如 $\underset{\sim}{G}$ 的顶点集,边集分别为 $V(\underset{\sim}{G})=V$,$E(\underset{\sim}{G})=E$.

例 6.2　设 $G=\langle V,E\rangle$ 如例 6.1.命

$$\underset{\sim}{V} = 1/v_1 + 0.7/v_2 + 0.6/v_3 + 0.2/v_4 + 0.9/v_5,$$

$$\underset{\sim}{E} = 0.8/e_1 + 0.6/e_2 + 0.6/e_3 + 0.1/e_4 + 0.1/e_5 + 0.4/e_6,$$

容易验证,G 中每条边上的隶属度(称为**权数**)不超过任一端点的隶属度(也称权数).故 $\underset{\sim}{G}=\langle \underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}\rangle$ 是 F 图,G 是 $\underset{\sim}{G}$ 的基础图.(参见图 2.3)

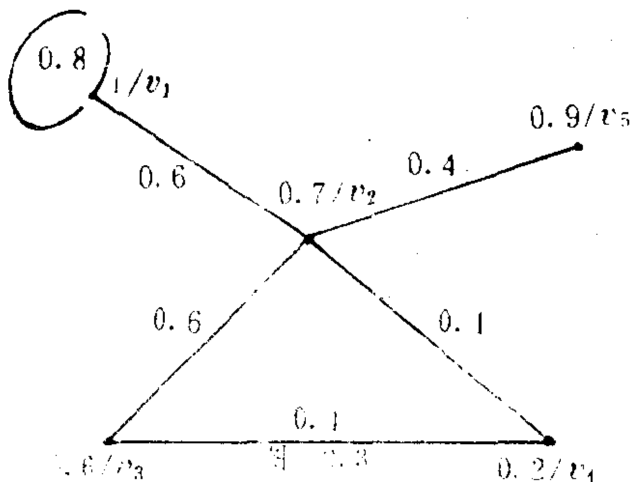


图 2.3

F 图与对称的 F 关系(因而与 F 对称方阵)有密切的联系.

设 $\underset{\sim}{G}=\langle\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}\rangle$是图 $G=\langle V,E\rangle$ 上的 F 图. 命 $R\in F(V\times V)$,使得 $\forall\ x,y\in V$,

$$R(x,y)=\begin{cases}\underset{\sim}{E}(e) & \text{当}\{x,y\}=e\in E,\\ 0 & \text{当}\{x,y\}\in E,\end{cases}$$

则 R 是 V 上对称的 F 关系.

反之,设 V 为非空有限集,$R\in\mathscr{F}(V\times V)$是 V 上对称的 F 关系,$R\neq\varnothing$. 命

$$E=\{e=\{x,y\}\,|\,x,y\in V,R(x,y)>0\},$$

则 $\underset{\sim}{G}=\langle\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}\rangle$是图 $G=\{V,E\}$ 上的 F 图,其中

$\underset{\sim}{V}_{(x)}=1,\forall\ x\in V$,

$\underset{\sim}{E}(e)=R(x,y),\forall\ e=\{x,y\}\in E$.

下面的定理表明,定义 6.3 中要求 F 图的边的权数不超过其任一端点的权数是自然的.

定理 6.1 设 $G=\langle V,E\rangle$是图,

$$\underset{\sim}{V}:V\to(0,1],\qquad \underset{\sim}{E}:E\to(0,1].$$

则 $\underset{\sim}{G}=\langle\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}\rangle$是 G 上的 F 图的充要条件是,$\forall\ \lambda\in[0,\lambda^*]$,$G_\lambda=\langle V_\lambda,E_\lambda\rangle$是 G 的子图,其中 $\lambda^*=\vee\{\underset{\sim}{E}(e)\,|\,e\in E\}$,$\underset{\sim}{V}_\lambda,\underset{\sim}{E}_\lambda$ 分别是 F 集 $\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}$ 的 λ 截集,即

$\underset{\sim}{V}_\lambda=\{x\in V\,|\,V(x)\geqslant\lambda\}\subseteq V$,

$\underset{\sim}{E}_\lambda=\{e\in E\,|\,E(e)\geqslant\lambda\}\subseteq E$.

证明 必要性. 设 $\underset{\sim}{G}$ 是 F 图,$\lambda\in[0,\lambda^*]$知 $E_\lambda\neq\varnothing$. $\forall\ e=\{x,y\}\in\underset{\sim}{E}_\lambda$,有 $\lambda\leqslant\underset{\sim}{E}(e)\leqslant\underset{\sim}{V}(x)\wedge\underset{\sim}{V}(y)$. 于是,$\underset{\sim}{V}(x)\geqslant\lambda,\underset{\sim}{V}(y)\geqslant\lambda$,即 $x,y\in V_\lambda$. 故 $G_\lambda=\langle\underset{\sim}{V}_\lambda,\underset{\sim}{E}_\lambda\rangle$是 G 的子图.

充分性. 设$\forall\ \lambda\in[0,\lambda^*]$,$G_\lambda$ 是 G 的子图,欲证 $\underset{\sim}{G}$ 是 F 图,只须验证$\forall\ e=\{x,y\}\in E$,

$$\underset{\sim}{E}(e)\leqslant\underset{\sim}{V}(x)\wedge\underset{\sim}{V}(y).$$

事实上，若存在 $e_0=\{x_0,y_0\}\in E$，而

$$\underset{\sim}{E}(e_0)>\underset{\sim}{V}(x_0)\wedge\underset{\sim}{V}(y_0),$$

记 $\lambda_0=\frac{1}{2}[\underset{\sim}{V}(x_0)\wedge\underset{\sim}{V}(y_0)+E(e_0)]$，知

$$\underset{\sim}{V}(x_0)\wedge\underset{\sim}{V}(y_0)<\lambda_0<\underset{\sim}{E}(e_0)\leqslant\lambda^*.$$

由假设 $G_{\lambda_0}=\langle\underset{\sim}{V}_{\lambda_0},\underset{\sim}{E}_{\lambda_0}\rangle$是 G 的子图，因 $e_0\in E_{\lambda_0}$，从而，$x_0,y_0\in V_{\lambda_0}$，即 $\underset{\sim}{V}(x_0)\geqslant\lambda_0$. $\underset{\sim}{V}(y_0)\geqslant\lambda_0$. 此与 $\underset{\sim}{V}(x_0)\wedge\underset{\sim}{V}(y_0)<\lambda_0$ 矛盾. 证毕.

注　定理 6.1 中 G 的子图 $G_\lambda=\langle\underset{\sim}{V}_\lambda,\underset{\sim}{E}_\lambda\rangle$常称为 F 图 $\underset{\sim}{G}$ 的 **λ 截图**. 特别 $\underset{\sim}{G}_0=\langle\underset{\sim}{V}_0,\underset{\sim}{E}_0\rangle$是 F 图 $\underset{\sim}{G}$ 的基础图 G.

现在我们把普通图的子图，连通图，树，生成树等概念推广到 F 图的情形.

定义 6.4　设 $\underset{\sim}{G}_1=\langle\underset{\sim}{V}_1,\underset{\sim}{E}_1\rangle,\underset{\sim}{G}_2=\langle\underset{\sim}{V}_2,\underset{\sim}{E}_2\rangle$分别是图 $G_1=\langle V_1,E_1\rangle,G_2=\langle V_2,E_2\rangle$上的 F 图. $\underset{\sim}{G}_2$ 称为 $\underset{\sim}{G}_1$ 的 **F 子图**，如果 G_2 是 G_1 的子图，且$\forall\ x\in V_2,e\in E_2$，有

$$\underset{\sim}{V}_2(x)\leqslant\underset{\sim}{V}_1(x),\underset{\sim}{E}_2(e)\leqslant\underset{\sim}{E}_1(e).$$

定义 6.5　设 $\underset{\sim}{G}=\langle\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}\rangle$是图 $G=\langle V,E\rangle$上的 F 图.

(1)　若 $L=L(v_{i_0},v_{i_1},\cdots,v_{i_s})$是 $\underset{\sim}{G}$ 中的道路，则称

$$S(L)=\wedge_{k=1}^{s}\underset{\sim}{E}(\{v_{i_{k-1}},v_{i_k}\})\in(0,1]$$

为道路 L 的 **F 连通强度**；

$\forall\ x,y\in V,x\neq y$，则称

$$S(x,y)=\vee\ \{S(L)\mid L\in L(x,y)\}$$

为顶点 x,y 之间的 **F 连通强度**，其中 $L(x,y)$是图 $\underset{\sim}{G}$ 中以 x,y 为端点的所有道路的集合.

特别，如 $L(x,y)=\varnothing,S(x,y)=0$.

(2)　若 G 是连通图，则 $\underset{\sim}{G}$ 称为**连通 F 图**.

(3) 若 G 是树，则 $\underset{\sim}{G}$ 称为 F **树**.

进而，设 $\underset{\sim}{T}$ 是连通 F 图 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 子图，如果 $\underset{\sim}{T}$ 的基础图 T 是图 G 的生成树，则称 $\underset{\sim}{T}$ 是 $\underset{\sim}{G}$ 的 F **生成树**.

以下记 $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{G})$ 为 $\underset{\sim}{G}$ 的所有 F 生成树的集合.

(4) 设 $\underset{\sim}{G}=\langle \underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}\rangle$ 是连通 F 图，$\underset{\sim}{T}^*\in\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{G})$ 称为 $\underset{\sim}{G}$ 的 F **最大生成树**，如果 $\forall\ \underset{\sim}{T}\in\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{G})$，有

$$\sum_{e\in E(\underset{\sim}{T})}\underset{\sim}{E}(e)\leqslant\sum_{e\in E(\underset{\sim}{T}^*)}E(e),$$

即 F 生成树 $\underset{\sim}{T}$ 中各边的权数总和不超过 $\underset{\sim}{T}^*$ 中各边的权数总和.

例 6.3 设连通 F 图 $\underset{\sim}{G}=\langle \underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}\rangle$ 如图 2.4(a)，即

$$\underset{\sim}{V}=0.7/v_1+0.5/v_2+0.9/v_3+0.5/v_4,$$

$$E=0.5/\{v_1,v_2\}+0.2/\{v_2,v_3\}+0.3/\{v_3,v_4\}+0.2/\{v_1,v_4\}+0.3/\{v_2,v_4\}.$$

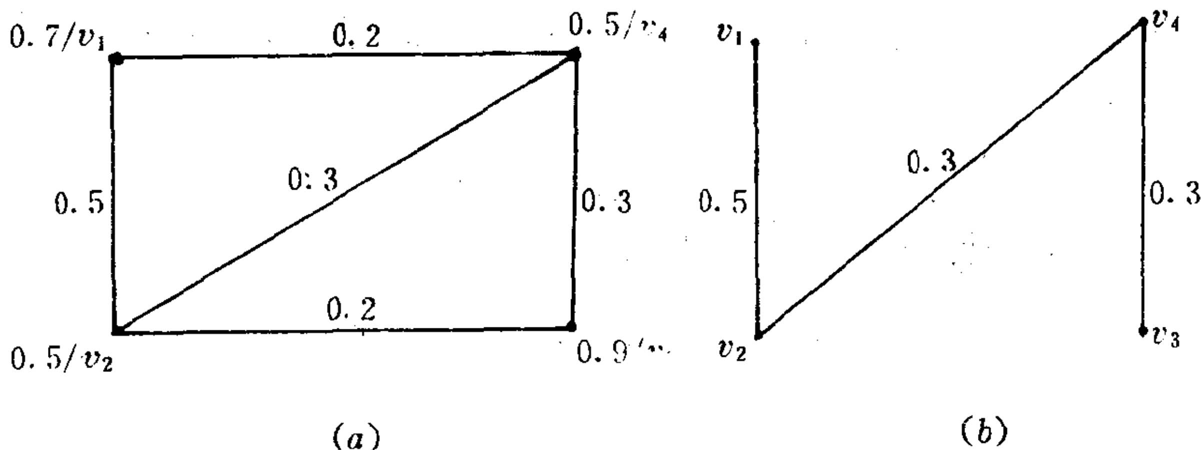


图 2.4

则易见，$\underset{\sim}{T}^*=<\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}^*>$ 为 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 最大生成树（见图 2.4(b)），其中

$$\underset{\sim}{E}^*=0.5/\{v_1,v_2\}+0.3/\{v_2,v_4\}+0.3/\{v_3,v_4\}.$$

注 在考虑连通 F 图的 F 生成树，F 最大生成树时，我们不妨作如下假定：设 $\underset{\sim}{G}=\langle \underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}\rangle$ 是图 $G=\langle V,E\rangle$ 上的连通 F 图，

(1) 因 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 生成树 $\underset{\sim}{T}$ 的顶点集相同，且不涉及顶点处的权数，可设 $\underset{\sim}{V}_1\equiv 1$（即 $\forall\ x\in V,\underset{\sim}{V}(x)=1$）；

(2) $\underset{\sim}{T} \in \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{G}), \forall e \in E(\underset{\sim}{T}), \underset{\sim}{T}$ 与 $\underset{\sim}{G}$ 在边 e 上的权数相同.

因此,常用 F 集 $\underset{\sim}{E}|E(\underset{\sim}{T})$ 来表达 F 生成树.

例如,例 6.3 中 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 最大生成树可记为

$$\underset{\sim}{T}^* = 0.5/\{v_1, v_2\} + 0.3/\{v_2, v_4\} + 0.3/\{v_3, v_4\}.$$

下面的定理将给出 F 图的 F 最大生成树的特征.事实上,根据图的有限性,不难看出,连通 F 图的 F 最大生成树 $\underset{\sim}{T}^*$ 总是存在的,而且因图中无回路,任何两个不同的顶点在 $\underset{\sim}{T}^*$ 中有唯一的一条道路连接,此道路的 F 连通强度应当等于 $\underset{\sim}{G}$ 中此两点的 F 连通强度,即下面定理.

定理 6.2 设 $\underset{\sim}{T} \in \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{G})$ 是连通 F 图 $\underset{\sim}{G} = \langle \underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{E} \rangle$ 的 F 生成树,则 $\underset{\sim}{T}$ 是 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 最大生成树的充要条件是,$\forall x, y \in V, x \neq y$,在 $\underset{\sim}{T}$ 中存在以 x, y 为端点的道路 L,使得

$$S(x, y) = S(L).$$

证明 必要性.设 $\underset{\sim}{T}$ 是 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 最大生成树,$\forall x, y \in V, x \neq y$,则在 $\underset{\sim}{T}$ 中存在唯一的以 x, y 为端点的道路 $L = L(v_0, v_1, \cdots, v_s)$,其中 $v_0 = x, v_s = y$,记 $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}, i = 1, 2, \cdots, s$,知$\exists\ i: 1 \leqslant i \leqslant s, S(L) = E(e_i)$.

显然,$S(x, y) \geqslant S(L)$.下证 $S(x, y) = S(L)$.

事实上,若 $S(x, y) > S(L)$,则在 $\underset{\sim}{G}$ 中存在另一条以 x, y 为端点的道路 $L' = L(v_0', v_1', \cdots, v_k')$,其中 $v_0' = x, v_k' = y$,记 $e_j' = \{v_{j-1}', v_j'\}, j = 1, 2, \cdots, k$,且 L' 适合

$$S(x, y) = S(L').$$

于是,$S(L') > S(L) = \underset{\sim}{E}(e_i)$,知 L' 不经过边 e_i.从 F 最大生成树 $\underset{\sim}{T}$ 中去掉 e_i 后,得到两个互不相连通的部份,即

$$\underset{\sim}{T} - e_i = \underset{\sim}{T}^{(1)} + \underset{\sim}{T}^{(2)}, \quad x \in V(\underset{\sim}{T}^{(1)}), y \in V(\underset{\sim}{T}^{(2)}),$$

而 $\underset{\sim}{T}^{(1)}, \underset{\sim}{T}^{(2)}$ 均为 F 树.

因 L' 是 x 到 y 的道路，在 L' 中存在 e_j'，其端点分别在 $\underset{\sim}{T}^{(1)},\underset{\sim}{T}^{(2)}$ 中，使得用边 e_j' 将 F 树 $\underset{\sim}{T}^{(1)},\underset{\sim}{T}^{(2)}$ 相连接，于是，得到 F 生成树

$$\underset{\sim}{T}' = (\underset{\sim}{T} - e_i) + e_j',$$

因而
$$\underset{\sim}{E}(e_j') \geqslant S(L') > \underset{\sim}{E}(e_i),$$

$$\sum_{e \in E(\underset{\sim}{T}')} \underset{\sim}{E}(e) > \sum_{e \in E(\underset{\sim}{T})} E(e),$$

此与 $\underset{\sim}{T}$ 是 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 最大生成树矛盾.

故 $S(x,y)=S(L)$.

充分性. 设 $\underset{\sim}{T} \in \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{G})$ 适合定理条件，取 $\underset{\sim}{T}^*$ 为 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 最大生成树. 若 $\underset{\sim}{T}^* \neq \underset{\sim}{T}$，我们来证明 $\underset{\sim}{T}$ 也是 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 最大生成树.

为此，设 $e=\{x,y\}$ 是 $\underset{\sim}{T}^*$ 中而不在 $\underset{\sim}{T}$ 中的边，因 $\underset{\sim}{T}^*$ 是 F 最大生成树，根据定理的必要性部份，

$$S(x,y) = \underset{\sim}{E}(e).$$

依假设，$\underset{\sim}{T}$ 中存在以 x,y 为端点的唯一道路 L，使得 $S(L)=S(x,y)=\underset{\sim}{E}(e)$.

类似于定理的必要性证明，我们从 $\underset{\sim}{T}^*$ 中去掉边 e，$\underset{\sim}{T}^*-e=\underset{\sim}{T}^{(1)}+\underset{\sim}{T}^{(2)}$，$x\in V(\underset{\sim}{T}^{(1)})$，$y\in V(\underset{\sim}{T}^{(2)})$，而 $T^{(1)},T^{(2)}$ 是互不相连的 F 树. 因 L 是连接 x,y 的道路，则在 L 中存在边 e'，其端点分别在 $\underset{\sim}{T}^{(1)}$，$\underset{\sim}{T}^{(2)}$ 中，用边 e' 将 F 树 $\underset{\sim}{T}^{(1)},\underset{\sim}{T}^{(2)}$ 相连接，得到 F 生成树

$$\underset{\sim}{T}' = (T^* - e) + e'.$$

由于 $\underset{\sim}{E}(e') \geqslant S(L)=\underset{\sim}{E}(e)$，故 $\underset{\sim}{T}'$ 也是 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 最大生成树.

照上述方法，可将 $\underset{\sim}{T}^*$ 中不在 $\underset{\sim}{T}$ 中的边都去掉，换上 $\underset{\sim}{T}$ 中的边，故 $\underset{\sim}{T}$ 也是 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 最大生成树. 证毕.

注　定理表明，连通 F 图的 F 最大生成树不一定是唯一的. 然而，任意两个不同顶点之间的 F 连通强度与 F 最大生成树的选取无关，且对 F 最大生成树 $\underset{\sim}{T}^*$，

$$\sum_{e \in E(\underset{\sim}{T}^*)} \underset{\sim}{E}(e)$$

是一个常值.

最后，我们用下面具体的例子来说明如何求连通 F 图的 F 最大生成树.

例 6.4　设连通 F 图 $\underset{\sim}{G}=\langle \underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{E} \rangle$ 如图 2.5(a)，求 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 最大生成树.

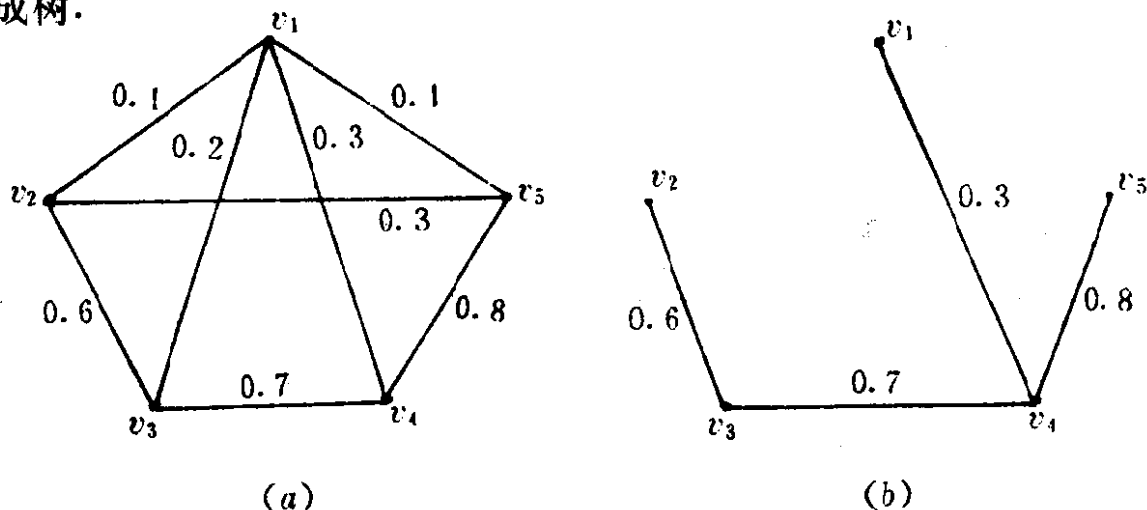


图　2.5

解：　在 $\underset{\sim}{G}$ 中任取一回路，如 $L(v_1, v_2, v_3, v_1)$，因

$$\underset{\sim}{E}(\{v_1, v_2\}) \leqslant \underset{\sim}{E}(\{v_2, v_3\}) \wedge \underset{\sim}{E}(\{v_3, v_1\}),$$

可删去边 $\{v_1, v_2\}$；再取回路 $L(v_1, v_3, v_4, v_1)$，同理，可删去边 $\{v_1, v_3\}$；照此方法删去回路相应的权数最小的边，使得 F 图仍连通，直到无回路，最后得到 $\underset{\sim}{G}$ 的 F 最大生成树 $\underset{\sim}{T}^*$（见图 2.5(b)）

$$\underset{\sim}{T}^* = 0.6/\{v_2, v_3\} + 0.7/\{v_3, v_4\} + 0.8/\{v_4, v_5\} + 0.3/\{v_1, v_4\}.$$

易见，$S(v_1, v_2) = 0.3 \wedge 0.7 \wedge 0.6 = 0.3$,

$$S(v_2, v_5) = 0.6 \wedge 0.7 \wedge 0.8 = 0.6,$$

及

$$\sum_{e \in E(\underset{\sim}{T}^*)} E(e) = 0.3 + 0.6 + 0.7 + 0.8 = 2.4.$$

第三章　模糊映射与扩张原理

扩张原理是模糊数学的基本原理之一. 本章首先介绍 Zadeh 扩张原理;然后再从基本模糊点概念出发,引入点式模糊映射的定义,并讨论其构造和性质,证明在此框架下的扩张定理;最后讨论模糊变换与序同态及其可生成性.

§1　Zadeh 扩张原理

Zadeh 扩张原理讨论的是如何由两个集合之间的一个普通(点式)映射产生 F 集的像与逆像.

设 X 与 Y 是两个非空集合,$f: X \to Y$ 是从 X 到 Y 的映射. 众所周知,对于任何 $A \in \mathscr{P}(X)$ 与 $B \in \mathscr{P}(Y)$,由 f 产生的像 $f(A)$ 与逆像 $f^{-1}(B)$ 分别界定为

$$f(A) \triangleq \{f(x) \mid x \in A\},$$

$$f^{-1}(B) \triangleq \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

我们自然要问,对于 LF 集 $A \in L^X$ 与 $B \in L^Y$,由 f 产生的 A 的像 $f(A)$ 与 B 的逆像 $f^{-1}(B)$ 应该如何定义呢?

定义 1.1(Zadeh **扩张原理**)设 f 是 X 到 Y 的映射，L 是完备格，最大元为 1，最小元为 0.

(1)对于任何 $A\in L^X$，界定

$$f(A)(y)=\begin{cases}\bigvee\limits_{x\in f^{-1}(y)} A(x), & f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ 0 & f^{-1}(y)=\varnothing.\end{cases}$$

显然 $f(A)\in L^Y$，且称 $f(A)$ 为 A 的**像**

(2)对于任何 $B\in L^Y$. 界定

$$f^{-1}(B)(x)=B[f(x)],\qquad \forall\, x\in X,$$

显然 $f^{-1}(B)\in L^X$，且称 $f^{-1}(B)$ 为 B 的**逆像**.

设 $A,A_1,A_2\in L^X$，$\{A_t,t\in T\}\subseteq L^X$，$B,B_1,B_2\in L^Y$，$\{B_t,t\in T\}\subseteq L^Y$，不难证明下列性质：

性质 1　若 $A_1\leqslant A_2$，则 $f(A_1)\leqslant f(A_2)$；

性质 2　$f(\bigvee\limits_{t\in T}A_t)=\bigvee\limits_{t\in T}f(A_t)$，

$f(\bigwedge\limits_{t\in T}A_t)\leqslant\bigwedge\limits_{t\in T}f(A_t)$；

性质 3　若 $B_1\leqslant B_2$，则　$f(B_1)\leqslant f(B_2)$；

性质 4　$f^{-1}(\bigvee\limits_{t\in T}B_t)=\bigvee\limits_{t\in T}f^{-1}(B_t)$，

$f^{-1}(\bigwedge\limits_{t\in T}B_t)=\bigwedge\limits_{t\in T}f^{-1}(B_t)$；

性质 5　$A\leqslant f^{-1}[f(A)]$ 且当 $f:X\to Y$ 为单射时，$f^{-1}[f(A)]=A$；

性质 6　$B\geqslant f[f^{-1}(B)]$ 且当 $f:X\to Y$ 为满射时，$f(f^{-1}(B))=B$；

性质 7　如果 L 还具有逆序对合对应′，则 $f^{-1}(B')=[f^{-1}(B)]'$

定理 1.1　(**扩张定理** I)　设 $f:X\to Y$ 是 X 到 Y 的映射，L 是完备格，则对于任何 $A\in L^X$，$B\in L^Y$，有

(1) $f(A)=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda f(A_\lambda)$;

(2) $f^{-1}(B)=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda f^{-1}(B_\lambda)$.

证明 (1)如果 $y\in Y$,当 $f^{-1}(y)\neq\varnothing$时,

$$
\begin{aligned}
[\bigvee_{\lambda\in L}\lambda f(A_\lambda)](y) &= \bigvee_{\lambda\in L}[\lambda\wedge\chi_{f(A_\lambda)}(y)] \\
&= \bigvee\{\lambda\mid\lambda\in L, y\in f(A_\lambda)\} \\
&= \bigvee\{\lambda\mid\lambda\in L, \exists\, x\in A_\lambda, \text{合于 } f(x)=y\} \\
&= \bigvee_{f(x)=y}[\bigvee\{\lambda\mid\lambda\in L, x\in A_\lambda\}] \\
&= \bigvee_{x\in f^{-1}(y)}[\bigvee\{\lambda\mid\lambda\leqslant A(x)\}] \\
&= \bigvee_{x\in f^{-1}(y)} A(x) \\
&= f(A)(y).
\end{aligned}
$$

当 $f^{-1}(y)=\varnothing$时,显然$[\bigvee_{\lambda\in L}\lambda f(A_\lambda)](y)=0=f(A)(y)$.

(2)对于任何 $x\in X$,

$$
\begin{aligned}
[\bigvee_{\lambda\in L}\lambda f^{-1}(B_\lambda)](x) &= \bigvee_{\lambda\in L}[\lambda\wedge\chi_{f^{-1}(B_\lambda)}(x)] \\
&= \bigvee_{\lambda\in L}\{\lambda\mid\lambda\in L, x\in f^{-1}(B_\lambda)\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in L}\{\lambda\mid\lambda\in L, f(x)\in B_\lambda\} \\
&= \bigvee_{\lambda\in L}\{\lambda\mid\lambda\leqslant B[f(x)]\} \\
&= B[f(x)] \\
&= f^{-1}(B)(x).
\end{aligned}
$$

证毕.

定理 1.2 (**扩张定理** Ⅱ) 设 $f:X\to Y$ 是 X 到 Y 的映射,L 是稠密的完备格.则对于任何 $A\in L^X$,$B\in L^Y$,有

(1) $f(A)=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda f(A_\lambda)$;

(2) $f^{-1}(B)=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda f^{-1}(B_{\dot{\lambda}})$.

证明 (1) 仿照定理 1.1 的推证，再由 L 的稠密性，得

$$[\bigvee_{\lambda\in L}\lambda f(A_{\dot{\lambda}})](y)=\bigvee_{f(x)=y}[\bigvee\{\lambda|\lambda<A(x)\}]$$

$$=\bigvee_{x\in f^{-1}(y)}A(x)=f(A)(y)$$

(约定$\bigvee_{\varnothing}\cdot=0$).

(2) 同理可得

$$[\bigvee_{\lambda\in L}\lambda f^{-1}(B_{\dot{\lambda}})](x)=\bigvee\{\lambda|\lambda<B[f(x)]\}=B[f(x)]=f^{-1}(B)(x).$$

证毕.

由定理 1.1 与定理 1.2 立即可得

定理 1.3 (**扩张定理Ⅲ**) 设 $f:X\to Y$ 是 X 到 Y 的映射，L 是稠密的完备格. 则对于任何 $A\in L^X$，$B\in L^Y$，有

(1) $f(A)=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda f[H_A(\lambda)]$，其中 $A_{\dot{\lambda}}\subseteq H_A(\lambda)\subseteq A_\lambda$，$\forall\ \lambda\in L$;

(2) $f^{-1}(B)=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda f^{-1}[H_B(\lambda)]$，其中 $B_{\dot{\lambda}}\subseteq H_B(\lambda)\subseteq B_\lambda$，$\forall\ \lambda\in L$.

作为特殊情况，当 $L=[0,1]$时，上述定理可以写成如下形式

定理 1.4 设 $f:X\to Y$ 是 X 到 Y 的映射，则对于任何 $A\in[0,1]^X$ 与 $B\in[0,1]^Y$，有

(1) $f(A)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f(A_\lambda)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f(A_{\dot{\lambda}})=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f[H_A(\lambda)]$，其中 $A_{\dot{\lambda}}\subseteq H_A(\lambda)\subseteq A_\lambda$，$\forall\ \lambda\in(0,1]$.

(2) $f^{-1}(B)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f^{-1}(B_{\dot{\lambda}})=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f^{-1}[H_B(\lambda)]$，其中 $B_{\dot{\lambda}}\subseteq H_B(\lambda)\subseteq B_\lambda$，$\forall\ \lambda\in(0,1]$

设 X,Y,Z 为三个非空集，$f:X\times Y\to Z$ 是 $X\times Y$ 到 Z 的映射，对于任何 $A\in[0,1]^X$ $B\in[0,1]^Y$，令

$$(A\times B)(x,y)=A(x)\wedge B(y),\forall\ (x,y)\in X\times Y.$$

则对于任何 $z\in Z$，有

$$f(A,B)(z)\triangleq f(A\times B)(z)=\bigvee_{f(x,y)=z}[A(x)\wedge B(y)].$$

定理 1.5 设 $f:X\times Y\to Z$ 是 $X\times Y$ 到 Z 的映射，则对于任何 $A\in[0,1]^X$，$B\in[0,1]^Y$，有

(1) $f(A,B)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f(A_\lambda,B_\lambda)$；

(2) $f(A,B)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}},B_{\underset{\cdot}{\lambda}})$；

(3) $f(A,B)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f[H_A(\lambda),H_B(\lambda)]$；其中 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H_A(\lambda)\subseteq A_\lambda$，$B_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H_B(\lambda)\subseteq B_\lambda$，而且 $\forall\lambda\in(0,1]$，

$f[H_A(\lambda),H_B(\lambda)]\triangleq f[H_A(\lambda)\times H_B(\lambda)]=\{f(x,y)\mid x\in H_A(\lambda),y\in H_B(\lambda)\}$.

定理的证明，由定理 1.4(1)立即得证.

§2 F 映射

定义 2.1 设 $\langle K_1,\leqslant_1\rangle$ 与 $\langle K_2\leqslant_2\rangle$ 是两个偏序集. 如果映射 $f:K_1\to K_2$ 满足下列条件，则称为 K_1 到 K_2 的保序下满映射.

(1) 当 $a,b\in K_1$ 且 $a\leqslant_1 b$ 时，$f(a)\leqslant_2 f(b)$；

(2) 若 $f(a)=\alpha$ 则对于 K_2 中任何 $\beta\leqslant_2\alpha$，存在 $c\in K_1$ 合于 $c\leqslant_1 a$ 且 $f(c)=\beta$.

例 2.1 设 X 与 Y 是两个非空集，$\mathscr{P}(X)$ 与 $\mathscr{P}(Y)$ 分别表示 X 与 Y 的幂集，$f:X\to Y$ 为 X 到 Y 的任一映射. 则由 f 诱导的从 $\mathscr{P}(X)$ 到 $\mathscr{P}(Y)$ 的映射：

$$f:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y),\qquad A\to f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

是保序下满映射.

定义 2.2　设 X 与 Y 是两个非空集. 如果映射 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 $\langle\underset{\sim}{X},\leqslant\rangle$ 到 $\langle\underset{\sim}{Y},\leqslant\rangle$ 的保序下满映射, 则称 $\underset{\sim}{f}$ 为 X 到 Y 的**模糊映射**简称为 **F 映射**. 而且对于任何 $A\in\mathscr{F}(X)$ 与 $B\in\mathscr{F}(Y)$, 令

$$\underset{\sim}{f}(A)(y)=\bigvee\{\alpha\mid\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(y,\alpha),(x,\lambda)\in A\},\quad \forall y\in Y,$$

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x)=\bigvee\{\lambda\mid\lambda\in(0,1],\underset{\sim}{f}(x,\lambda)\in B\},\quad \forall x\in X,$$

于是 $\underset{\sim}{f}(A)\in\mathscr{F}(Y)$, $f^{-1}(B)\in\mathscr{F}(X)$, 分别称 $\underset{\sim}{f}(A)$ 为 A 的像, $\underset{\sim}{f}^{-1}(B)$ 为 B 的逆像.

定理 2.1　映射 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射的充要条件, 是存在如此的两个映射:

$$f:X\to Y,\qquad g:\underset{\sim}{X}\to(0,1],$$

其中 f 是 X 到 Y 的普通映射, g 是 $\underset{\sim}{X}$ 到 $(0,1]$ 的保序下满映射, 使得对于任何 $(x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}$, 有

$$\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(f(x),g(x,\lambda))\in\underset{\sim}{Y}$$

并记作 $\underset{\sim}{f}=(f,g)$.

证明　必要性. 如果 $\underset{\sim}{f}$ 是 $\underset{\sim}{X}$ 到 $\underset{\sim}{Y}$ 的 F 映射, 则对于任何 $(x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}$ 必存在唯一确定的 $(y,\alpha)\in\underset{\sim}{Y}$ 适合 $f(x,\lambda)=(y,\alpha)$. 若令 $y=f^*(x,\lambda)$, $\alpha=g(x,\lambda)$, 则得到两个映射:

$$f^*:\underset{\sim}{X}\to Y,\qquad g:\underset{\sim}{X}\to(0,1],$$

而且

$$\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(f^*(x,\lambda),g(x,\lambda))=(y,\alpha).$$

对于任给的 $x\in X$ 与 $0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant 1$, 有

$$\underset{\sim}{f}(x,\lambda_1)=(f^*(x,\lambda_1),g(x,\lambda_1))\leqslant(f^*(x,\lambda_2),g(x,\lambda_2))=\underset{\sim}{f}(x,\lambda_2)$$

从而, $f^*(x,\lambda_1)=f^*(x,\lambda_2)$, $g(x,\lambda_1)\leqslant g(x,\lambda_2)$, 则 $f^*(x,\lambda)$ 只由 x 唯一决定, 而与 λ 的值无关. 若令

$$f(x)=f^*(x,\lambda),\qquad x\in X,\lambda\in(0,1],$$

则得到一个从 X 到 Y 的映射 $f:X\to Y$,而且对于任何 $(x,\lambda)\in \underset{\sim}{X}$,

$$\underset{\sim}{f}(x,\lambda) = (f(x),g(x,\lambda)).$$

上面已证当 $0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant 1$ 时,$g(x,\lambda_1)\leqslant g(x,\lambda_2)$. 又若 $g(x,\lambda)=\alpha$,则对于任何 $\gamma\in(0,\alpha]$,必有 $(y,\gamma)\leqslant(y,\alpha)$,而且

$$\underset{\sim}{f}(x,\lambda) = (f(x),g(x,\lambda)) = (y,\alpha)\in \underset{\sim}{Y},$$

由 $\underset{\sim}{f}$ 的保序下满性知,存在 $(x,\delta)\in \underset{\sim}{X}$,$\delta\in(0,\lambda]$,使得

$$\underset{\sim}{f}(x,\delta) = (f(x),g(x,\delta)) = (y,\gamma)\in \underset{\sim}{Y},$$

则 $g(x,\delta)=\gamma$. 所以 g 是 $\underset{\sim}{X}$ 到 $(0,1]$ 的保序下满映射.

充分性. 设 f,g 是满足定理条件的两个映射. 根据映射 $g:X\to(0,1]$ 的保序下满性,不难验证 $\underset{\sim}{f}$ 为 $\underset{\sim}{X}$ 到 $\underset{\sim}{Y}$ 的 F 映射. 证毕.

定理 2.2 映射 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射的充要条件,是对于任何给定的 $x\in X$,$g(x,\cdot)$ 是 $(0,1]$ 到 $(0,1]$ 的单调不减的连续函数,而且 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} g(x,\lambda)=0$.

证明 必要性. 设 $\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 是 $\underset{\sim}{X}$ 到 $\underset{\sim}{Y}$ 的 F 映射. 由定理 2.1 的证明知,$g(x,\cdot)$ 单调不减.

如果存在 $\lambda_0\in(0,1]$,$g(x,\cdot)$ 在 λ_0 处不连续. 令 $\alpha_0=g(x,\lambda_0)$,$\alpha_0^-=g(x,\lambda_0-0)$,$\alpha_0^+=g(x,\lambda_0^+ +0)$,必有 $\alpha_0^-<\alpha_0$ 或 $\alpha_0<\alpha_0^+$. 不失一般性,不妨设 $\alpha_0^-<\alpha_0$,则开区间 (α_0^-,α_0) 非空,任取 $\alpha\in(\alpha_0^-,\alpha_0)$,由 $g(x,\cdot)$ 的单调不减性知,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,当 $\lambda<\lambda_0$ 时,$g(x,\lambda)\leqslant\alpha_0^-<\alpha$;当 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时,$g(x,\lambda)\geqslant\alpha_0>\alpha$. 因此,$\forall\ \lambda\in(0,1]$ 都有 $\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(f(x),g(x,\lambda))\neq(f(x),\alpha)$,但 $(f(x),\alpha)\leqslant\underset{\sim}{f}(x,\lambda_0)$. 此与 $\underset{\sim}{f}$ 是 F 映射的假设相矛盾. 故 $g(x,\cdot)$ 是 $(0,1]$ 到 $(0,1]$ 的连续函数.

再由 g 的保序下满性知,对于任何 $\alpha\in(0,g(x,\lambda)]$ 都存在 $\delta\in(0,\lambda]$ 适合 $g(x,\delta)=\alpha$. 于是 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} g(x,\lambda) = \bigwedge\limits_{\lambda\in(0,1]} g(x,\lambda) = 0.$

充分性．根据定理 2.1 只需证 $g(x,\lambda)$是 $\underset{\sim}{X}$ 到$(0,1]$的保序下满映射．事实上，由 $g(x,\lambda)$的单调不减性知

$$(x,\lambda_1) \leqslant (x,\lambda_2) \Rightarrow g(x,\lambda_1) \leqslant g(x,\lambda_2);$$

再由 $g(x,\cdot)$的连续性及 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} g(x,\lambda)=0$ 知，$g(x,\cdot)$取遍区间$(0,g(x,\lambda)]$的一切值，由此立即可以推知，g 是 $\underset{\sim}{X}$ 到$(0,1]$的保序下满映射．证毕．

定理 2.3　设 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射．对于任何 $x\in X$，令

$$g_x(\lambda)=\begin{cases} g(x,\lambda), & \text{当 } \lambda\in(0,1], \\ 0, & \text{当 } \lambda=0. \end{cases}$$

则　(1)　$g_x(\cdot)$是$[0,1]$到$[0,1]$的单调不减的连续函数；

(2)　对于任何$\{\lambda_t,t\in T\}\subseteq[0,1]$，有

$$g_x(\bigvee_{t\in t}\lambda_t)=\bigvee_{t\in T}g_x(\lambda_t),$$

$$g_x(\bigwedge_{t\in T}\lambda_t)=\bigwedge_{t\in T}g_x(\lambda_t);$$

(3)　对于任何 $A\in\mathscr{F}(X)$与 $y\in Y$，有

$$\underset{\sim}{f}(A)(y)=\bigvee\{g_x[A(x)]\,|\,x\in f^{-1}(y)\};$$

(4)　对于任何 $B\in\mathscr{F}(Y)$，有

$$f^{-1}(B)=\{(x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}\,|\,\underset{\sim}{f}(x,\lambda)\in B\}$$

而且

$$f^{-1}(B)(x)=\max\{\lambda\,|\,\lambda\in[0,1],g_x(\lambda)\leqslant B[f(x)]\},\forall\, x\in X.$$

证明　(1)　由定理 2.2 立即得证．

(2)　显然有

$$\bigvee_{t\in T}g_x(\lambda_t)\leqslant g_x(\bigvee_{t\in T}\lambda_t).$$

如果等号不成立，则存在 $\alpha\in(0,1)$，使得

$$\bigvee_{t\in T}g_x(\lambda_t)<\alpha<g_x(\bigvee_{t\in T}\lambda_t).$$

由(1)知，存在 $\lambda<\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t$，使得 $g_x(\lambda)=\alpha$，从而，$g_x(\lambda)>\bigvee\limits_{t\in T}g_x(\lambda_t)$．再根

据 $g_x(\cdot)$ 的单调不减性知，$\lambda > \lambda_t, \forall\, t \in T$. 于是又有 $\lambda \geqslant \bigvee_{t\in T} \lambda_t$. 发生矛盾. 故必有 $g_x(\bigvee_{t\in T} \lambda_t) = \bigvee_{t\in T} g_x(\lambda_t)$.

同理可证，$g_x(\bigwedge_{t\in T} \lambda_t) = \bigwedge_{t\in T} g_x(\lambda_t)$.

(3)

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{f}(A)(y) &= \bigvee \{\alpha \mid \underset{\sim}{f}(x,\lambda) = (y,\alpha), (x,\lambda) \in A\} \\
&= \bigvee \{\alpha \mid f(x) = y, g(x,\lambda) = \alpha, (x,\lambda) \in A\} \\
&= \bigvee \{g(x,\lambda) \mid x \in f^{-1}(y), 0 < \lambda \leqslant A(x)\} \\
&= \bigvee \{g[x, A(x)] \mid x \in f^{-1}(y) \cap \mathrm{supp}A\} \\
&= \bigvee \{g_x[A(x)] \mid x \in f^{-1}(y)\}.
\end{aligned}
$$

(4)　如果令

$$A = \{(x,\lambda) \in \underset{\sim}{X} \mid \underset{\sim}{f}(x,\lambda) \in B\},$$

则　　$A = \{(x,\lambda) \in \underset{\sim}{X} \mid g(x,\lambda) \leqslant B[f(x)]\}$. 容易验证 $A \in \mathscr{F}(X)$，而且由定义 2.2 知 $\underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x) = A(x), \forall\, x \in X$，所以 $\underset{\sim}{f}^{-1}(B) = A$

又因当 $A(x) > 0$ 时，$(x, \underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x)) = (x, A(x)) \in A$，故对于任何 $x \in X$

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x) &= \bigvee \{\lambda \mid \lambda \in (0,1], g(x,\lambda) \leqslant B[f(x)]\} \\
&= \max\{\lambda \mid \lambda \in [0,1], g_x(\lambda) \leqslant B[f(x)]\}.
\end{aligned}
$$

证毕.

推论　设 $\underset{\sim}{f} = (f, g): \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射，其中 $g: (0,1] \to (0,1]$. 则(1)　g 是 $(0,1]$ 到 $(0,1]$ 的单调不减的连续函数，而且 $\lim_{\lambda\to 0^+} g(\lambda) = 0$；

(2)　对于任何 $A \in \mathscr{F}(X)$ 有

$$\underset{\sim}{f}(A)(y) = \bigvee \{g[A(x)] \mid x \in f^{-1}(y) \cap \mathrm{Supp}A\}$$

$$\forall\, y \in Y;$$

(3)　对于任何 $B\in\mathscr{F}(Y)$，有

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x)=\bigvee\{\lambda\mid\lambda\in(0,1],g(\lambda)\leqslant B[f(x)]\}\qquad\forall x\in X.$$

例 2.2　设 $f:X\to Y$ 是普通映射. 对于任何 $(x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}$，令

$$\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(f(x),\lambda)$$

则映射 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 $\underset{\sim}{X}$ 到 $\underset{\sim}{Y}$ 的 F 映射，而且对于任何 $A\in\mathscr{F}(X)$与 $B\in\mathscr{F}(Y)$，有

$$\underset{\sim}{f}(A)(y)=\bigvee\{A(x)\mid x\in f^{-1}(y)\},\qquad\forall y\in Y;$$

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x)=B[f(x)],\qquad\forall x\in X.$$

这就是 Zadeh 扩张原理.

定理 2.4　设 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射. $A,A^{(1)},A^{(2)}\in\mathscr{F}(X),\{A^{(t)},t\in T\}\subseteq\mathscr{F}(X),B,B^{(1)},B^{(2)}\in\mathscr{F}(Y),\{B^{(t)},t\in T\}\subseteq\mathscr{F}(Y)$. 则

(1)　$\underset{\sim}{f}(A)=\varnothing$ 当且仅当 $A=\varnothing$；

(2)　$\underset{\sim}{f}(\bigvee_{t\in T}A^{(t)})=\bigvee_{t\in T}f(A^{(t)})$；

(3)　$\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(\mathrm{X})\to\mathscr{F}(\mathrm{Y})$ 是$(\mathscr{F}(\mathrm{X}),\leqslant)$到$(\mathscr{F}(\mathrm{Y})\leqslant)$的保序下满映射；

(4)　$\underset{\sim}{f}(A)\leqslant B$ 当且仅当 $A\leqslant\underset{\sim}{f}^{-1}(B)$；

(5)　$\underset{\sim}{f}^{-1}(\underset{\sim}{Y})=\underset{\sim}{X}$，　$\underset{\sim}{f}^{-1}(\varnothing)=(\varnothing)$；

(6) 若 $B^{(1)}\leqslant B^{(2)}$，则 $\underset{\sim}{f}^{-1}(B^{(1)})\leqslant\underset{\sim}{f}^{-1}(B^{(2)})$；

(7)　$\underset{\sim}{f}^{-1}(\bigwedge_{t\in T}B^{(t)})=\bigwedge_{t\in T}\underset{\sim}{f}^{-1}(B^{(t)})$，

$\underset{\sim}{f}^{-1}(B^{(1)}\vee B^{(2)})=\underset{\sim}{f}^{-1}(B^{(1)})\vee\underset{\sim}{f}^{-1}(B^{(2)})$；

(8)　$\underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A)]\geqslant A$，且当 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是单射时，$\underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A)]=A$；

(9)　$\underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]\leqslant B$，且当 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是满射时，$\underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]=$

B;

(10) $\underset{\sim}{f}^{-1}(B) = \bigvee \{A \mid A \in \mathscr{F}(X), f(A) \leqslant B\}$;

(11) 映射 $\underset{\sim}{f}^{-1}: \mathscr{F}(Y) \to \mathscr{F}(X)$ 是保序下满映射当且仅当 $\underset{\sim}{f}: \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$ 是单射.

证明 (1) $\underset{\sim}{f}(A) = \varnothing \Leftrightarrow \forall\, y \in Y, \underset{\sim}{f}(A)(y) = \bigvee \{\alpha \mid \underset{\sim}{f}(x,\lambda) = (y,\alpha), (x,\lambda) \in A\} = 0$

$$\Leftrightarrow A = \varnothing.$$

(2) 根据定理 2.3,对于任何 $y \in Y$,有

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{f}\Big(\bigvee_{t\in T} A^{(t)}\Big)(y) &= \bigvee \Big\{g_x\Big[\bigvee_{t\in T} A^{(t)}(x)\Big] \Big| x \in f^{-1}(y)\Big\} \\
&= \bigvee_{x\in f^{-1}(y)} \Big\{\bigvee_{t\in T} g_x[A^{(t)}(x)]\Big\} \\
&= \bigvee_{t\in T}\Big\{\bigvee_{x\in f^{-1}(y)} g_x[A^{(t)}(x)]\Big\} \\
&= \bigvee_{t\in T} \underset{\sim}{f}(A^{(t)})(y) \\
&= \bigvee_{t\in T} \underset{\sim}{f}(A^{(t)})(y).
\end{aligned}$$

(3) 由(2)立即有

$$A^{(1)} \leqslant A^{(2)} \Rightarrow \underset{\sim}{f}(A^{(1)}) \leqslant f(A^{(1)} \vee A^{(2)}) = \underset{\sim}{f}(A^{(2)}).$$

又若 $\underset{\sim}{f}(A) = B$ 且任给 $B^{(0)} \leqslant B, B^{(0)} \in \mathscr{F}(Y)$.

当 $B^{(0)} = \varnothing$ 时,由(1)知 $\underset{\sim}{f}(\varnothing) = \varnothing$.

当 $\mathrm{Supp}B^{(0)}$ 为单点集时,设

$$0 < B^{(0)}(y_0) \leqslant \underset{\sim}{f}(A)(y_0).$$

如果 $B(y_0) = \underset{\sim}{f}(A)(y_0)$,令

$$A^{(0)} = \{(x,\lambda) \in A \mid x \in f^{-1}(y_0)\}.$$

则 $A^{(0)} \in \mathscr{F}(X)$ 且

$$f(A^{(0)})(y) = \begin{cases} \bigvee \{g(x, A(x)) \mid x \in f^{-1}(y_0) \cap \mathrm{supp}A\}, & \text{当 } y = y_0, \\ 0, & \text{当 } y \neq y_0, \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \underset{\sim}{f}(A)(y_0), & \text{当 } y=y_0, \\ 0, & \text{当 } y\neq y_0, \end{cases}$$

$$=B(y).$$

如果 $0<B^{(0)}(y_0)<\underset{\sim}{f}(A)(y_0)$，则存在 $(x,\lambda)\in A$，使得 $g(x,\lambda)=B^{(0)}(y_0)$. 令

$$A^{(0)}=\{(x,\lambda)\in A\,|\,x\in f^{-1}(y_0),g(x,\lambda)\leqslant B^{(0)}(y_0)\}$$

从而，有 $\underset{\sim}{f}(A^{(0)})=B^{(0)}$.

一般地，当 $\mathrm{supp}B^{(0)}\neq\varnothing$ 时，令 $B^{(0)}=\bigvee\limits_{y_0\in \mathrm{supp}B^{(0)}} B^{(y_0)}$，其中

$$B^{(y_0)}=\{(y_0,\lambda)\,|\,0<\lambda\leqslant B^{(0)}(y_0)\},\forall\ y_0\in \mathrm{supp}B^{(0)}$$

由上面的推证知，对于任何 $B^{(y_0)}$，存在 $A^{(y_0)}\in\mathscr{F}(X)$ 且 $A^{(y_0)}\leqslant A$，使得 $\underset{\sim}{f}(A^{(y_0)})=B^{(y_0)}$. 若令 $A^{(0)}=\bigvee\limits_{y_0\in \mathrm{supp}B^{(0)}} A^{(y_0)}$. 则由(2)得

$$\underset{\sim}{f}(A^{(0)})=\bigvee_{y_0\in \mathrm{supp}B^{(0)}}\underset{\sim}{f}(A^{(y_0)})=\bigvee_{y_0\in \mathrm{supp}B^{(0)}}B^{(y_0)}=B^{(0)}$$

综合上述，得证：$\forall\ B^{(0)}\leqslant B$，存在 $A^{(0)}\in\mathscr{F}(X)$，$A^{(0)}\leqslant A$，使得 $\underset{\sim}{f}(A^{(0)})=B^{0}$. 再由定义 2.1 知，$\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(\mathrm{X})\to\mathscr{F}(\mathrm{Y})$ 为保序下满映射.

(4) $\underset{\sim}{f}(A)\leqslant B\Leftrightarrow\underset{\sim}{f}(A)(y)=\bigvee\{a\,|\,\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(y,a),(x,\lambda)\in A\}\leqslant B(y),\forall\ y\in Y$

$\Leftrightarrow\forall\ (x,\lambda)\in A,\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(y,a)\in B$ 从而 $(x,\lambda)\in\underset{\sim}{f}^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow A\leqslant\underset{\sim}{f}^{-1}(B)$.

(5)与(6)显然.

(7) $(x,\lambda)\in\bigwedge\limits_{t\in T}\underset{\sim}{f}^{-1}(B^{(t)})\Leftrightarrow 0<\lambda\leqslant\bigwedge\limits_{t\in T}\underset{\sim}{f}^{-1}(B^{(t)})(x)$

$\Leftrightarrow 0<\lambda\leqslant f^{-1}(B^{(t)})(x),\forall\ t\in T,$

$\Leftrightarrow(x,\lambda)\in\underset{\sim}{f}^{-1}(B^{(t)}),\forall\ t\in T,$

$\Leftrightarrow\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(f(x),g(x,\lambda))\in B^{(t)},\forall\ t\in T,$

$$\Leftrightarrow g(x,\lambda) \leqslant B^{(t)}[f(x)], \forall\ t \in T$$

$$\Leftrightarrow g(x,\lambda) \leqslant (\bigwedge_{t\in T} B^{(t)})[f(x)],$$

$$\Leftrightarrow \underset{\sim}{f}\ (x,\lambda) = (f(x), g(x,\lambda)) \in \bigwedge_{t\in T} B^{(t)},$$

$$\Leftrightarrow (x,\lambda) \in \underset{\sim}{f}^{-1}(\bigwedge_{t\in T} B^{(t)}).$$

同理，可证明另一等式.

(8)　令 $B = \underset{\sim}{f}\ (A)$，由(4)知

$$A \leqslant \underset{\sim}{f}^{-1}(B) = \underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}\ (A)].$$

当 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是单射时，$f:X\to Y$ 为单射且任给 $x\in X$，$g(x,\cdot)$是$(0,1]$到$(0,1]$的严格单增的连续函数. 则对于任何 $x\in \mathrm{SuppA}$，

$$\underset{\sim}{f}\ (A)[f(x)] = g[x, A(x)],$$

故对于任何$(x,\lambda)\in \underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A)]$，必有

$$g(x,\lambda) \leqslant \underset{\sim}{f}\ (A)[f(x)] = g[x, A(x)].$$

由 $g(x,\cdot)$的严格单增性知，$0<\lambda\leqslant A(x)$，从而$(x,\lambda)\in A$，于是又有

$$\underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}\ (A)] \leqslant A.$$

(9)　令　$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{f}^{-1}(B)$，由(4)知

$$\underset{\sim}{f}\ [\underset{\sim}{f}^{-1}(B)] = \underset{\sim}{f}\ (A) \leqslant B.$$

当 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 为满射时，$f:X\to Y$ 与 $g:\underset{\sim}{X}\to(0,1]$必均为满射，故对于任何$(y,\alpha)\in B$，存在$(x^0,\lambda)\in X$，使得 $\underset{\sim}{f}(x^0,\lambda)=(y,\alpha)\in B$. 于是$(x^0,\lambda)\in \underset{\sim}{f}^{-1}(B)$. 故

$$\begin{aligned}\alpha &= g(x^0,\lambda) \leqslant g(x^0, \underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x^0)) \\ &\leqslant \bigvee \{g(x,\underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x)) \mid x \in \underset{\sim}{f}^{-1}(y) \cap \mathrm{supp}\underset{\sim}{f}^{-1}(B)\} \\ &= \bigvee \{g_x[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)](x) \mid x \in f^{-1}(y)\} \\ &= \underset{\sim}{f}\ [\underset{\sim}{f}^{-1}(B)](y).\end{aligned}$$

则$(y,\alpha)\in \underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]$. 于是又有

$$B \leqslant \underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)].$$

(10)　由(4)知

$$\underset{\sim}{f}(A) \leqslant B \Leftrightarrow A \leqslant \underset{\sim}{f}^{-1}(B).$$

再由(9)又有$\underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)] \leqslant B$,从而有

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B) = \bigvee \{A \mid A \in \mathscr{F}(X), \underset{\sim}{f}(A) \leqslant B\}.$$

(11)　如果$\underset{\sim}{f}: \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$为单射,当$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)=A$时,则对于$\mathscr{F}(X)$中任何$A^{(0)} \subseteqq A$,令$B^{(0)}=\underset{\sim}{f}(A^0)$,由(8)知

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B^{(0)}) = \underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A^{(0)})] = A^0.$$

再由(6)及定义 2.1 得$\underset{\sim}{f}^{-1}: \mathscr{F}(Y) \to \mathscr{F}(X)$是保序下满映射.

反之,如果$\underset{\sim}{f}^{-1}: \mathscr{F}(Y) \to \mathscr{F}(X)$是保序下满映射. 欲证

$$\underset{\sim}{f}(x_1, \lambda_1) = \underset{\sim}{f}(x_2, \lambda_2) = (y, \alpha) \in Y \Rightarrow (x_1, \lambda_1) = (x_2, \lambda_2).$$

令

$$A^{(1)} = \{(x_1, \lambda) \mid 0 < \lambda \leqslant \lambda_1\},$$
$$A^{(2)} = \{(x_2, \lambda) \mid 0 < \lambda \leqslant \lambda_2\},$$
$$B = \{(y, \beta) \mid 0 < \beta \leqslant \alpha\}.$$

则$A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathscr{F}(X)$,$B \in \mathscr{F}(Y)$而且$\underset{\sim}{f}(A^{(1)}) = \underset{\sim}{f}(A^{(2)}) = B$. 从而

$$A^{(1)} \vee A^{(2)} \leqslant \underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A^{(1)})] \vee \underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A^{(2)})] = \underset{\sim}{f}^{-1}(B).$$

由$\underset{\sim}{f}^{-1}$的保序下满性知,存在$C^{(1)}, C^{(2)} \in \mathscr{F}(Y)$,$C^{(1)} \leqslant B$,$C^{(2)} \leqslant B$,从而$C^{(1)} \vee C^{(2)} \leqslant B$,使得$\underset{\sim}{f}^{-1}(C^{(1)}) = A^{(1)}$,$\underset{\sim}{f}^{-1}(C^{(2)}) = A^{(2)}$. 又由(9),有

$$\begin{aligned} B &= \underset{\sim}{f}(A^{(1)}) \wedge \underset{\sim}{f}(A^{(2)}) \\ &= \underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(C^{(1)})] \wedge \underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(C^{(2)})] \leqslant C^{(1)} \wedge C^{(2)}. \end{aligned}$$

于是$C^{(1)} = C^{(2)} = B$,从而$A^{(1)} = A^{(2)}$. 再由$A^{(1)}$与$A^{(2)}$的定义立即得$(x_1, \lambda_1) = (x_2, \lambda_2)$. 证毕.

§3 扩张定理

定理 3 设 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射.

(1) 对于任何 $A\in\mathscr{F}(X)$，令

$$Ag_{\alpha}^{-1}=\{x\in \mathrm{Supp}A\mid g(x,A(x))\geqslant\alpha\},\alpha\in(0,1].$$

则
$$\underset{\sim}{f}(A)=\bigvee_{\alpha\in(0,1]}\alpha f(Ag_{\alpha}^{-1}).$$

(2) 对于任何 $B\in\mathscr{F}(Y)$，令

$$B_{(f,g_\lambda)}=\{y\in Y\mid g(x,\lambda)\leqslant B(y),x\in f^{-1}(y)\},\lambda\in(0,1].$$

则 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]_\lambda=f^{-1}(B_{(f,g_\lambda)})$，从而

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f^{-1}(B_{(f,g_\lambda)}).$$

证明 (1) 对于任何 $\alpha\in(0,1]$，一方面

$$\begin{aligned}y\in f(Ag_{\alpha}^{-1})&\Rightarrow\exists\ x^0\in f^{-1}(y)\cap Ag_{\alpha}^{-1}\\&\Rightarrow\exists\ x^0\in f^{-1}(y)\cap \mathrm{Supp}A,g(x^0,A(x^0))\geqslant\alpha\\&\Rightarrow\underset{\sim}{f}(A)(y)=\bigvee\{g_x[A(x)]\mid x\in f^{-1}(y)\}\\&=\bigvee\{g(x,A(x))\mid x\in f^{-1}(y)\cap\mathrm{Supp}A\}\geqslant\alpha\\&\Rightarrow y\in[\underset{\sim}{f}(A)]_\alpha.\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}y\in[\underset{\sim}{f}(A)]_{\underset{\cdot}{\alpha}}&\Rightarrow\bigvee\{g(x,A(x))\mid x\in f^{-1}(y)\cap\mathrm{supp}A\}=f(A)(y)>\alpha.\\&\Rightarrow\exists\ x^0\in f^{-1}(y)\cap\mathrm{supp}A,g(x^0,A(x^0))>\alpha\\&\Rightarrow\exists\ x^0\in f^{-1}(y)\cap Ag_{\alpha}^{-1}\\&\Rightarrow y\in f(Ag_{\alpha}^{-1})\end{aligned}$$

则

$$[\underset{\sim}{f}(A)]_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq f(Ag_{\alpha}^{-1})\subseteq[\underset{\sim}{f}(A)]_\alpha,\forall\ \alpha\in(0,1].$$

再由分解定理Ⅱ，即得所欲证．

(2)　对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$x\in[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]_\lambda \Leftrightarrow (x,\lambda)\in \underset{\sim}{f}^{-1}(B)$$

$$\Leftrightarrow \underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(f(x),g(x,\lambda))\in B$$

$$\Leftrightarrow g(x,\lambda)\leqslant B[f(x)]$$

$$\Leftrightarrow f(x)\in B_{(f,g_\lambda)}$$

$$\Leftrightarrow x\in f^{-1}[B_{(f,g_\lambda)}].$$

则 $[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]_\lambda=f^{-1}(B_{(f,g_\lambda)})$再由分解定理Ⅰ即得欲证．证毕．

推论 1　设 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射．

(1)　对于任何 $A\in\mathscr{F}(X)$，令

$$Ag_\alpha^{-1}=\{x\in \mathrm{supp}A\,|\,g(x,A(x))>\alpha\},\alpha\in(0,1],$$

则　$\forall\,\alpha\in(0,1],[\underset{\sim}{f}(A)]_\alpha=f(Ag_\alpha^{-1})$，从而

$$\underset{\sim}{f}(A)=\bigvee_{\alpha\in(0,1]}\alpha f(Ag_\alpha^{-1}).$$

(2)　对于任何 $B\in\mathscr{F}(Y)$，令

$$B_{(f,g_\lambda)}=\bigcup_{\delta>\lambda}B_{(f,g_\delta)}\quad,\lambda\in(0,1]$$

则　$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f^{-1}(B_{(f,g_\lambda)})$.

证明方法类似于定理 3.1 的证明，再由定理 3.1 与推论 1，可得

推论 2　设 $\underset{\sim}{f}=(f,g):X\to Y$ 是 F 映射．

(1)　对于任何 $A\in\mathscr{F}(X)$，有

$$\underset{\sim}{f}(A)=\bigvee_{\alpha\in(0,1]}\alpha f[H_A(g_\alpha^{-1})],$$

其中 $Ag_\alpha^{-1}\subseteq H_A(g_\alpha^{-1})\subseteq Ag_\alpha^{-1},\forall\,\alpha\in(0,1]$，

(2)　对于任何 $B\in\mathscr{F}(Y)$有

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f^{-1}[H_B(f,g_\lambda)],$$

其中 $B_{(f,g_\lambda)}\subseteq H_B(f,g_\lambda)\subseteq B_{(f,g_\lambda)},\forall\,\lambda\in(0,1]$.

定理 3.2 设 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射，则对于任何 $A\in\mathscr{F}(X)$ 与 $\alpha\in(0,1]$，$[\underset{\sim}{f}(A)]_\alpha=f(Ag_\alpha^{-1})$ 的充要条件是，对于任何 $y\in\text{supp}\underset{\sim}{f}(A)$，存在 $x^0\in f^{-1}(y)\cap\text{suppA}$，使得 $\underset{\sim}{f}(A)(y)=g(x^0,A(x^0))$.

证明 必要性，设 $\forall\ \alpha\in(0,1]$，$[\underset{\sim}{f}(A)]_\alpha=f(Ag_\alpha^{-1})$. 任给 $y\in\text{supp}\underset{\sim}{f}(A)$ 且令 $\alpha=\underset{\sim}{f}(A)(y)$.

一方面

$$\alpha=\underset{\sim}{f}(A)(y)\Rightarrow y\in[\underset{\sim}{f}(A)]_\alpha=f(Ag_\alpha^{-1})$$

$$\Rightarrow\exists\ x^0\in f^{-1}(y)\cap\text{suppA},g(x^0,A(x^0))\geqslant\alpha=\underset{\sim}{f}(A)(y);$$

另一方面

$$\begin{aligned}g(x^0,A(x^0))&\leqslant\bigvee\{g(x,A(x))\mid x\in f^{-1}(y)\cap\text{suppA}\}\\&=\bigvee\{g_x[A(x)]\mid x\in f^{-1}(y)\}\\&=\underset{\sim}{f}(A)(y)=\alpha.\end{aligned}$$

故存在 $x^0\in f^{-1}(y)\cap\text{suppA}$，使得 $\underset{\sim}{f}(A)(y)=g(x^0,A(x^0))$.

充分性，如果 $\forall\ y\in\text{supp}\underset{\sim}{f}(A)$，$\exists\ x^0\in f^{-1}(y)\cap suppA$，使得

$$\underset{\sim}{f}(A)(y)=g(x^0,A(x^0)),$$

则 $\forall\ \alpha\in(0,1]$，有

$$\begin{aligned}y\in[\underset{\sim}{f}(A)]_\alpha&\Leftrightarrow\underset{\sim}{f}(A)(y)=g(x^0,A(x^0))\geqslant\alpha,x^0\in f^{-1}(y)\cap\text{supp}A\\&\Leftrightarrow x^0\in f^{-1}(y)\cap Ag_\alpha{}^{-1}\\&\Leftrightarrow y\in f(Ag_\alpha{}^{-1})\end{aligned}$$

从而，$\forall\ \alpha\in(0,1]$，有 $[\underset{\sim}{f}(A)]_\alpha=f(Ag_\alpha{}^{-1})$. 证毕

定理 3.3 设 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射，其中 $g:(0,1]\to(0,1]$，则 (1) 对于任何 $A\in\mathscr{F}(X)$，有

$$\underset{\sim}{f}(A)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}g(\lambda)f(A_\lambda)$$

(2) 对于任何 $B\in\mathscr{F}(Y)$，有

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B) = \bigvee_{\alpha \in (0,1]} g^{-1}(\alpha) f^{-1}(B_\alpha),$$

其中 $g^{-1}(\alpha) \triangleq \bigvee \{\lambda | \lambda \in (0,1], g(\lambda) \leqslant \alpha\}$

证明　(1)　如果 $y \in \mathrm{supp}\underset{\sim}{f}(A)$，则

$$\begin{aligned}[\bigvee_{\lambda \in (0,1]} g(\lambda) f(A_\lambda)](y) &= \bigvee \{g(\lambda) | \lambda \in (0,1], y \in f(A_\lambda)\} \\ &= \bigvee \{g(\lambda) | \lambda \in (0,1], \exists\, x \in A_\lambda, f(x) = y\} \\ &= \bigvee \{g(\lambda) | \lambda \in (0,1], \exists\, x \in X, 0 < \lambda \leqslant A(x), f(x) = y\} \\ &= \bigvee \{g[A(x)] | x \in f^{-1}(y) \cap \mathrm{supp}A\} \\ &= \underset{\sim}{f}(A)(y).\end{aligned}$$

如果 $y \overline{\in} \mathrm{supp}\underset{\sim}{f}(A)$，则 $\forall \lambda \in (0,1], y \overline{\in} f(A_\lambda)$，因此

$$[\bigvee_{\lambda \in (0,1]} g(\lambda) f(A_\lambda)](y) = \underset{\sim}{f}(A)(y) = 0.$$

(2)　由 $g(\cdot)$ 的单调不减性知，当 $\beta < \alpha$ 时，$g^{-1}(\beta) < g^{-1}(\alpha)$. 再由 $g(\cdot)$ 的连续性与 $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} g(\lambda) = 0$ 知 $\bigwedge\limits_{\alpha \in (0,1]} g^{-1}(\alpha) = 0$. 则

$$\begin{aligned}[\bigvee_{\alpha \in (0,1]} g^{-1}(\alpha) f^{-1}(B_\alpha)](x) &= \bigvee \{g^{-1}(\alpha) | \alpha \in (0,1], f(x) \in B_\alpha\} \\ &= \bigvee \{g^{-1}(\alpha) | \alpha \in (0,1] \text{ 且 } \alpha \leqslant B[f(x)]\}. \\ &= \bigvee \{\bigvee \{\lambda | \lambda \in (0,1], g(\lambda) \leqslant \alpha\} | 0 < \alpha \leqslant B[f(x)]\} \\ &= \bigvee \{\lambda | \lambda \in (0,1], g(\lambda) \leqslant B[f(x)]\} \\ &= \underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x).\end{aligned}$$

证毕.

推论 3　设 $\underset{\sim}{f} = (f, g): \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射，其中 $g: (0,1] \to (0,1]$ 连续，则

(1)　对于任何 $A \in \mathscr{F}(X)$，有

$$\underset{\sim}{f}(A) = \bigvee_{\lambda \in (0,1]} g(\lambda) f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})$$

与

$$\underset{\sim}{f}(A) = \bigvee_{\lambda \in (0,1]} g(\lambda) f[H_A(\lambda)],$$

其中 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H_A(\lambda) \subseteq A_\lambda, \forall \lambda \in (0,1]$

(2) 对于任何 $B\in\mathscr{F}(Y)$有

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)=\bigvee_{\alpha\in(0,1]}g^{-1}(\alpha)f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\alpha}})$$

与

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)=\bigvee_{\alpha\in(0,1]}g^{-1}(\alpha)f^{-1}[H_B(\alpha)]$$

其中 $B_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq H_B(\alpha)\subseteq B_\alpha,\forall\ \alpha\in(0,1]$.

定理 3.4 设 $X,Y,\underset{\sim}{Z}$ 是三个非空集合,$\underset{\sim}{f}_1=(f_1,g_1):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 $\underset{\sim}{X}$ 到 $\underset{\sim}{Y}$ 的 F 映射,$\underset{\sim}{f}_2=(f_2,g_2):\underset{\sim}{Y}\to\underset{\sim}{Z}$ 是 $\underset{\sim}{Y}$ 到 $\underset{\sim}{Z}$ 的 F 映射. 令

$$f=f_2\circ f_1:X\to Z,x_1\to f(x)=f_2[f_1(x)],$$

$$g=g_2\circ\underset{\sim}{f}_1:X\to(0,1],(x,\lambda)\to g(x,\lambda)=g_2[\underset{\sim}{f}_1(x,\lambda)]$$

则 (1) $\underset{\sim}{f}=(f,g)$是 $\underset{\sim}{X}$ 到 $\underset{\sim}{Z}$ 的 F 映射;

(2) 对于任何 $A\in\mathscr{F}(X)$,有

$$\underset{\sim}{f}(A)=\bigvee_{\alpha\in(0,1]}\alpha f_2[f_1(Ag_\alpha{}^{-1})];$$

(3) 对于任何 $B\in\mathscr{F}(Z)$,有

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\lambda f_1{}^{-1}[f_2{}^{-1}(B_{(f,g_\lambda)})],$$

其中 $B_{(f,g_\lambda)}=\{z\in Z|g(x,\lambda)\leqslant B(z),x\in f^{-1}(z)=f_1{}^{-1}[f_2{}^{-1}(z)]\}$.

证明 任给 $x\in X$,当 $0<\lambda<\delta\leqslant 1$ 时,有 $\underset{\sim}{f}_1(x,\lambda)\leqslant\underset{\sim}{f}_1(x,\delta)$,从而

$$g(x,\lambda)=g_2[\underset{\sim}{f}_1(x,\lambda)]\leqslant g_2[\underset{\sim}{f}_1(x,\delta)]=g(x,\delta)$$

则 $g(x,\cdot)$是单调不减函数. 再因$\forall\ \lambda\in(0,1]$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}g(x,\lambda)=\lim_{\lambda\to\lambda_0}g_2[f_1(x),g_1(x,\lambda)]=g_2(f_1(x),\lim_{\lambda\to\lambda_0}g_1(x,\lambda))$$

$$=g_2(f_1(x),g_1(x,\lambda_0))=g_2[\underset{\sim}{f}_1(x,\lambda_0)]=g(x,\lambda_0)$$

知 $g(x,\cdot)$ 在$(0,1]$ 连续. 又由 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}g_1(x,\lambda)=0$, $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}g_2(y,\alpha)=0$ 得

$$\lim_{\lambda\to 0^+}g(x,\lambda)=\lim_{\lambda\to 0^+}g_2(f_1(x),g_1(x,\lambda))=0$$

最后,再根据定理 2.2,得证 $\underset{\sim}{f}=(f,g)$是 $\underset{\sim}{X}$ 到 $\underset{\sim}{Z}$ 的 F 映射,(1)得

证. 再根据定理 3.1，立即得证(2)与(3). 证毕.

§4 F 变换、F 序同态与序同态

为了不致发生混淆，我们再次指出：在本节，我们把 F 点 x_λ 作为 F 集理解，即

$$x_\lambda(u) = \begin{cases} 1, u = x \\ 0, u \neq x \end{cases} \quad 或 \quad x_\lambda = \{(x,\mu) \mid \mu \in (0,\lambda]\}.$$

定义 4.1 设映射 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$合于

(1) $\underset{\sim}{f}(A) = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$

(2) $\forall \{A_t, t \in T\} \subseteq \mathscr{F}(X), \underset{\sim}{f}(\bigvee\limits_{t\in T} A_t) = \bigvee\limits_{t\in T}\underset{\sim}{f}(A_t)$.

称 $\underset{\sim}{f}$ 为 $\mathscr{F}(X)$ 到 $\mathscr{F}(Y)$ 的**模糊变换**，简称为 F **变换**. 如果 $\forall B\in\mathscr{F}(Y)$，令

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B) = \bigvee \{A \in \mathscr{F}(X), f(A) \leqslant B\}.$$

显然，$f^{-1}(B)\in\mathscr{F}(X)$，且称为 B 的逆像.

例 4.1 设 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$是 X 到 Y 的 F 关系，对于任何 $A\in\mathscr{F}(X)$令 $\underset{\sim}{f}_R(A) = A\circ R$，其中

$$\underset{\sim}{f}_R(A)(y) = (A\circ R)(y) \triangleq \bigvee_{x\in X}[A(x) \wedge R(x,y)], \forall y \in Y,$$

如果 $\mathrm{supp}R = X\times Y$ 则 $\underset{\sim}{f}_R$ 是 F 变换.

例 4.2 设 $T:X\to\mathscr{F}(Y)$是定义在 X 上的 F 集值映射，对于任何 $A\in\mathscr{F}(X)$令 $\underset{\sim}{T}(A)=A\circ T$，其中

$$\underset{\sim}{T}(A)(y) = (A\circ T)(y) = \bigvee_{x\in X}[A(x) \wedge T(x)(y)], \forall y \in Y,$$

如果$\forall x\in X, \mathrm{supp}T(x)=Y$，则 T 是 F 变换.

例 4.3 设 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射，则诱导映射 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$

是 F 变换.

定理 4.1 设 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$是 F 变换,则下列性质成立.

(1) $\underset{\sim}{f}^{-1}(\varnothing)=\varnothing,\underset{\sim}{f}^{-1}(\underset{\sim}{Y})=\underset{\sim}{X}$.

(2) $A\leqslant\underset{\sim}{f}^{-1}(B)\Leftrightarrow\underset{\sim}{f}(A)\leqslant B$.

(3) $\underset{\sim}{f}(A)=\wedge\{B|B\in\mathscr{F}(Y),A\leqslant\underset{\sim}{f}^{-1}(B)\},\forall A\in\mathscr{F}(X)$.

(4) $\forall A\in\mathscr{F}(X)$ 有 $A\leqslant\underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A)]$;而且 $A=\underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A)]\Leftrightarrow\underset{\sim}{f}$ 为单射.

(5) $\forall B\in\mathscr{F}(Y)$ 有 $\underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]\leqslant B$;而且 $\underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]=B\Leftrightarrow\underset{\sim}{f}$ 为满射.

(6) $\forall\{B_t,t\in T\}\subseteq\mathscr{F}(Y),\underset{\sim}{f}^{-1}(\bigwedge_{t\in T}B_t)=\bigwedge_{t\in T}\underset{\sim}{f}^{-1}(B_t)$.

(7) $A_1,A_2\in\mathscr{F}(X),A_1\leqslant A_2\Rightarrow\underset{\sim}{f}(A_1)\leqslant\underset{\sim}{f}(A_2)$.

(8) $B_1,B_2\in\mathscr{F}(Y),B_1\leqslant B_2\Rightarrow\underset{\sim}{f}^{-1}(B_1)\leqslant\underset{\sim}{f}^{-1}(B_2)$.

证明是简单的,请读者自证.

定理 4.2 设 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$是 F 变换,则下列命题相互等价.

(1)命 $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{X})=B.\ \forall y\in\text{supp}B,\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}]\neq\varnothing$且

$$\bigcup\{\text{supp}\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}]\,|\,y\in\text{supp}B\}=X.$$

(2)$\forall x\in X,\exists|y\in Y$,使得 $\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\text{supp}\underset{\sim}{f}(x_\lambda)=\{y\}$.

(3)存在映射 $f^*=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$,其中 f 为 X 到 Y 的普通映射,g 为 $\underset{\sim}{X}$ 到(0,1]的映射,适合$\forall x\in X,g(x,\cdot)$是(0,1]到(0,1]的单调不减左连续函数,使得$\forall A\in\mathscr{F}(X),\underset{\sim}{f}(A)=f^*(A)$,即

$$\underset{\sim}{f}(A)(y)=\vee\{g(x,A(x))\,|\,x\in f^{-1}(y)\cap\text{supp}A\},\forall y\in Y.$$

证明 (1)⇒(2) 因为

$$\forall y,z\in\text{supp}B,y\neq z\Rightarrow\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}]\wedge\underset{\sim}{f}^{-1}[z_{B(z)}]$$

$$=\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}\wedge z_{B(z)}]=\varnothing,$$

再由(1)知，$\forall\ x\in X$ 与 $\lambda\in(0,1]$，$\exists|y\in\text{supp}B$ 适合 $x_\lambda\in \underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}]$，则 $\underset{\sim}{f}(x_\lambda)\leqslant y_{B(y)}$. 于是 $\text{supp}\underset{\sim}{f}(x_\lambda)=\{y\}$，所以 $\bigcup\limits_{\lambda\in(0,1]}\text{supp}f(x_\lambda)=\{y\}$.

(2)⇒(3) 由于 $\forall\ x\in X$，$\exists|y$ 相对应，若令 $y=f(x)$，则 f 为 X 到 Y 的普通映射. 又由 $\text{supp}\underset{\sim}{f}(x_\lambda)\subseteqq\bigcup\limits_{\lambda\in(0,1]}\text{supp}f(x_\lambda)=\{y\}$ 知，$\forall\ \lambda\in(0,1]$，存在 $\alpha\in(0,1]$，使得 $\underset{\sim}{f}(x_\lambda)=y_\alpha\leqslant y_{B(y)}$. 再令 $g(x,\lambda)=\alpha$，则 g 为 $\underset{\sim}{X}$ 到 $(0,1]$ 的映射，而且 $\underset{\sim}{f}(x_\lambda)=[f(x)]_{g(x,\lambda)}$. 令 $f^*=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$，则 $\forall\ A\in\mathscr{F}(X)$，

$$\underset{\sim}{f}(A)=\underset{\sim}{f}(\bigvee_{x\in\text{supp}A}x_{A(x)}]=\bigvee_{x\in\text{supp}A}\underset{\sim}{f}[x_{A(x)}]=\bigvee_{x\in\text{supp}A}[f(x)]_{g(x,A(x))}$$

于是，$\forall\ y\in Y$，

$$\underset{\sim}{f}(A)(y)=\bigvee\ (g(x,A(x))\ \ x\in f^{-1}(y)\cap\text{supp}A\}$$

现在证明 $g(x,\cdot)$ 为 $(0,1]$ 到 $(0,1]$ 的单调不减左连续函数.

$$0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant 1\Rightarrow\underset{\sim}{f}(x_{\lambda_1})=[f(x)]_{g(x,\lambda_1)}\leqslant[f(x)]_{g(x,\lambda_2)}=f(x_{\lambda_2})$$
$$\Rightarrow g(x,\lambda_1)\leqslant g(x,\lambda_2).$$

又 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，

$$\begin{aligned}[f(x)]_{g(x,\lambda)}&=[f(x)]_{g(x,\bigvee\limits_{\mu<\lambda}\mu)}=\underset{\sim}{f}(x_{\bigvee\limits_{\mu<\lambda}\mu})\\&=\underset{\sim}{f}(\bigvee_{\mu<\lambda}x_\mu)=\bigvee_{\mu<\lambda}\underset{\sim}{f}(x_\mu)=\bigvee_{\mu<\lambda}[f(x)]_{g(x,\mu)}\\&=[f(x)]_{\bigvee\limits_{\mu<\lambda}g(x,\mu)}.\end{aligned}$$

则 $\lim\limits_{\mu\to\lambda-0}g(x,\mu)=\bigvee\limits_{\mu<\lambda}g(x,\mu)=g(x,\lambda)$.

(3)⇒(1) $\forall\ y\in\text{supp}f(x)=\text{supp}B\Rightarrow\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{X})(y)=B(y)>0$

$$\Rightarrow[\bigvee_{x\in X}g(x,1)](y)=B(y)>0$$
$$\Rightarrow\exists\ x\in X，合于\ f(x)=y,g(x,1)\leqslant B(y)=B[f(x)],$$
即 $[f(x)]_{g(x,1)}\leqslant y_{B(y)}$
$$\Rightarrow\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}]\neq\varnothing.$$

$\forall x \in X, x_\lambda \leqslant \underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(x_\lambda)] \leqslant \bigvee \{\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}] \mid y \in \mathrm{supp}B\}$

$\Rightarrow x \in \bigcup \{\mathrm{supp}\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}] \mid y \in \mathrm{supp}B\}$

则 $\quad \bigcup \{\mathrm{supp}\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}] \mid y \in \mathrm{supp}B\} = X$. 证毕.

定义 4.2 (1) 设映射 $\underset{\sim}{f} = (f, g): \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{f}(x,\lambda) = (f(x), g(x,\lambda))$ 是 $\langle \underset{\sim}{X}, \leqslant \rangle$ 到 $\langle \underset{\sim}{Y}, \leqslant \rangle$ 的保序映射，如果 $\forall A \in \mathscr{F}(X)$, $B \in \mathscr{F}(Y)$，令

$$g_x(\lambda) = \begin{cases} g(x,\lambda), & \lambda \in (0,1], \\ 0, & \lambda = 0, \end{cases} \qquad \forall x \in X,$$

$$g_x^{-1}(\alpha) = \bigvee \{\lambda \mid \lambda \in [0,1], g_x(\lambda) \leqslant \alpha\} \quad \forall \alpha \in [0,1],$$

$$\underset{\sim}{f}(A)(y) = \bigvee \{g(x, A(x)) \mid x \in f^{-1}(y) \cap \mathrm{supp}A\}$$

$$= \bigvee \{g_x[A(x)] \mid x \in f^{-1}(y)\} \forall y \in Y,$$

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x) = \bigvee \{\lambda \mid \lambda \in (0,1], g(x,\lambda) \leqslant B[f(x)]\}$$

$$= g_x^{-1}[B(f(x))], \forall x \in X.$$

则称诱导映射 $\underset{\sim}{f}: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ 为 $\underset{\sim}{f}: \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$ 的**扩张映射**.

(2) 设映射 $\underset{\sim}{f}: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ 是 $\langle \mathscr{F}(X), \leqslant \rangle$ 到 $\langle \mathscr{F}(Y), \leqslant \rangle$ 的保序映射，如果存在保序映射 $f^* = (f, g): \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$，使得 $\underset{\sim}{f}$ 为 f^* 的扩张映射，则称 $\underset{\sim}{f}$ 为**可生成的**，且称 f^* 为 $\underset{\sim}{f}$ 的**生成函数**.

注 显然，任何扩张映射均为保序映射，由此 $\forall B \in \mathscr{F}(Y)$,

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B) = \bigvee \{A \mid A \in \mathscr{F}(X), \underset{\sim}{f}(A) \leqslant B\}$$

故定义 4.2 中定义的 $\underset{\sim}{f}^{-1}$ 与前面定义 4.1 是一致的.

例 4.4 设 $\underset{\sim}{f}: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ 是 F 变换，则由定理 4.2 知

$\underset{\sim}{f}$ 是可生成的 $\Leftrightarrow \forall y \in \underset{\sim}{f}(X) \triangleq B, \underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}] \neq \varnothing$ 且

$$\bigcup \{\mathrm{supp}f^{-1}(y_{B(y)}] \mid y \in \mathrm{supp}B\} = X.$$

例 4.5 设 $\underset{\sim}{f}: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ 是 F 变换，如果 f 是下满的，即

$\underset{\sim}{f}(A) = C \Rightarrow \forall C^0 \leqslant C, \exists A^0 \leqslant A$, 合于 $\underset{\sim}{f}(A^0) = C^0$,

由例 4.1 不难验证：$\underset{\sim}{f}$是可生成的而且生成函数是 F 映射（即 $\underset{\sim}{X}$ 到 $\underset{\sim}{Y}$ 的保序下满映射）.

一般情况，我们有

定理 4.3 (1) 设$\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$是保序映射，则 $\underset{\sim}{f}$为可生成的充要条件是，下列(a)与(b)同时成立.

(a) $\forall\ x\in X,\exists\ y\in Y$，使得对于$\forall\ \lambda\in(0,1]$，$\text{supp}\underset{\sim}{f}(x_\lambda)=\{y\}$.

(b) $\forall\ A\in\mathscr{F}(X),\underset{\sim}{f}(A)=\bigvee\{\underset{\sim}{f}(x_{A(x)})\mid x\in\text{supp}A\}$.

(2) 如果 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$是可生成的保序映射，则$\forall\ x\in X$，$g_x:[0,1]\to[0,1]$是单调不减函数；$g_x^{-1}:[0,1]\to[0,1]$是单调不减的右连续函数，从而，$\forall\ \{\alpha_t,t\in T\}\subseteq[0,1]$，有

$$g_x^{-1}(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t)=\bigwedge_{t\in T}g_x^{-1}(\alpha_t).$$

证明 (1)必要性. 如果 $\underset{\sim}{f}$是可生成的，且其生成函数为

$$\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y},\qquad (x,\lambda)\to\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(f(x),g(x,\lambda)).$$

$\forall\ x\in X$，令 $y=f(x)$. 由 $\underset{\sim}{f}=(f,g)$的保序性知，$\forall\ \lambda\in(0,1]$，有

$$\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(f(x),g(x,\lambda))\leqslant(f(x),g(x,1))=\underset{\sim}{f}(x,1).$$

则

$$\underset{\sim}{f}(x_\lambda)(y)=\bigvee\{g(u,x_\lambda(u))\mid u\in f^{-1}(y)\cap\text{supp}x_\lambda\}$$

$$=\begin{cases}g(x,\lambda), & y=f(x),\\ 0, & y\neq f(x).\end{cases}$$

从而，$\text{supp}\underset{\sim}{f}(x_\lambda)=\{y\}$. 即$(a)$成立.

又$\forall\ (x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}$，由上面推证知，$\underset{\sim}{f}(x_\lambda)=(f(x))_{g(x,\lambda)}$. 于是，$\forall\ A\in\mathscr{F}(X)$，

$$\underset{\sim}{f}(A)(y)=\bigvee\{g(x,A(x))\mid x\in f^{-1}(y)\cap\text{supp}A\}$$

$$=\bigvee\{g(x,A(x)\mid f(x)=y,x\in\text{supp}A\}$$

$$=\bigvee\{f(x))_{g(x,A(x))}(y)\mid x\in\text{supp}A\}$$

$$= \bigvee \{\underset{\sim}{f}(x_{A(x)})(y) \mid x \in \operatorname{supp}A\}$$

$$= \bigvee \{\underset{\sim}{f}(x_{A(x)}) \mid x \in \operatorname{supp}A\}(y).$$

所以 $\underset{\sim}{f}(A)(y) = \bigvee\{\underset{\sim}{f}(x_{A(x)}) \mid x \in \operatorname{supp}A\}$ 故(b)成立.

充分性，由(a)知，$\forall\ (x,\lambda) \in \underset{\sim}{X}$，$\underset{\sim}{f}(x_\lambda) = y_\alpha$，若令 $y = f(x)$(y 与 λ 无关)，$\alpha = g(x,\lambda)$，则 $(y,\alpha) = (f(x), g(x,\lambda))$，仍记 $\underset{\sim}{f} = (f;g)$. 由(b)知，$\forall\ A \in \mathscr{F}(X)$，有

$$\underset{\sim}{f}(A)(y) = [\bigvee^{\bullet}\{f(x_{A(x)}) \mid x \in \operatorname{supp}A\}](y)$$

$$= \bigvee\{f(x_{A(x)})(y) \mid x \in \operatorname{supp}A\}$$

$$= \bigvee\{((f(x))_{g(x,A(x))})(y) \mid x \in \operatorname{supp}A\}$$

$$= \bigvee\{g(x,A(x)) \mid f(x) = y, x \in \operatorname{supp}A\}$$

$$= \bigvee\{g(x,A(x)) \mid x \in f^{-1}(y) \cap \operatorname{supp}A\}.$$

故 $\underset{\sim}{f}$ 为可生成的.

(2) 由 $\underset{\sim}{f} = (f,g)$ 的保序性即知，$\forall\ x \in X$，g_x 的单调不减性，从而，g_x^{-1} 也是单调不减的，若存在 $\alpha_0 \in [0,1)$，使 $g_x^{-1}(x_0) < g_x^{-1}(\alpha_0 + 0)$；于是，存在 $\delta_0 \in (0,1)$，使 $g_x^{-1}(\alpha_0) < \delta_0 < g_x^{-1}(\alpha_0 + 0)$. 由 $g_x^{-1}(\cdot)$ 的定义知，$g_x(\delta_0) > \alpha_0$，则存在 $\alpha \in (\alpha_0, 1]$，使 $g_x(\delta_0) > \alpha$. 从而 $\delta_0 \geqslant g_x^{-1}(\alpha) \geqslant g_x^{-1}(\alpha_0 + 0)$. 引出矛盾. 所以 g_x^{-1} 右连续. 从而，对于任何 $\alpha_t \in (0,1]$，$t \in T$，令 $\alpha_0 = \bigwedge_{t\in T} \alpha_t$. 显然，有 $g_x^{-1}(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t) = g_x^{-1}(\alpha_0) \leqslant \bigwedge_{t\in T} g_x^{-1}(\alpha_t)$. 反之，若某 $t \in T$，使 $\alpha_0 = \alpha_t$. 则 $g_x^{-1}(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t) = g_x^{-1}(\alpha_0) = \bigwedge_{t\in T} g_x^{-1}(\alpha_t)$. 若 $\forall\ t \in T$，都有 $\alpha_0 < \alpha_t$. 必存在 $\{\alpha_{t_n}, n \geqslant 1\} \subseteq \{\alpha_t, t \in T\}$，适合 $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \alpha_{t_n} = \alpha_0$. 于是，由 g_x^{-1} 的右连续性及单调不减性知

$$g_x^{-1}(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t) = g_x^{-1}(\alpha_0) = g_x^{-1}(\alpha_0 + 0) = \lim_{\alpha\to\alpha_0+0} g_x^{-1}(\alpha)$$

$$= \bigwedge_{\alpha>\alpha_0} g_x^{-1}(\alpha) = \bigwedge_{n=1}^{\infty} g_x^{-1}(\alpha_{t_n}) = \bigwedge_{t\in T} g_x^{-1}(\alpha_t).$$

证毕.

推论 设 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$ 是保序的可生成映射，$\{A_t,t\in T\}\subseteq\mathscr{F}(X)$. 如果 $\forall\ t_1,t_2\in T,t_1\neq t_2,A_{t_1}\cap A_{t_2}=\varnothing$，则 $\underset{\sim}{f}(\bigvee\limits_{t\in T}A_t)=\bigvee\limits_{t\in T}\underset{\sim}{f}(A_t)$.

证明 由 $\{A_t,t\in T\}$ 的不相交性知，$\text{supp}(\bigvee\limits_{t\in T}A_t)=\bigcup\limits_{t\in T}\text{supp}A_t$ 且 $\text{supp}A_{t_1}\cap\text{supp}A_{t_2}=\varnothing,t_1\neq t_2$. 于是，由定理 4.3 知

$$\underset{\sim}{f}(\bigvee_{t\in T}A_t)=\bigvee\{\underset{\sim}{f}(x_{\bigvee\limits_{t\in T}A_t(x)})\}\mid x\in\text{supp}(\bigvee_{t\in T}A_t)\}$$

$$=\bigvee\{\bigvee_{t\in T}f(x_{A_t(x)})\mid x\in\bigcup_{t\in T}\text{supp}A_t\}=\bigvee_{t\in T}\underset{\sim}{f}(A_t).$$ 证毕.

定理 4.4 设映射 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y},\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(f(x),g(x,\lambda))$ 适合如下条件：$\forall\ x\in X,g(x,\cdot):(0,1]\to(0,1]$ 是单调不减左连续函数. 则

(1) 扩张映射 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$ 是 F 变换；

(2) $\forall\ \alpha\in(0,1],g_x(\lambda)\leqslant\alpha\Leftrightarrow\lambda\leqslant g_x^{-1}(\alpha)$,

$$g_x(\lambda)>\alpha\Leftrightarrow\lambda>g_x^{-1}(\alpha).$$

(3) $g_x^{-1}(\alpha)=\bigwedge\{\lambda\mid\lambda\in[0,1],g_x(\lambda)>\alpha\},\forall\ \alpha\in[0,1]$.

(4) $\forall\ B\in\mathscr{F}(Y)$,

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x)=\bigwedge\{\lambda\mid\lambda\in[0,1],g_x(\lambda)>B[f(x)]\},\forall\ x\in X.$$

证明 (1) 显然 $\underset{\sim}{f}(A)=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing$.

由 $g_x(\cdot)$ 的单调不减且左连续知，$\forall\ \{\lambda_t\}\subseteq[0,1]$,

$$g_x(\bigvee_t\lambda_t)=\bigvee_t g_x(\lambda_t).$$

事实上，令 $\lambda=\bigvee\limits_t\lambda_t$，显然有 $\bigvee\limits_t g_x(\lambda_t)\leqslant g_x(\lambda)$. 又 $\forall\ \mu<\lambda,\exists\ t$，使得 $\mu<\lambda_t$，则 $g_x(\mu)\leqslant g_x(\lambda_t)\leqslant\bigvee\limits_t g_x(\lambda_t)$. 于是

$$g_x(\lambda)=\lim_{\mu\to\lambda-0}g_x(\mu)\leqslant\bigvee_t g_x(\lambda_t).$$

根据上面的推导，$\forall\ \{A_t\}\in\mathscr{F}(X)$ 与 $\forall\ y\in Y$

$$\underset{\sim}{f}(\bigvee_t A_t)(y)=\bigvee\{g_x[\bigvee_t A_t(x)]\mid x\in f^{-1}(y)\}$$

$$=\bigvee\{\bigvee_t g_x[A_t(x)]\mid x\in f^{-1}(y)\}$$

$$=\bigvee_t[\bigvee\{g_x[A_t(x)]\mid x\in f^{-1}(y)\}]$$

$$=[\bigvee_t \underset{\sim}{f}(A_t)](y).$$

所以 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$是 F 变换.

(2) 由 $g_x^{-1}(\alpha)$的定义及 $g_x[g_x^{-1}(\alpha)]\leqslant\alpha$ 立即得证.

(3) 由(2)立即得证.

(4) 由(3)立即得证. 证毕.

定义 4.3 如果 F 变换 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$的逆变换 $\underset{\sim}{f}^{-1}$保并，即

$$\forall\ \{B_t\}\subseteq\mathscr{F}(Y),\underset{\sim}{f}^{-1}(\bigvee_t B_t)=\bigvee_t \underset{\sim}{f}^{-1}(B_t),$$

则称 $\underset{\sim}{f}$为 $\mathscr{F}(X)$到 $\mathscr{F}(Y)$的**模糊序同态**，简称为 F **序同态**.

由于 F 序同态是 F 变换，因此，定理 4.1 中的性质全部成立. 此外，还有

定理 4.5 设 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$是 F 序同态，则下列性质成立.

(1) 令 $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{X})=B,\forall\ y\in \text{supp}B,\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}]\neq\varnothing$ 且

$$\bigcup\{\text{supp}\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}]\mid y\in\text{supp}B\}=X;$$

(2) $\underset{\sim}{f}$是可生成的，而且生成函数 $\underset{\sim}{f}=(f,g).\ \underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 适合$\forall\ x\in X,g(x,\cdot)$为$(0,1]$到$(0,1]$的严格单增左连续函数；

(3) $\forall\ A\in\mathscr{F}(X),\underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A)]=A\Leftrightarrow f$ 为单射;

(4) $\forall\ x\in X,g_x$ 保交$\Leftrightarrow g_x$ 是(严格单增)连续函数

$\Leftrightarrow\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射;

(5) $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$保交$\Leftrightarrow f$ 为单射且 g_x 保交($\forall\ x\in X$)

证明 (1) 如果$\exists\ z\in\text{supp}B,\underset{\sim}{f}^{-1}[z_{B(z)}]=\varnothing$，令 $C\in\mathscr{F}(Y)$适合

$$C(y)=\begin{cases}B(y), & y\neq z,\\ 0, & y=z.\end{cases}$$

则

$$0 = C(z) \geqslant \underset{\sim}{f}\,[\underset{\sim}{f}^{-1}(C)](z) = \underset{\sim}{f}\,[\bigvee_{y\in \text{supp}C}\underset{\sim}{f}^{-1}(y_{C(y)})](z)$$

$$= \underset{\sim}{f}\,[\bigvee_{y\in \text{supp}B}\underset{\sim}{f}^{-1}(y_{B(y)})](z) = \underset{\sim}{f}\,[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)](z)$$

$$= \underset{\sim}{f}\,(\underset{\sim}{X})(z) > 0,$$

这是不可能的，故$\forall\ y\in \text{supp}B \Rightarrow \underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}] \neq \varnothing$.

又
$$\bigvee_{y\in \text{supp}B}\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}] = \underset{\sim}{f}^{-1}[\bigvee_{y\in \text{supp}B} y_{B(y)}] = \underset{\sim}{f}^{-1}(B) = \underset{\sim}{X}$$

则

$$\bigcup\ \{\text{supp}\underset{\sim}{f}^{-1}[y_{B(y)}]\,|\,y \in \text{supp}B\} = \text{supp}\underset{\sim}{X} = X.$$

(2)　根据定理 4.2 知，$\underset{\sim}{f}$是可生成的，而且$\forall\ x\in X, g(x,\cdot)$是单调不减左连续函数. 下面证明 $g(x,\cdot)$严格单增.

事实上，如果存在 $0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant 1$，使得 $g(x,\lambda_1)=g(x,\lambda_2)=\alpha$，则由定理 4.4 知

$$\underset{\sim}{f}^{-1}([f(x)]_\alpha)(x) = g_x^{-1}(\alpha) \geqslant \lambda_2.$$

又

$$\underset{\sim}{f}^{-1}([f(x)]_\alpha)(x) = \underset{\sim}{f}^{-1}(\bigvee_{\delta<\alpha}[f(x)]_\delta)(x) = \bigvee_{\delta<\alpha}\underset{\sim}{f}^{-1}([f(x)]_\delta)(x)$$

与$\forall\ \delta<\alpha, \underset{\sim}{f}^{-1}([f(x)]_\delta)(x)\leqslant\lambda_1$ 得

$$\underset{\sim}{f}^{-1}([f(x)]_\alpha)(x) \leqslant \lambda_1$$

发生矛盾. 这就证明了$\forall\ x\in X, g(x,\cdot)$是在$(0,1]$严格单增的.

(3)　由 $g(x,\cdot)$的严格单增性知

$$f\ \text{为单射} \Leftrightarrow \underset{\sim}{f} = (f,g)\ \text{为单射}$$

再由定理 4.1 知

$$\underset{\sim}{f}\ \text{为单射} \Leftrightarrow \forall\ A \in \mathscr{F}(X), \underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}\,(A)] = A.$$

由上述即得所欲证.

(4)　g_x 保交 $\Leftrightarrow \forall\ \lambda \in [0,1], g_x(\lambda) = \bigwedge_{\mu>\lambda} g_x(\mu) = \lim_{\mu\to\lambda+0} g_x(\mu)$

$$\Leftrightarrow g_x(\cdot)\ \text{在}[0,1]\ \text{连续，且}\ g_x(0) = 0$$

$\Leftrightarrow g(x,\cdot)$ 在$(0,1]$连续(严格单增),且 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} g(x,\lambda)=0$

$\Leftrightarrow \underset{\sim}{f}=(f,g)$ 是 F 映射(由定理 2.2).

(5) 必要性. 如果 f 不是单射,则存在 $x,u\in X,x\neq u$,但 $f(x)=f(u)\triangleq y$,于是,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,有 $x_\lambda\wedge u_\lambda=\varnothing$

$$\underset{\sim}{f}(x_\lambda\wedge u_\lambda)=\underset{\sim}{f}[\varnothing]=\varnothing,$$

$$\underset{\sim}{f}(x_\lambda)\wedge\underset{\sim}{f}(u_\lambda)=y_{g_x(\lambda)}\wedge y_{g_u(\lambda)}=y_{[g_x(\lambda)\wedge g_u(\lambda)]},$$

所以 $\underset{\sim}{f}(x_\lambda\wedge u_\lambda)\neq\underset{\sim}{f}(x_\lambda)\wedge\underset{\sim}{f}(u_\lambda)$,此与 f 的保交假设矛盾. 故 f 必为单射.

$\forall x\in X$,令 $y=f(x)$,由 f 为单射知,$f^{-1}(y)=\{x\}$,于是,由 $\underset{\sim}{f}$ 的保交性知,$\forall\{\lambda_t\}\subseteq(0,1]$,若 $\bigwedge\limits_t\lambda_t=\lambda>0$

$$g_x(\bigwedge_t\lambda_t)=\underset{\sim}{f}(x_\lambda)(y)=\underset{\sim}{f}[\bigwedge_t x_{\lambda_t}](y)$$

$$=\bigwedge_t[\underset{\sim}{f}(x_{\lambda_t})(y)]=\bigwedge_t g_x(\lambda_t).$$

若 $\bigwedge\limits_t\lambda_t=0$ 则 $\bigwedge\limits_t x_{\lambda_t}=\varnothing$. 再由 $\underset{\sim}{f}$的保交性知

$$\bigwedge_t g_x(\lambda_t)=\bigwedge_t[\underset{\sim}{f}(x_{\lambda_t})(y)]=\underset{\sim}{f}[\bigwedge_t x_{\lambda_t}](y)$$

$$=\underset{\sim}{f}(\varnothing)(y)=0=g_x(\bigwedge_t\lambda_t).$$

所以 g_x 是保交的.

充分性. $\forall\{A_t\}\subseteq\mathscr{F}(X)$,由 f 为单射与$\forall x\in X,g_x$ 保交,令 $y=f(x)$,得

$$\underset{\sim}{f}(\bigwedge_t A_t)(y)=g_x[\bigwedge_t A_t(x)]=\bigwedge_t g_x[A_t(x)]=[\wedge\underset{\sim}{f}(A_t)](y)$$

(如果 $f^{-1}(y)=\varnothing$,上面等式两端均为零). 因此 $\underset{\sim}{f}$保交. 证毕.

定理 4.6 设 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y},\underset{\sim}{f}(x,\lambda)=(f(x),g(x,\lambda))$适合以下条件:$\forall x\in X,g(x,\cdot):(0,1]\to(0,1)$是严格单增左连续函数,则

(1) $\forall x\in X,g_x(0)=g_x^{-1}(0)=0,g_x,g_x^{-1}$ 保并,g_x^{-1} 保交.

(2) $\forall\, x\in X,\alpha\in[0,1]$

$$g_x(\lambda)<\alpha\Leftrightarrow\lambda<g_x^{-1}(\alpha),$$
$$g_x(\lambda)\geqslant\alpha\Leftrightarrow\lambda\geqslant g_x^{-1}(\alpha).$$

(3) $\forall\, x\in X,g_x^{-1}(\cdot):(0,1]\to(0,1]$是单调不减连续函数.

(4) $\forall\, x\in X,\alpha\in[0,1]$,

$$g_x^{-1}(\alpha)=\bigvee\{\lambda\mid\lambda\in[0,1],g_x(\lambda)<\alpha\}$$
$$=\bigwedge\{\lambda\mid\lambda\in[0,1],g_x(\lambda)\geqslant\alpha\}$$

(5) 扩张映射 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$为 F 序同态,而且$\forall\, B\in\mathscr{F}(Y)$

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x)=\bigvee\{\lambda\mid\lambda\in[0,1],g_x(\lambda)<B[f(x)]\}$$
$$=\bigwedge\{\lambda\mid\lambda\in[0,1],g_x(\lambda)\geqslant B[f(x)]\},\qquad\forall\, x\in X.$$

证明 (1)根据定理 4.3 与定理 4.4 只需证明 g_x^{-1} 保并. 事实上

$$\forall\,\{\alpha_t\}\subseteq[0,1],g_x^{-1}(\bigvee_t\alpha_t)\geqslant\bigvee_t g_x^{-1}(\alpha_t).$$

若等式不成立,则$\exists\ \lambda\in(0,1)$使 $g_x^{-1}(\bigvee_t\alpha_t)>\lambda>\bigvee_t g_x^{-1}(\alpha_t)$. 一方面由 g_x 严格单增性知,$g_x(\lambda)<g_x(g_x^{-1}(\bigvee_t\alpha_t))\leqslant\bigvee_t\alpha_t$;另一方面,由 $\lambda>\bigvee_t g_x^{-1}(\alpha_t)\geqslant g_x^{-1}(\alpha_t),\forall\, t$,与定理 4.4(2),$g_x(\lambda)>\alpha_t,\forall\, t$. 于是又有 $g_x(\lambda)\geqslant\bigvee_t\alpha_t$. 引出矛盾. 所以 $g_x^{-1}(\bigvee_t\alpha_t)=\bigvee g_x^{-1}(\alpha_t)$.

(2) 由 $g_x(\cdot)$的严格单增,左连续性以及 g_x^{-1}的定义立即得证.

(3) 由(1)立即得证.

(4) 由(2)立即得证.

(5) 由定理 4.4 只需证扩张映射 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$的逆映射 $\underset{\sim}{f}^{-1}$保并. 由(4)知,$\forall\, B\in\mathscr{F}(Y),\forall\, x\in X$,

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x)=\bigvee\{\lambda\mid\lambda\in[0,1],g_x(\lambda)<B[f(x)]\}$$

$$= \wedge \{\lambda | \lambda \in [0,1], g_x(\lambda) \geqslant B[f(x)]\}$$

$\forall \{B_t\} \subseteq \mathscr{F}(Y)$，若令 $B = \bigvee_t B_t$，则 $\forall x \in X$，有

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)(x) = \vee \{\lambda | \lambda \in [0,1], g_x(\lambda) < B[f(x)]\}$$

$$= \vee \{\lambda | \lambda \in [0,1], g_x(\lambda) < \bigvee_t B_t[f(x)]\}$$

$$= \vee [\bigcup_t \{\lambda | \lambda \in [0,1], g_x(\lambda) < B_t[f(x)]\}]$$

$$= \bigvee_t [\vee \{\lambda | \lambda \in [0,1], g_x(\lambda) < B_t[f(x)]\}]$$

$$= \bigvee_t \underset{\sim}{f}^{-1}(B_t)(x).$$

故 $\underset{\sim}{f}: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ 为 F 序同态. 证毕

推论 设 $\underset{\sim}{f} = (f, g): \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射，则扩张映射 $\underset{\sim}{f}: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ 是 F 序同态的充要条件是，$\forall x \in X, g(x, \cdot)$ 是 $(0,1]$ 到 $(0,1]$ 的严格单增(连续)函数.

定义 4.4 如果 F 变换 $\underset{\sim}{f}: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ 还满足条件(逆映射保补)：$\forall B \in \mathscr{F}(Y)$，$\underset{\sim}{f}^{-1}(B') = [\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]'$，

则称 f 为 $\mathscr{F}(X)$ 到 $\mathscr{F}(Y)$ 的**序同态**.

定理 4.7 设 $\underset{\sim}{f}: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ 是 F 变换，则 $\underset{\sim}{f}$ 是序同态的充要条件是，$\forall B \in \mathscr{F}(Y)$.

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B) = \wedge \{A | A \in \mathscr{F}(X), \underset{\sim}{f}(A') \leqslant B'\}$$

证明 必要性. 由定理 4.1 及序同态的定义知

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(B) = [\underset{\sim}{f}^{-1}(B')]' = [\vee \{A | A \in \mathscr{F}(X), f(A) \leqslant B'\}]'$$

$$= \wedge \{A' | A' \in \mathscr{F}(X), \underset{\sim}{f}(A'') \leqslant B'\}$$

$$= \wedge \{A | A \in \mathscr{F}(x) \underset{\sim}{f}(A') \leqslant B'\}$$

充分性. $\underset{\sim}{f}^{-1}(B') = \wedge \{A | A \in \mathscr{F}(X), \underset{\sim}{f}(A') \leqslant B'\}$

$$= [\vee \{A' | A' \in \mathscr{F}(X), \underset{\sim}{f}(A') \leqslant B\}]'$$

$$=[\vee\ \{A|A\in\mathscr{F}(X),\underset{\sim}{f}(A)\leqslant B\}]'$$

$$=[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]'.$$

所以 $\underset{\sim}{f}$ 为序同态. 证毕.

定理 4.8 设 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$ 是序同态,则

(1) $\underset{\sim}{f}$ 为 F 序同态;

(2) $\underset{\sim}{f}$ 为可生成的;

(3)生成函数 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 所得到的 g_x 与 g_x^{-1}, $\forall\ x\in X$,适合

$$\forall\ \alpha\in[0,1],g_x^{-1}(\alpha')=[g_x^{-1}(\alpha)]',g_x(\alpha')=[g_x(\alpha)]'.$$

且 $g_x(\cdot)$ 与 $g_x^{-1}(\cdot)$ 均为 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的严格单增的连续函数.

证明 (1) 只需证明 $\underset{\sim}{f}^{-1}$ 保并. 事实上, $\forall\ \{B_t\}\subseteq\mathscr{F}(Y)$, $A\in\mathscr{F}(X)$

$$\bigvee_t\underset{\sim}{f}^{-1}(B_t)\leqslant A\Leftrightarrow\forall\ t,\underset{\sim}{f}^{-1}(B_t)\leqslant A$$

$$\Leftrightarrow\forall\ t,A'\leqslant[\underset{\sim}{f}^{-1}(B_t)]'=\underset{\sim}{f}^{-1}(B_t')$$

$$\Leftrightarrow\forall\ t,\underset{\sim}{f}(A')\leqslant B_t'$$

$$\Leftrightarrow\underset{\sim}{f}(A')\leqslant\bigwedge_t B_t'=(\bigvee_t B_t)'$$

$$\Leftrightarrow A'\leqslant\underset{\sim}{f}^{-1}[(\bigvee_t B_t)']=[\underset{\sim}{f}^{-1}(\bigvee_t B_t)]'$$

$$\Leftrightarrow\underset{\sim}{f}^{-1}(\bigvee_t B_t)\leqslant A.$$

因此

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(\bigvee_t B_t)=\bigvee_t\underset{\sim}{f}^{-1}(B_t).$$

(2) 由(1)及定理 4.5 即得证.

(3) $\forall\ \alpha\in(0,1]$,如果隶属函数 $\alpha(\cdot)\equiv\alpha$ 的常值 F 集仍简记为 α,则

$$g_x^{-1}(\alpha')=\underset{\sim}{f}^{-1}(\alpha')(x)=[\underset{\sim}{f}^{-1}(\alpha)]'(x)$$

$$=[\underset{\sim}{f}^{-1}(\alpha)(x)]' = [g_x^{-1}(\alpha)]'$$

$$\begin{aligned} g_x(\lambda') &= \wedge\ \{\alpha \mid \alpha \in [0,1], g_x(\lambda') \leqslant \alpha\} \\ &= \wedge\ \{\alpha \mid \alpha \in [0,1], \lambda' \leqslant g_x^{-1}(\alpha)\} \\ &= \wedge\ \{\alpha \mid \alpha \in [0,1], \lambda \geqslant [g_x^{-1}(\alpha)]' = g_x^{-1}(\alpha')\} \\ &= \wedge\ \{\alpha \mid \alpha \in [0,1], g_x(\lambda) \geqslant \alpha'\} \\ &= \wedge\ \{\alpha \mid \alpha \in [0,1], [g_x(\lambda)]' \leqslant \alpha\} \\ &= [g_x(\lambda)]' \end{aligned}$$

又$\forall\ \lambda \in [0,1)$，显然，$\mu \searrow \lambda$ 则 $\mu' \nearrow \lambda'$ 因为

$$\lim_{\mu \to \lambda+0} g_x(\mu) = \lim_{\mu' \to \lambda'-0} [g_x(\mu')]' = 1 - \lim_{\mu' \to \lambda'-0} g_x(\mu')$$

$$= 1 - g_x(\lambda') = [g_x(\lambda')]' = g_x(\lambda),$$

则 $g_x(\cdot)$右连续，又由 $g_x(\cdot)$左连续且严格单增，即得所欲证. 证毕.

定理 4.9　设 $\underset{\sim}{f} = (f, g): \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$，$\underset{\sim}{f}(x,\lambda) = (f(x), g(x,\lambda))$满足下列条件：$\forall\ x \in X$，$g(x,\cdot): (0,1] \to (0,1]$是严格单增的连续函数，$g\left(x, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$，$g(x,1) = 1$，且$\forall\ \lambda \in (0,1)$，$g(x,\lambda') = [g(x,\lambda)]'$. 则

(1)　$\underset{\sim}{f}: \underset{\sim}{X} \to \underset{\sim}{Y}$ 是 F 映射；

(2)　扩张映射 $\underset{\sim}{f}: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$为序同态；

(3)　$\forall\ x \in X$，g_x^{-1}是严格单增的连续函数，$g_x^{-1}(1) = 1$，$g_x^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$，且$\forall\ \alpha \in [0,1]$，$[g_x^{-1}(\alpha)]' = g_x^{-1}(\alpha')$.

证明　(1)　因 $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} g(x,\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to 0^+} [g(x,\lambda')]' = 1 - \lim\limits_{\lambda' \to 1-0} g(x,\lambda') = 0$.

故由定理 2.2 即得所欲证.

(2)　由定理 4.6，只需证明$\forall\ B \in \mathscr{F}(Y)$，$\underset{\sim}{f}^{-1}(B') =$

$[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]'$ 事实上，显然，$\forall x\in X,\lambda\in[0,1],g_x(\lambda')=[g_x(\lambda)]'$，则

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{f}^{-1}(B')(x)&=\bigvee\{\lambda|\lambda\in[0,1],g_x(\lambda)\leqslant B'[f(x)]\}\\&=\bigvee\{\lambda|\lambda\in[0,1],[g_x(\lambda)]'\geqslant B[f(x)]\}\\&=\bigvee\{\lambda|\lambda\in[0,1],g_x(\lambda')\geqslant B[f(x)]\}\\&=[\bigwedge\{\lambda'|\lambda'\in[0,1],g_x(\lambda')\geqslant B[f(x)]\}]'\\&=[\bigwedge\{\lambda|\lambda\in[0,1],g_x(\lambda)\geqslant B[f(x)]\}]'\\&=[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]'(x).\end{aligned}$$

(3)　由假设条件知，$g_x:[0,1]\to[0,1]$ 为单满射，于是，g_x^{-1} 也为单满射，从而，g_x^{-1} 是严格单增的连续函数，且 $g_x^{-1}(1)=1,g_x^{-1}[g_x(\lambda)]=\lambda$. 特别，$\forall\alpha\in[0,1]$，存在 $\lambda\in[0,1]$ 合于 $g_x(\lambda)=\alpha$，$g_x(\lambda')=[g_x(\lambda)]'=\alpha'$. 则 $g_x^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，且

$$[g_x^{-1}(\alpha)]'=\{g_x^{-1}[g_x(\lambda)]\}'=\lambda'=g_x^{-1}[g_x(\lambda')]=g_x^{-1}(\alpha').$$

证毕.

定理 4.10　设 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$ 是序同态，则下列命题相互等价.

(1)　$\underset{\sim}{f}$ 为单满射.

(2)　生成函数 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 为单满射.

(3)　$f:X\to Y$ 为单满射.

(4)　$(\underset{\sim}{f}^{-1})^{-1}=\underset{\sim}{f}$ 即 $\forall A\in\mathscr{F}(X),(\underset{\sim}{f}^{-1})^{-1}(A)=\underset{\sim}{f}(A)$.

(5)　$\underset{\sim}{f}^{-1}:\mathscr{F}(Y)\to\mathscr{F}(X)$ 为单满序同态.

(6)　$\forall A\in\mathscr{F}(X),\underset{\sim}{f}(A')=[\underset{\sim}{f}(A)]'$.

证明　(1)⇔(2)　由 $\underset{\sim}{f}(x_\lambda)=[f(x)]_{g(x,\lambda)}$ 即可得证.

(2)⇔(3)　$\forall x\in X,g(x,\cdot):(0,1]\to(0,1]$ 为单满射，即可证明.

(1)⇒(4)　因为 $\underset{\sim}{f}$ 为单满射，则 $\underset{\sim}{f}^{-1}$ 也为单满射，故 $\forall A\in$

$\mathscr{F}(X)$,

$$\underset{\sim}{f}(A)=B\Leftrightarrow\underset{\sim}{f}^{-1}(B)=A\Leftrightarrow(\underset{\sim}{f}^{-1})^{-1}(A)=B,$$

所以$(\underset{\sim}{f}^{-1})^{-1}(A)=A$

(4)⇒(5) $\forall A\in\mathscr{F}(X)$,

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{f}^{-1})^{-1}(A')&=\bigvee\{B\mid B\in\mathscr{F}(Y),\underset{\sim}{f}^{-1}(B)\leqslant A'\}\\&=\bigvee\{B\mid B\in\mathscr{F}(Y),A\leqslant[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]'=\underset{\sim}{f}^{-1}(B')\}.\\&=\bigvee\{B\mid B\in\mathscr{F}(Y),\underset{\sim}{f}(A)\leqslant B'\}\\&=[\bigwedge\{B'\mid B'\in\mathscr{F}(Y),\underset{\sim}{f}(A)\leqslant B'\}]'\\&=[\underset{\sim}{f}(A)]'=[(\underset{\sim}{f}^{-1})^{-1}(A)]'\end{aligned}$$

又$\underset{\sim}{f}^{-1}:\mathscr{F}(Y)\to\mathscr{F}(X)$为$F$变换，故$\underset{\sim}{f}^{-1}$为序同态.

$$\forall A\in\mathscr{F}(X),B\in\mathscr{F}(Y)$$

$$A\leqslant\underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A)]=\underset{\sim}{f}^{-1}[(\underset{\sim}{f}^{-1})^{-1}(A)]\leqslant A$$

$$B\leqslant(\underset{\sim}{f}^{-1})^{-1}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]=\underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]\leqslant B$$

得 $\underset{\sim}{f}^{-1}[(\underset{\sim}{f}^{-1})^{-1}(A)]=A,(\underset{\sim}{f}^{-1})^{-1}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]=B$，则由定理4.1即得$\underset{\sim}{f}^{-1}$为单满射.

(1)⇒(6) 由$\underset{\sim}{f}$为单满射知，$\underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A)]=A,\underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]=B$，则

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{f}(A')&=\bigwedge\{B\mid B\in\mathscr{F}(Y),\underset{\sim}{f}(A')\leqslant B\}\\&=\bigwedge\{B\mid B\in\mathscr{F}(Y),A'\leqslant\underset{\sim}{f}^{-1}(B)\}\\&=\bigwedge\{B\mid B\in\mathscr{F}(Y),A\geqslant[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]'=\underset{\sim}{f}^{-1}(B')\}\\&=\bigwedge\{B\mid B\in\mathscr{F}(Y),\underset{\sim}{f}(A)\geqslant f[\underset{\sim}{f}^{-1}(B')]=B'\}\\&=[\bigvee\{B'\mid B'\in\mathscr{F}(Y),\underset{\sim}{f}(A)\geqslant B'\}]'\\&=[\underset{\sim}{f}(A)]'.\end{aligned}$$

(5)⇒(3) $\forall\, y\in Y, \underset{\sim}{f}^{-1}(\chi_{\{y\}})\neq\varnothing$,则存在 $x\in X$,使

$$\underset{\sim}{f}^{-1}(\chi_{\{y\}})(x)=g_x^{-1}\{\chi_{\{y\}}[f(x)]\}=1$$

从而 $f(x)=y$.

又若 $x,u\in X, f(x)=f(u)$,则 $\underset{\sim}{f}^{-1}(\chi_{\{f(x)\}})=\underset{\sim}{f}^{-1}(\chi_{\{f(u)\}})$. 由于 $\underset{\sim}{f}^{-1}$为序同态,则是可生成的. 再由 $\underset{\sim}{f}^{-1}$的单满性,得

$$\{x\}=\mathrm{supp}\underset{\sim}{f}^{-1}(\chi_{\{f(x)\}})=\mathrm{Supp}\underset{\sim}{f}^{-1}(\chi_{\{f(u)\}}=\{u\}$$

于是,$x=u$.

由上所述,即已证明 f 为单满射.

(6)⇒(3) 因为 $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{X})=[\underset{\sim}{f}(\varnothing)]'=\varnothing'=\underset{\sim}{Y}$. 则 $\mathrm{Supp}\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{X})=Y$,从而,$\forall\, y\in Y$ 存在 $x\in X$ 适合 $f(x)=y$.

又 $\forall\, x,u\in X$,如果 $x\neq u$,则 $\chi_{\{x\}}\wedge\chi_{\{u\}}=\varnothing$, $\chi_{\{u\}}\leqslant\chi_{\{x\}}'$,由于 $g(x,1)=1$,则 $\underset{\sim}{f}(\chi_{\{x\}})[f(x)]=1$,由此得

$$0\leqslant\underset{\sim}{f}(\chi_{\{u\}})[f(x)]\leqslant f(\chi_{\{x\}}')[f(x)]=\{\underset{\sim}{f}(\chi_{\{x\}})[f(x)]\}'=0,$$

即 $\underset{\sim}{f}(\chi_{\{u\}})[f(x)]=0$ 从而,$f(x)\neq f(u)$.

由上所述,即已证明 f 为单满射. 证毕.

类似地,可以证明下述定理.

定理 4.11 设映射 $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$为 F 变换,则下列命题相互等价.

(1) $\underset{\sim}{f}$为单满射.

(2) $\underset{\sim}{f}$为可生成的且生成函数 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{Y}$ 为单满射.

(3) f 为单满射,且$\forall\, x\in X, g_x(\cdot)$为严格单增连续函数,$g_x(0)=0, g_x(1)=1$,适合$\forall\,(x,\lambda)\in X, \underset{\sim}{f}(x_\lambda)=(f(x))_{g(x,\lambda)}$.

(4) $\underset{\sim}{f}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$为单满 F 序同态.

(5) $(\underset{\sim}{f}^{-1})^{-1}=\underset{\sim}{f}$且 $\underset{\sim}{f}^{-1}$保并.

(6) $\underset{\sim}{f}^{-1}:\mathscr{F}(Y)\to\mathscr{F}(X)$为单满 F 序同态.

(7) $\forall\ A\in\mathscr{F}(X), B\in\mathscr{F}(Y), \underset{\sim}{f}^{-1}[\underset{\sim}{f}(A)]=A, \underset{\sim}{f}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]=B.$

注 映射 $f:X\to Y$ 为单满射，实际上有一个潜在的基本条件：X 与 Y 是等势集合. 因此，如果 X 与 Y 不等势，根本就不可能有 X 与 Y 之间的单满映射存在.

第四章　模糊测度与模糊积分

模糊测度与模糊积分理论是模糊数学的重要组成部分，20 年来得到很大发展，已经提出各种不同类型的模糊测度与积分的框架，所用术语也不尽相同. 限于篇幅，本章着重介绍菅野道夫(Sugeno)、Zadeh、Klement 与何家儒等人引入的几种模糊测度与积分概念及其基本框架. 为了避免混淆，所用术语自成体系，在分明集合情形，一律不冠"模糊"词语，为了区分各种模糊测度概念，分别冠以最先提出该概念的人的姓氏第一个字母.

本章主要内容包括：半测度与积分，S_λ 型测度及其积分，模糊 α 代数与模糊 σ 软代数及其可生成性，模糊半测度与模糊测度，模糊可测映射与模糊积分等.

§1　半测度与积分

定义 1.1　设 X 是论域，$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$满足下列条件：

(1)　$X\in\mathscr{A}$；

(2)　$A\in\mathscr{A}\Rightarrow A'\in\mathscr{A}$；

(3) $\{A_n, n \geq 1\} \subseteq \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$

称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的 σ **代数**,且称 $\langle X, \mathscr{A} \rangle$ **为可测空间**.

显然,$\varnothing \in \mathscr{A}$,且在 $\mathscr{A}$ 中对可列交、差、对称差运算封闭.

定义 1.2 设 $\langle X, \mathscr{A} \rangle$ 为可测空间,映射 $m: \mathscr{A} \to [0, \infty]$ 满足

(1) $m(\varnothing) = 0$;

(2) $A, B \in \mathscr{A}$ 且 $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leqslant m(B)$;

(3) $\{A_n, n \geq 1\} \subseteq \mathscr{P}(X)$ 且 $A_n \subseteq A_{n+1} \Rightarrow m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} m(A_n)$.

则称 m 为 $\langle X, \mathscr{A} \rangle$ 上的**半测度**,且称 $\langle X, \mathscr{A}, m \rangle$ 为**半测度空间**. 特别,如果 $m(X) < +\infty$,称之为**有限半测度**空间;如果 $m(X) = 1$,称之为**正规半测度**空间.

如果半测度 m 还满足

(4) $\{A_n, n \geq 1\} \subseteq \mathscr{P}(X)$ 且 $A_{n+1} \subseteq A_n \Rightarrow m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} m(A_n)$,

则称 m 为**强半测度**.

定理 1.1 设 m 是 $\langle X, \mathscr{A} \rangle$ 上的半测度.

(1) 如果 $A, B \in \mathscr{A}$,则

$m(A \cup B) \geqslant m(A) \vee m(B), m(A \cap B) \leqslant m(A) \wedge m(B)$.

(2) 如果 $\{A_n, n \geq 1\} \subseteq \mathscr{A}$,则

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geqslant \bigvee_{n=1}^{\infty} m(A_n), m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \bigwedge_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

证明是简单的,从略.

定义 1.3 设 m 是可测空间 $\langle X, \mathscr{A} \rangle$ 上的半测度.

(1) 如果 $A, B \in \mathscr{A}$ 且 $A \cap B = \varnothing$,则 $m(A \cup B) = m(A) \vee m(B)$. 称 m 为 S **型测度**且称 $\langle X, \mathscr{A}, m \rangle$ 为 S **型测度空间**

(2) 如果 $A, B \in A$ 且 $A \cap B = \varnothing$,则 $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. 称 m 为 L **型测度**,简称为测度,且称 $\langle X, A, m \rangle$ 为**测度空间**.

定理 1.2 设集合函数 $m: \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ 适合 $m(\varnothing) = 0$,则

下列各命题相互等价.

(1)　m 为 S 型测度.

(2)　m 为半测度且 $\forall A,B\in\mathscr{A}, m(A\cup B)=m(A)\vee m(B)$.

(3)　$\forall\{A_n,n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{A}$ 且 $A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$ 则 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\bigvee_{n=1}^{\infty}m(A_n)$.

(4)　$\forall\{A_n,n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{A}$，有 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\bigvee_{n=1}^{\infty}m(A_n)$

证明　(1)⇒(2)　如果 m 为 S 型测度，显然，m 是半测度，$\forall A,B\in\mathscr{A}$，则 $A\cup B=A\cup(B\cap A')$ 且 $A\cap(B\cap A')=\varnothing$. 于是

$$m(A\cup B)=m(A)\vee m(B\cap A').$$

同理，有

$$m(A\cup B)=m(A\cap B')\vee m(B).$$

再由 $m(B\cap A')\leqslant m(B), m(A\cap B')\leqslant m(A)$，则

$$m(A\cup B)=m(A)\vee m(B\cap A')\vee m(B)\vee m(A\cap B')=m(A)\vee m(B).$$

(2)⇒(1)　显然.

(1)⇒(3)　由归纳法易证：$\forall A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{A}$，且 $A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$，有

$$m(\bigvee_{i=1}^{n}A_i)=\bigvee_{i=1}^{n}m(A_i)$$

则 $\forall\{A_n,n\geqslant 1\}\subseteq A$ 且 $A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$，有

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{k\to\infty}m(\bigcup_{n=1}^{k}A_n)=\lim_{k\to\infty}\bigvee_{n=1}^{k}m(A_n)=\bigvee_{n=1}^{\infty}m(A_n).$$

(2)⇒(4)　类似于(1)⇒(3)的证明.

(4)⇒(2)　$\forall A,B\in\mathscr{A}$，令 $A_1=A, A_2=B, A_n=\varnothing, n\geqslant 3$，则

$$m(A\cup B)=m(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\bigvee_{n=1}^{\infty}m(A_n)=m(A)\vee m(B)$$

又若 $A\subseteq B$，则 $m(A)\leqslant m(A)\vee m(B)=m(A\cup B)=m(B)$.

再 $\forall\{A_n,n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{A}$，且 $A_n\subseteq A_{n+1}$，则

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigvee_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

即已证明 m 为 S 型测度.

(3)⇒(1)　类似于(4)⇒(2)的证明. 证毕.

推论　设$(X,\mathscr{A},m)$为 S 型测度空间,则

(1)　$\forall\ A,B\in\mathscr{A}, m(A)=m(A\cap B)\vee m(A\cap B')$.

(2)　$\forall\ A\in\mathscr{A}, m(A)\vee m(A')=m(X)$.

定理 1.3　设集合函数 $m:\mathscr{A}\to[0,+\infty]$适合 $m(\varnothing)=0$,则下列各命题相互等价.

(1)　m 为$(X,\mathscr{A})$上的测度.

(2)　m 为$(X,\mathscr{A})$上的半测度,且$\forall\ A,B\in\mathscr{A}$,有

$$m(A\cup B)+m(A\cap B)=m(A)+m(B).$$

(3)　$\forall\ \{A_n,n\geqslant 1\}\leq\mathscr{A}$,且 $A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$,有

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

请读者自证.

推论　设$\langle X,\mathscr{A},m\rangle$为有限测度空间,则

(1)　$\forall\ A,B\in\mathscr{A}, m(A)=m(A\cap B)+m(A\cap B')$;

(2)　$\forall\ A,B\in\mathscr{A}, m(A-B)=m(A)-m(A\cap B)$;

(3)　$\forall\ A\in\mathscr{A}, m(A')=m(X)-m(A)$;

(4)　$\forall\ \{A_n,n\geqslant 1\}\leq\mathscr{A}, A_{n+1}\subseteq A_n$,则 $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty} m(A_n)$.

以下凡是经典测度论中的概念和结果,一律直接引用. 欲知其详,可参看有关测度论方面的著作.

现在我们在半测度空间$\langle X,\mathscr{A},m\rangle$的基础上,建立积分理论的框架. 众所周知 Lebesgue 积分是测度论中最重要的基本课题之一,它是建立在测度空间的基础上.

定义 1.4　设$\langle X,\mathscr{A},m\rangle$是半测度空间,$f$ 为定义在$\langle X,\mathscr{A}\rangle$

上的非负广义实值可测函数. $T=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$是 X 的任意一个有限可测分划, $A\in\mathscr{A}$, 令

$$L(f,T)\triangleq\sum_{i=1}^{n}[\bigwedge_{x\in E_i}f(x)]\cdot m(E_i),$$

$$L(f,A,T)\triangleq\sum_{i=1}^{n}[\bigwedge_{x\in E_i\cap A}f(x)]\cdot m(E_i\cap A)$$

则由下式给出的非负(广义)实数

$$L(f)\triangleq\bigvee_{(T)}L(f,T)$$

叫做函数 f 关于半测度 m 的 L **型积分**. 记作 $\int fdm$;由下式给出的非负(广义)实数

$$L(f,A)\triangleq\bigvee_{(T)}L(f,A,T)$$

叫做函数 f 展布在集合 A 上(关于半测度 m)的 L 型积分, 记作 $\int_A fdm$.

如果 m 是测度, 则上述定义中所给出的 $L(f)$ 与 $L(f,A)$ 就是通常的 L 积分. 详细叙述可参看任何一本测度论著作.

虽然上面定义的 L 型积分不像通常的 L 积分那样是线性泛函, 但是也具备不少优良的性质.

定理 1.4　设 $\langle X,\mathscr{A},m\rangle$ 为半测度空间, f,f_1,f_2 为非负广义实值可测函数, $A,B\in\mathscr{A}$.

(1)　如果 $f_1\leqslant f_2$, 则 $\int_A f_1dm\leqslant\int_A f_2dm$.

(2)　如果 $A\subseteq B$, 则 $\int_A fdm\leqslant\int_B fdm$.

(3)　$\int_A(f_1\wedge f_2)dm\leqslant\int_A f_1dm\wedge\int_A f_2dm$,

$$\int_A f_1dm\vee\int_A f_2dm\leqslant\int_A(f_1\vee f_2)dm\leqslant\int_A(f_1+f_2)dm.$$

(4)　$\int_{A\cap B}fdm\leqslant\int_A fdm\wedge\int_B fdm$.

$$\int_{A\cup B} fdm \geqslant \int_A fdm \vee \int_B fdm.$$

(5) 如果 c 为非负实数，则 $\int_A cfdm = c\int_A fdm.$

(6) 如果 $m(A)=0$，则 $\int_A fdm = 0.$

证明是直接的，请读者自证.

定理 1.5 设 $\langle X,\mathscr{A},m\rangle$ 是半测度空间，K 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负简单函数，即 $K(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}(x)$，$\forall\, x\in X$，其中 $\{E_1,E_2,\cdots E_n\}$ 为 X 的一个可测分划，$a_1>a_2>\cdots>a_n\geqslant 0$. 如果对于任何 $A\in\mathscr{A}$，令

$$Q(K,A)=\sum_{i=1}^{n}a_i m(E_i\cap A)$$

则 $$L(f,A)=\bigvee_{K\leqslant f}Q(K,A)$$

证明 当 $K\leqslant f$ 时，显然有 $Q(K,A)\leqslant L(f,A)$，则

$$\bigvee_{K\leqslant f}Q(K,A)\leqslant L(f,A).$$

另一方面，对于 X 的任何一个(有限)可测分划 $T=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$，令

$$K_T=\sum_{i=1}^{n}\left[\bigwedge_{x\in E_i}f(x)\right]\cdot\chi_{E_i},$$

则 K_T 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负简单函数，$K_T\leqslant f$，且

$$Q(K_T,A)=L(f,A,T)$$

于是，又有

$$L(f,A)=\bigvee_{(T)}Q(K_T,A)\leqslant\bigvee_{K\leqslant f}Q(K,A).$$

所以 $$L(f,A)=\bigvee_{K\leqslant f}Q(K,A)$$. 证毕.

注意 $\int_A Kdm\neq Q(K,A)$，这是因为 $Q(\cdot,A)$ 并非单调不减的泛函数.

例 设 X 为任意非空集，且至少含两个元素，A 为 X 的非空真子集，令 $\mathscr{A}\triangleq\{\varnothing,A,A',X\}$. 且规定 $m(\varnothing)=m(A)=m(A')=$

$0, m(X) = 1$ 与 $K = \chi_A + 2\chi_{A'}$，不难验证，$m(\cdot)$为 $\mathscr{A}$ 上的半测度，而且 $\int kdm = 1$ 但 $Q(K, X) = 0$.

还要注意，一般 $\int_A Kdm \neq \int (f \cdot \chi_A)dm$，这是因为 m 不一定满足可加性.

不难证明下面的定理：

定理 1.6　设 $\langle X, \mathscr{A}, m\rangle$ 为半测度空间，$\forall A \in \mathscr{A}$，令 $m_A(\cdot) = m(A \cap \cdot)$，则

(1)　$m_A(\cdot)$为$\langle X, \mathscr{A}\rangle$上的半测度；

(2)　对于任何非负广义实值可测函数 f，有

$$\int_A fdm = \int fdm_A.$$

定理 1.7　设$\langle X, \mathscr{A}, m\rangle$为半测度空间，$\{f_n, n \geqslant 1\}$为一列单调不减的非负广义实值可测函数，且$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$，则

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n dm = \int fdm.$$

证明　显然，$\int f_n dm \leqslant \int fdm, \forall\, n \geqslant 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n dm \leqslant \int fdm$.

另一方面，设 K 为$\langle X, \mathscr{A}\rangle$上的非负简单函数，且 $K \leqslant f$. 任给常数 $c \in [0,1)$，令 $B_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geqslant cK(x)\}$，显然，$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$ 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = X$，则

$$\int f_n dm \geqslant \int_{B_n} f_n dm \geqslant \int_{B_n} (cK)dm \geqslant Q(cK, B_n).$$

容易验证，$Q(cK, \cdot)$是$\langle X, \mathscr{A}\rangle$上的半测度，于是

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n dm \geqslant Q(cK, X).$$

再令 $c \to 1$，则得

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n dm \geqslant Q(K,X).$$

又由定理 1.5 得

$$\int fdm = \bigvee_{K\leqslant f} Q(K,X) \leqslant \lim_{n\to\infty}\int f_n dm.$$

综合上述,得证 $\lim_{n\to\infty}\int f_n dm = \int fdm$. 证毕.

由定理 1.6 与定理 1.7, 立即得

定理 1.8 设 $\langle X,\mathscr{A},m\rangle$ 为半测度空间, $\{f_n,n\geqslant 1\}$ 为一列单调不减的非负广义实值可测函数,且 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$,则对于任何 $A\in\mathscr{A}$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n dm = \int_A fdm$$

定理 1.9 设 $\langle X,\mathscr{A},m\rangle$ 为半测度空间, $\{f_n,n\geqslant 1\}$ 为一列非负广义实值可测函数,则

$$\int (\varliminf_{n\to\infty} f_n)dm \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int f_n dm.$$

定理 1.10 设 $\langle X,\mathscr{A},m\rangle$ 为半测度空间, $\{f_n,n\geqslant 1\}$ 为一列非负广义实值可测函数,则

$$\int (\bigwedge_{n=1}^{\infty} f_n)dm \leqslant \bigwedge_{n=1}^{\infty}\int f_n dm \leqslant \bigvee_{n=1}^{\infty}\int f_n dm \leqslant \int (\bigvee_{n=1}^{\infty} f_n)dm.$$

定理 1.11 设 $\langle X,\mathscr{A},m\rangle$ 为半测度空间, f 为任给的非负广义实值可测函数,则 $L(f,\cdot)$ 是 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的半测度.

下面我们讨论一种新的积分——S 型积分.

定义 1.5 设 $\langle X,\mathscr{A},m\rangle$ 为半测度空间, f 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负广义实值可测函数,则由下式给出的非负(广义)实数

$$S(f) \triangleq \bigvee_{\alpha\geqslant 0}[\alpha \wedge m(f>\alpha)]$$

称为 f 关于半测度 m 的 S **型积分**,记为 $\int f\circ m$. 其中 $(f>\alpha)=\{x$

$\in X \mid f(x) > \alpha\}$,以后不再申明.

如果 $A \in \mathscr{A}$,则由下式给出的非负广义实数

$$S(f,A) \triangleq \bigvee_{\alpha \geq 0} \{\alpha \wedge m[A \cap (f > \alpha)]\}$$

称为 f 展布在 A 上(关于半测度 m)的 S 型积分,记作 $\int_A f \circ m$.

由上面定义,容易证明

定理 1.12 设 $\langle X, \mathscr{A}, m \rangle$ 为半测度空间,f, f_1, f_2 为非负广义实值可测函数,$A, B \in \mathscr{A}$.

(1) $\forall\ \alpha \geq 0$,有

$$\alpha \wedge m[A \cap (f > \alpha)] \leq \int_A f \circ m \leq \alpha \vee m[A \cap (f > \alpha)].$$

(2) 对于任何非负实数 c,有 $\int_A c \circ m = c \wedge m(A)$.

(3) 若 $f_1 \leq f_2$,则 $\int_A f_1 \circ m \leq \int_A f_2 \circ m$.

(4) 若 $A \subseteq B$,则 $\int_A f \circ m \leq \int_B f \circ m$.

(5) $$\int_A (f_1 \wedge f_2) \circ m \leq \int_A f_1 \circ m \wedge \int_A f_2 \circ m$$
$$\leq \int_A f \circ m \vee \int_A f_2 \circ m \leq \int_A (f_1 \vee f_2) \circ m.$$

(6) $$\int_{A \cap B} f \circ m \leq \int_A f \circ m \wedge \int_B f \circ m$$
$$\leq \int_A f \circ m \vee \int_B f \circ m \leq \int_{A \cup B} f \circ m.$$

推论 如果 m 为 $\langle X, \mathscr{A} \rangle$ 上的 S 型测度,则

(1) $\int (f_1 \vee f_2) \circ m = \int f_1 \circ m \vee \int f_2 \circ m$.

(2) $\int_{A \cup B} f \circ m = \int_A f \circ m \vee \int_B f \circ m$.

定理 1.13 如果 $m(A) = 0$,则对于任何非负广义实值可测函数 f,有 $\int_A f \circ m = 0$.

证明:由 $0 \leq \int_A f \circ m \leq m[A \cap (f > 0)] \leq m(A) = 0$,立即

得证. 证毕.

定理 1.14 $\int f\circ m=+\infty\Leftrightarrow\forall\ \alpha\in[0,+\infty),m(f>\alpha)=+\infty$.

证明 必要性. 如果$\exists\ \alpha_0\in[0,+\infty)$,使得$m(f>\alpha_0)<+\infty$,则由定理1.12(1)知

$$\int f\circ m\leqslant\alpha_0\vee m(f>\alpha_0)<+\infty.$$

此与$\int f\circ m=+\infty$相矛盾.

充分性. 因为$\forall\ \alpha\in[0,+\infty),m(f>\alpha)=+\infty$,则$\alpha\wedge m(f>\alpha)=\alpha$所以$\int f\circ m=\bigvee_{\alpha\geqslant 0}\alpha=+\infty$.

由本定理直接可得

推论 $\int f\circ m<+\infty\Leftrightarrow\{\alpha\in[0,\infty]\mid m(f>\alpha)=+\infty\}$是有界集.

引理 1.1 设$G(x)$是$[a,+\infty)$上的单调不增函数(其中$a\geqslant 0$)

(1) 如果$\bigvee_{x\geqslant a}[x\wedge G(x)]=x_0$则$x_0=\bigvee_{a\leqslant x\leqslant x_0}[x\wedge G(x)]$.

(2) $\bigvee_{x\geqslant a}[x\wedge G(x)]=x_0\Leftrightarrow G(x_0+0)\leqslant x_0\leqslant G(x_0-0)$.

(3) $\bigvee_{x\geqslant a}[x\wedge G(x)]=\bigwedge_{x\geqslant a}[x\vee G(x)]$.

证明 (1) 显然.

(2) 必要性. 对于任何$x_1\in[a,+\infty)$均有

$$x_1\wedge G(x_1)\leqslant\bigvee_{x\geqslant a}[x\wedge G(x)]\leqslant x_1\vee G(x_1).$$

故当$x_1>x_0$时,$x_0\geqslant x_1\wedge G(x_1)=G(x_1)$,因此,$G(x_0+0)\leqslant x_0$;又当$x_1<x_0$时,$x_0\leqslant x_1\vee G(x_1)=G(x_1)$,因此,$x_0\leqslant G(x_0-0)$.

充分性. 如果$G(x_0+0)\leqslant x_0\leqslant G(x_0-0)$,则由$G(x)$的单调不增性知,$\bigvee_{x\geqslant a}[x\wedge G(x)]\leqslant x_0$;另一方面,取单调不减序列$\{x_n,n\geqslant 1\}$,使得$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$(如果$x_0=a$为平凡情形). 故当$n\to\infty$时,$G(x_n)\downarrow$

$G(x_0-0)$因此，又有

$$\bigvee_{x\geqslant a}[x\wedge G(x)]\geqslant\lim_{n\to\infty}[x_n\wedge G(x_n)]=x_0\wedge G(x_0-0)=x_0.$$

所以
$$\bigvee_{x\geqslant a}[x\wedge G(x)]=x_0.$$

(3)　显然，$\bigvee_{x\geqslant a}[x\wedge G(x)]\leqslant\bigwedge_{x\geqslant a}[x\vee G(x)]$. 如果等号不成立，则存在 $x_1>a$，使得

$$x_0\triangleq\bigvee_{x\geqslant a}[x\wedge G(x)]<x_1<\bigwedge_{x\geqslant a}[x\vee G(x)],$$

则由(2)知，$G(x_1)<G(x_0+0)\leqslant x_0<x_1$，从而

$$x_1=x_1\vee G(x_1)\geqslant\bigwedge_{x\geqslant a}[x\vee G(x)],$$

发生矛盾，故必有

$$\bigvee_{x\geqslant a}[x\wedge G(x)]=\bigwedge_{x\geqslant a}[x\vee G(x)].$$

证毕.

由引理 1.1，不难证明下述定理.

定理 1.15　(1)　$\int f\circ m=x_0\Rightarrow\int f\circ m=\bigvee_{\alpha\in[0,x_0]}[\alpha\wedge m(f>\alpha)]$.

(2)　$\int f\circ m=x_0\Leftrightarrow m(f>x_0)\leqslant x_0\leqslant m(f>x_0-0)$.

(3)　$\int f\circ m=\bigwedge_{\alpha\geqslant 0}[\alpha\vee m(f>\alpha)]$.

推论 1　如果$\int f\circ m=x_0$，则 $\forall\,\delta\in(0,+\infty)$，有

(1)　$x_0-\delta=\bigvee_{\alpha\in[0,x_0-\delta]}[\alpha\wedge m(f>\alpha)]$，(此时，要求 $\delta\in(0,x_0]$)

$$x_0+\delta=\bigwedge_{\alpha\geqslant x+\delta}[\alpha\vee m(f>\alpha)];$$

(2)　$m(f>x_0-\delta)=\bigwedge_{\alpha\in[0,x-\delta]}[\alpha\vee m(f>\alpha)]\geqslant x_0$,

$$m(f>x_0+\delta)=\bigvee_{\alpha\geqslant x_0+\delta}[\alpha\wedge m(f>\alpha)]\leqslant x_0;$$

(3)　$x_0=\bigvee_{\alpha\in(x_0-\delta,x_0]}[\alpha\wedge m(f>\alpha)]=\bigwedge_{\alpha\in(x_0,x_0+\delta)}[\alpha\vee m(f>$

$\alpha)]$.

推论 2 (1) $\int f\circ m=0\Leftrightarrow m(f>0)=0$;

(2) $\int_A f\circ m=0\Leftrightarrow m[A\cap(f>0)]=0$.

推论 3 如果非负实数 x_0 适合 $x_0=m(f>x_0)$,则 $\int f\circ m=x_0$

定理 1.16 设 $\langle X,\mathscr{A},m\rangle$ 为半测度空间. 如果对于任何一个非负广义实值可测函数 f,令

$$S(f)=\int f\circ m,$$

$$S^*(f)=\bigvee_{\alpha\geqslant 0}[\alpha\wedge m(f\geqslant\alpha)],$$

$$\hat{S}(f)=\bigvee_{A\in\mathscr{A}}\{[\bigwedge_{x\in A}f(x)]\wedge m(A)\}$$

则 $\hat{S}(f)=S^*(f)=S(f)$.

证明 首先证明 $S^*(f)=S(f)$.

显然,$S(f)\leqslant S^*(f)$. 如果 $S(f)=+\infty$,则 $S^*(f)=+\infty$. 如果 $S(f)=x_0<+\infty$,由定理 1.15 知

$m(f>x_0)\leqslant S(f)\leqslant m(f>x_0-0)\leqslant m(f\geqslant x_0-0)$.

一方面,$m(f>x_0)=m(f>x_0+0)\leqslant m(f\geqslant x_0+0)$;

另一方面,$\forall\ x>x_0,\exists\ x_1\in(x_0,x)$,使得

$$m(f\geqslant x)\leqslant m(f>x_1)\leqslant m(f>x_0).$$

从而,$m(f\geqslant x_0+0)\leqslant m(f>x_0)$.

综合上述,得 $m(f\geqslant x_0+0)=m(f>x_0)$. 于是

$$m(f\geqslant x_0+0)\leqslant S(f)\leqslant m(f\geqslant x_0-0),$$

根据引理 1.1,立即得证 $S^*(f)=S(f)$.

现在证明 $\hat{S}(f)=S^*(f)$. 不失一般假设 $S^*(f)<+\infty$.

$\forall\ A\in\mathscr{A}$,令 $\alpha_A=\bigwedge_{x\in A}f(x)$. 则 $A\subseteq(f\geqslant\alpha_A)\in\mathscr{A}$,于是

$$\hat{S}(f)\leqslant\bigvee_{A\in\mathscr{A}}[\alpha_A\wedge m(f\geqslant\alpha_A)]\leqslant S^*(f)$$

又因　$\alpha \leqslant \wedge \{f(x) \mid f(x) \geqslant \alpha\}$ 与 $(f \geqslant \alpha) \in \mathscr{A}$，则

$$S^*(f) \leqslant \bigvee_{\alpha \geqslant 0} \{[\wedge \{f(x) \mid f(x) \geqslant \alpha\}] \wedge m(f \geqslant \alpha)\}$$

$$\leqslant \bigvee_{A \in \mathscr{A}} \{[\bigwedge_{x \in A} f(x)] \wedge m(A)\}$$

$$= \hat{S}(f).$$

所以　$\hat{S}(f) = S^*(f)$．证毕．

注　由定理 1.16 可知，对于任何一个非负广义实值可测函数 f 的 S 型积分，可以有 $S(f)$，$S^*(f)$ 与 $\hat{S}(f)$ 三种形式不同的等价定义．

定理 1.17　设 $\langle X, \mathscr{A}, m\rangle$ 为半测度空间，$\{f_n, n \geqslant 1\}$ 是一列单调不减的非负广义实值可测函数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$．则

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \circ m = \int f \circ m$$

证明　显然，f 也可测，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} \int f \circ m \leqslant \int f \circ m$.

又 $\forall\ \alpha \geqslant 0$，$\int f_n \circ m \geqslant \alpha \wedge m(f_n > \alpha)$．由于当 $n\to\infty$ 时，$(f_n > \alpha) \nearrow (f > \alpha)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n > \alpha) = m(f > \alpha)$，于是

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \circ m \geqslant \alpha \wedge \lim_{n\to\infty} m(f_n > \alpha) = \alpha \wedge m(f > \alpha)$$

所以又有 $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \circ m \geqslant \int f \circ m$．证毕.

下面的引理 1.2 是显而易见的.

引理 1.2　设 $\langle X, \mathscr{A}, m\rangle$ 是半测度空间，则对于任何 $A \in \mathscr{A}$，有

$$\int_A f \circ m \leqslant m(A).$$

定理 1.18　设 $\langle X, \mathscr{A}, m\rangle$ 是半测度空间，则 $\forall\ c \in (0, +\infty)$，有

(1) $\int (c \vee f) \circ m = (c \vee \int f \circ m) \wedge m(X)$;

(2) $\int (c \wedge f) \circ m = c \wedge \int f \circ m$.

证明 (1)因为

$$m(c \vee f > \alpha) = \begin{cases} m(X), \text{当 } 0 \leqslant \alpha < c, \\ m(f > \alpha), \text{当 } \alpha \geqslant c. \end{cases}$$

则 $\quad m(c \vee f > c - 0) = m(X), m(c \vee f > c) = m(f > c)$.

如果 $c \geqslant m(X)$,则

$$m(X) = c \wedge m(X) = \int c \circ m \leqslant \int (c \vee f) \circ m \leqslant m(X).$$

于是,$\int (c \vee f) \circ m = m(X) = (c \vee \int f \circ m) \wedge m(X)$.

如果 $c < m(X)$ 且 $c > \int f \circ m$,则

$$m(c \vee f > c) = m(f > c) < c < m(X) = m(c \vee f > c - 0).$$

于是,$\int (c \vee f) \circ m = c = (c \vee \int f \circ m) \wedge m(X)$.

如果 $c \leqslant \int f \circ m$,令 $x_0 = \int f \circ m$,则

$$m(c \vee f > x_0) = m(f > x_0) \leqslant \int f \circ m$$
$$= x_0 \leqslant m(f > x_0 - 0) \leqslant m(c \vee f > x_0 - 0)$$

于是,$\int (c \vee f) \circ m = x_0 = [c \vee \int f \circ m] \wedge m(X)$.

综合上述,即得所欲证.

(2) 因为

$$m(c \wedge f > \alpha) = \begin{cases} m(f > \alpha) & \text{当 } \alpha < c, \\ m(\varnothing), & \text{当 } \alpha \geqslant c. \end{cases}$$

则 $\quad m(c \wedge f > c - 0) = m(f > c - 0), m(c \wedge f > c) = m(\varnothing) = 0$.

如果 $c \leqslant \int f \circ m$ 则

$$m(c \wedge f > c) = 0 \leqslant c \leqslant \int f \circ m \leqslant m(f > c - 0).$$

于是，$\int (c\wedge f)\circ m=c=c\wedge\int f\circ m$.

如果 $c>\int f\circ m=x_0$，则

$$m(c\wedge f>x_0)=m(f>x_0)\leqslant x_0<m(f>x_0-0)$$
$$=m(c\wedge f>x_0-0)$$

于是，$\int (c\wedge f)\circ m=x_0=c\wedge\int f\circ m$.

综合上述，即得所欲证. 证毕.

定理 1.19 设 $\langle X,\mathscr{A},m\rangle$ 为正规半测度空间，则 $\forall\ A\in\mathscr{A}$，有

$$\int_A f\circ m=\int (f\wedge \chi_A)\circ m.$$

证明 由引理 1.2 知，$\int_A f\circ m\leqslant m(A)\leqslant 1$. 因而

$$\int_A f\circ m=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge m[A\cap(f\geqslant\alpha)]\},$$

且 $\forall\ \alpha\in(0,1]$，有

$$m[A\cap(f\geqslant\alpha)]=m[(\chi_A\geqslant\alpha)\cap(f\geqslant\alpha)]$$
$$=m[(f\wedge\chi_A)\geqslant\alpha],$$

则

$$\int_A f\circ m=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge m[A\cap(f\geqslant\alpha)]\}$$
$$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge m[(f\wedge\chi_A)\geqslant\alpha]\}$$
$$=\int (f\wedge\chi_A)\circ m.$$

证毕.

引理 1.3 设 $\langle X,\mathscr{A},m\rangle$ 是半测度空间，c 为正实数，则

$$\int_A (cf)\circ m=c\int_A f\circ\frac{m}{c},$$

其中 $\left(\frac{m}{c}\right)(\cdot)\triangleq\frac{m(\cdot)}{c}$.

证明 $$\int_A (cf)\circ m = \bigvee_{\alpha\geq 0}\{\alpha \wedge m[A\cap(cf>\alpha)]\}$$

$$=c\left[\bigvee_{\alpha\geq 0}\left\{\frac{\alpha}{c}\wedge\frac{m\left[A\cap\left(f>\frac{\alpha}{c}\right)\right]}{c}\right\}\right]$$

$$=c\int_A f\circ\frac{m}{c}.$$

证毕.

定理 1.20 设$\langle X,\mathscr{A},m\rangle$是半测度空间,$0<m(X)<+\infty$,则

$$\int_A f\circ m=\int (f\wedge m(X)\chi_A]\circ m.$$

证明 由引理 1.3 知

$$\int_A f\circ m = m(X)\int_A \frac{f}{m(X)}\circ\frac{m}{m(X)},$$

而且容易验证,$\frac{m(\cdot)}{m(X)}$为正规半测度,则由定理 1.19,得

$$\int_A f\circ m = m(X)\int\left(\frac{f}{m(X)}\wedge\chi_A\right]\circ\frac{m}{m(X)}$$

再由引理 1.3,即得

$$\int_A f\circ m=\int [f\wedge m(X)\chi_A]\circ m.$$

证毕.

推论 (1) $\int f\circ m=\int [f\wedge m(X)]\circ m$;

(2) $m(A)=\int [m(X)\chi_A]\circ m.$

定理 1.21 设$\langle X,\mathscr{A},m\rangle$为半测度空间,$0<m(X)<+\infty$,$\{A_n,n\geq 1\}\subseteq A$为单调不减序列,且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f\circ m=\int_A f\circ m.$$

证明 由定理 1.20 知

$$\int_{A_n} f \circ m = \int [f \wedge m(X)\chi_{A_n}] \circ m,$$

$$\int_{A} f \circ m = \int [f \wedge m(X)\chi_{A}] \circ m.$$

又当 $n \to \infty$ 时，

$$f \wedge m(X)\chi_{A_n} \nearrow f \wedge m(X)\chi_{A}$$

则由定理 1.17,得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \circ m = \lim_{n\to\infty} \int [f \wedge m(X)\chi_{A_n}] \circ m$$

$$= \int [f \wedge m(X)\chi_{A}] \circ m$$

$$= \int_{A} f \circ m.$$

证毕.

定理 1.22　设 $\langle X, \mathscr{A}, m\rangle$ 为半测度空间，$0 < m(X) < +\infty$，则 $S(f, \cdot)$ 是 $\langle X, \mathscr{A}\rangle$ 上的半测度.

证明　显然，$S(f, \varnothing) = 0$，且 $\forall A \in \mathscr{A}$，$S(f, A) \geqslant 0$. 再由定理 1.12(4)与定理 1.21 知，$S(f, \cdot)$ 是半测度. 证毕.

定理 1.23　设 $\langle X, \mathscr{A}, m\rangle$ 是半测度空间，$R^+ = [0, +\infty)$，$\mathscr{L}^+$ 为 R^+ 的所有 *Borel* 集合所成的 σ 代数，对于任何 $B \in \mathscr{L}^+$ 令

$$m^*(B) = \bigvee \{x \mid x \in B\},$$

则

(1)　m^* 是 $\langle R^+, \mathscr{L}^+\rangle$ 上的半测度；

(2)　对于任给的 f 与 $A \in \mathscr{A}$，令 $g_A(x) = m[A \cap (f > x)]$，$\forall x \in R^+$. 那么有

$$\int_A f \circ m = \int g_A \circ m^*.$$

证明　(1)　显然.

(2) 容易验证，$g_A(\cdot)$是R^+上的单调不增右连续函数. 假设$\int_A f\circ m=x_0$. 由于

$$\alpha<x_0\Rightarrow g_A(\alpha)=m[A\cap(f>\alpha)]\geqslant x_0\geqslant m[A\cap(f>x_0)]$$
$$=g_A(x_0).$$

则 $\alpha<x_0\Rightarrow\{g_A>\alpha\}=\{m[A\cap(f>x)]>\alpha\}\supseteq[0,x_0)$,

$\alpha>x_0\Rightarrow\{g_A>\alpha\}=\{m[A\cap(f>x)]>\alpha\}\subseteq[0,x_0)$.

所以

$$m^*(g_A>x_0-0)=\lim_{\alpha\to x_0-0}m^*(g_A>\alpha)\geqslant m^*[0,x_0)=x_0,$$

$$m^*(g_A>x_0)=\lim_{\alpha\to x_0+0}m^*(g_A>\alpha)\leqslant m^*[0,x_0)=x_0.$$

再由引理 1.1,即得

$$\int g_A\circ m^*=x_0=\int_A f\circ m.$$

证毕.

定理 1.24 设$\langle X,\mathscr{A},m\rangle$是$S$型测度空间. $\{f_n,n\geqslant1\}$是一列非负广义实值可测函数，$\{A_n,n\geqslant1\}\subseteq\mathscr{A}$，$A\in\mathscr{A}$，则

(1) $\int_A(\bigvee_{n=1}^{\infty}f_n)\circ m=\bigvee_{n=1}^{\infty}(\int_A f_n\circ m)$;

(2) $\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}f_1\circ m=\bigvee_{n=1}^{\infty}(\int_{A_n}f_1\circ m)$;

(3) $S(f_1\cdot)$是$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的$S$型测度.

证明 (1) $\int_A(\bigvee_{n=1}^{\infty}f_n)\circ m=\bigvee_{\alpha\geqslant0}\{\alpha\wedge m[A\cap(\bigvee_{n=1}^{\infty}f_n>\alpha)]\}$

$$=\bigvee_{\alpha\geqslant0}\{\alpha\wedge m(\bigvee_{n=1}^{\infty}[A\cap(f_n>\alpha)])\}$$

$$=\bigvee_{\alpha\geqslant0}\{\alpha\wedge(\bigvee_{n=1}^{\infty}m[A\cap(f_n>\alpha)])\}$$

$$=\bigvee_{\alpha\geqslant0}\{\bigvee_{n=1}^{\infty}\{\alpha\wedge m[A\cap(f_n>\alpha)]\}$$

$$=\bigvee_{n=1}^{\infty}[\bigvee_{\alpha\geq 0}\{\alpha\wedge m[A\cap(f_n>\alpha)]\}]$$

$$=\bigvee_{n=1}^{\infty}\int_A f_n\circ m).$$

(2) 由(1)与定理 1.20 立即得证.

(3) 由 $S(f,\varnothing)=0$ 与(2)立即得证. 证毕.

§2 S_λ 型测度与 S_λ 型积分

定义 2.1 设$\langle X,\mathscr{A}\rangle$是可测空间,$\forall\ \lambda\in(0,+\infty)$,对应的集合函数 $g_\lambda:\mathscr{A}\to[0,+\infty)$满足下列性质;

(1) g_λ 是$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的有限半测度;

(2) $\forall\ A,B\in\mathscr{A},A\cap B=\varnothing$,则

$$g_\lambda(A\cup B)=g_\lambda(A)+g_\lambda(B)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B).$$

则称 g_λ 为 S_λ **型测度**,且称$\langle X,\mathscr{A},g_\lambda\rangle$为 S_λ **型测度空间**.

定理 2.1 S_λ 型测度 g_λ 具有下列性质.

(1) $\forall\ A,B\in\mathscr{A},A\subseteq B\Rightarrow g_\lambda(B-A)=\dfrac{g_\lambda(B)-g_\lambda(A)}{1+\lambda g_\lambda(A)}$.

(2) $\forall\ A\in\mathscr{A},g_\lambda(A')=\dfrac{g_\lambda(X)-g_\lambda(A)}{1+\lambda g_\lambda(A)}$.

(3) $\forall\ \{A_n,n\geq 1\}\subseteq\mathscr{A},A_n\downarrow A\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}g_\lambda(A_n)=g_\lambda(A)$.

(4) $\forall\ \{A_n,n\geq 1\}\subseteq\mathscr{A},A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j$,则

$$g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{\infty}[1+\lambda g_\lambda(A_n)]-1\}.$$

(5) $\forall\ \{A_n,n\geq 1\}\subseteq\mathscr{A}$,则

$$g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{\infty}[1+\lambda g_\lambda(A_n)]-1\}.$$

证明 (1) 由于

$$g_\lambda(B)=g_\lambda[A\cup(B-A)]$$
$$=g_\lambda(A)+g_\lambda(B-A)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B-A),$$

即得所欲证.

(2) 由 $A'=X-A$ 与(1)即得欲证.

(3) 若 $A_n\downarrow A$,则 $A_n'\nearrow A'$ 由(2)与 g_λ 为半测度,得

$$\lim_{n\to\infty}g_\lambda(A_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{g_\lambda(X)-g_\lambda(A_n')}{1+g_\lambda(A_n')}=\frac{g_\lambda(X)-\lim\limits_{n\to\infty}g_\lambda(A_n')}{1+\lambda\lim\limits_{n\to\infty}g_\lambda(A_n')}$$
$$=\frac{g_\lambda(X)-g_\lambda(A')}{1+\lambda g_\lambda(A')}=g_\lambda(A).$$

(4) 首先

$$g_\lambda(A_1\cup A_2)=g_\lambda(A_1)+g_\lambda(A_2)+\lambda g_\lambda(A_1)g_\lambda(A_2)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\{[1+\lambda g_\lambda(A_1)][1+\lambda g_\lambda(A_2)]-1\}.$$

假定 $g_\lambda(\bigcup\limits_{n=1}^{k}A_n)=\frac{1}{\lambda}\{\prod\limits_{n=1}^{k}[1+\lambda g_\lambda(A_n)]-1\}$,

则

$$g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{k+1}A_n)=g_\lambda[(\bigcup_{n=1}^{k}A_n)\cup A_{k+1})]$$
$$=\frac{1}{\lambda}\{[1+\lambda g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{k}A_n)][1+\lambda g_\lambda(A_{k+1})]-1\}$$
$$=\frac{1}{\lambda}\{[1+\prod_{n=1}^{k}(1+\lambda g_\lambda(A_n))-1][1+\lambda g_\lambda(A_{k+1})]-1\}$$
$$=\frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{k+1}[1+\lambda g_\lambda(A_n)]-1\}$$

于是,对于任何正整数 $k\geqslant 2$,均有

$$g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{k}A_n)=\frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{k}[1+\lambda g_\lambda(A_n)]-1\}$$

再令 $k\to\infty$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{k}A_n\nearrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,于是

$$g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{k\to\infty} g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{k} A_n)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{\infty}[1 + \lambda g_\lambda(A_n)] - 1\}.$$

(5) 因为$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n A' \cdots A_{n-1}')$(令 $A_0=\varnothing$). 则

$$g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n A_0' \cdots A'_{n-1})$$

$$= \frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{\infty}[1 + \lambda g_\lambda(A_n A_0' \cdots A_{n-1}')] - 1\}$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{\infty}[1 + \lambda g_\lambda(A_n)] - 1\}.$$

证毕

推论 设$\langle X, \mathscr{A}\rangle$为可测空间,$\lambda\in(0,+\infty)$. 如果集合函数 $g_\lambda: \mathscr{A}\to[0,+\infty)$满足下列性质:

(1) $g_\lambda(\varnothing)=0$;

(2) $\forall\ \{A_n, n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{A}, A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$,有

$$g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{\infty}[1 + \lambda g_\lambda(A_n)] - 1\}$$

则 g_λ 为 S_λ 型测度.

定理 2.2 设$\langle X, \mathscr{A}\rangle$为可测空间,$\forall\ \lambda>0, g_\lambda$ 为$\langle X, \mathscr{A}\rangle$上任一 S_λ 型测度. 令 $g_\lambda^*(\cdot)=\ln[1+\lambda g(\cdot)]$,则 g_λ^* 为$\langle X, \mathscr{A}\rangle$上的测度.

证明 $g^*(\varnothing)=\ln[1+\lambda g_\lambda(\varnothing)]=0$.

$\forall\ \{A_n, n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{A}, A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$,则

$$g_\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \ln[1 + \lambda g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)] = \ln\{\prod_{n=1}^{\infty}[1 + \lambda g_\lambda(A_n)]\}$$

$$= \sum_{n=l}^{\infty}\ln[1 + \lambda g_\lambda(A_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} g_\lambda^*(A_n).$$

所以 g_λ^* 为$\langle X, \mathscr{A}\rangle$上的测度. 证毕.

推论 设 m 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的任一有限测度, $\forall\ \lambda>0$, 令

$$g_\lambda(\cdot)=\frac{1}{\lambda}(e^{m(\cdot)}-1).$$

则 g_λ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的 S_λ 型测度.

证明 $g_\lambda(\varnothing)=\frac{1}{\lambda}(e^{m(\varnothing)}-1)=0.$

$\forall\ \{A_n,n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{A}, A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$, 则

$$g_\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\frac{1}{\lambda}(e^{m(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)}-1)=\frac{1}{\lambda}(e^{\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)}-1)\}$$

$$=\frac{1}{\lambda}[\prod_{n=1}^{\infty}e^{m(A_n)}-1]=\frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{\infty}[1+\lambda g_\lambda(A_n]-1\}.$$

所以 g_λ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的 S_λ 型测度. 证毕.

注 1 如果 $g_\lambda(X)=1$, 此时, λ 可以扩大取值范围成 $\lambda\in[-1,+\infty)$. 特别, 当 $\lambda=0$ 时, 称 g_0 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的概率(测度). 一般的模糊数学文献中称这类正规的 S_λ 型测度 $g_\lambda(\lambda\geqslant-1)$ 为 λ 可加 F 测度.

注 2 为了简化记号, 对于任给的正实数 λ, 在不致混淆时, g_λ 简记作 g, 对应的测度 g_λ^* 简记作 g^*, 以后一般不再申明.

定义 2.2 令 $R^+=[0,+\infty)$, 任给 $\lambda>0$, $\forall\ a,b\in R^+$, 界定

$$a\overset{\lambda}{+}b\triangleq a+b+\lambda ab=\frac{1}{\lambda}[(1+\lambda a)(1+\lambda b)-1]$$

$$a\overset{\lambda}{\cdot}b\triangleq\frac{1}{\lambda}[(1+\lambda b)^a-1].$$

引理 2.1 (1) $0\overset{\lambda}{+}b=b\overset{\lambda}{+}0=b$;

(2) $a\overset{\lambda}{+}b=b\overset{\lambda}{+}a\geqslant a+b$.

(3) $(a\overset{\lambda}{+}b)\overset{\lambda}{+}c=a\overset{\lambda}{+}(b\overset{\lambda}{+}c)$.

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\overset{\lambda}{+}b_n)=a\overset{\lambda}{+}b$.

(5)　$\forall\ \{a_n, n\geqslant 1\}\subseteq R^+$，记 $\sum_n^{\lambda} a_n = a_1 \overset{\lambda}{+} a_2 \overset{\lambda}{+} \cdots$. 则

$$\sum_n^{\lambda} a_n = \frac{1}{\lambda}\{\prod_n (1+\lambda a_n) - 1\}$$

引理 2.2　(1)　$0 \overset{\lambda}{\cdot} a = a \overset{\lambda}{\cdot} 0 = 0 \overset{\lambda}{\cdot} 0 = 0, 1 \overset{\lambda}{\cdot} b = b$.

(2)　$\forall\ a_1, a_2 \in R^+, (a_1 \cdot a_2) \overset{\lambda}{\cdot} b = a_1 \overset{\lambda}{\cdot} (a_2 \overset{\lambda}{\cdot} b)$,

$(a_1 + a_2) \overset{\lambda}{\cdot} b = (a_1 \overset{\lambda}{\cdot} b) \overset{\lambda}{+} (a_2 \overset{\lambda}{\cdot} b)$.

(3)　$\forall\ b_1, b_2 \in R^+, a \overset{\lambda}{\cdot} (b_1 \overset{\lambda}{+} b_2) = (a \overset{\lambda}{\cdot} b_1) \overset{\lambda}{+} (a \overset{\lambda}{\cdot} b_2)$.

(4)　若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \overset{\lambda}{\cdot} b_n) = a \overset{\lambda}{\cdot} b$.

(5)　$\forall\ \{a_n\}, \{b_n\} \subseteq R^+$，则

$$\sum_n^{\lambda} (a_n \overset{\lambda}{\cdot} b_n) = \frac{1}{\lambda}[\prod_n (1+\lambda b_n)^{a_n} - 1)].$$

引理 2.3　$\forall\ x \in R^+$，令 $\varphi(x) = \ln(1+\lambda x), \varphi^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}(e^x - 1)$，则

(1)　$\varphi(0) = 0, \varphi^{-1}(0) = 0$;

(2)　$\varphi^{-1}[\varphi(x)] = x, \varphi[\varphi^{-1}(x)] = x$;

(3)　$\varphi[\sum_n^{\lambda} (a_n \overset{\lambda}{\cdot} b_n)] = \sum_n a_n \varphi(b_n)$ 或等价地

$$\sum_n^{\lambda} (a_n \overset{\lambda}{\cdot} b_n) = \varphi^{-1}[\sum_n a_n \varphi(b_n)];$$

(4)　$\varphi^{-1}(\sum_n a_n b_n) = \sum_n^{\lambda} [a_n \overset{\lambda}{\cdot} \varphi^{-1}(b_n)]$.

或等价地

$$\sum_n a_n b_n = \varphi\{\sum_n^{\lambda} [a_n \overset{\lambda}{\cdot} \varphi^{-1}(b_n)]\}.$$

引理 2.1 到引理 2.3 的证明是直接的，请读者自证.

定理 2.3　设 $\langle X, \mathscr{A}\rangle$ 为可测空间，$\lambda > 0$，集合函数 $g: \mathscr{A} \to R^+$ 适合 $g(\varnothing) = 0$，则下列各命题相互等价.

(1)　g 为 S_λ 型测度.

(2)　$\forall\ \{A_n, n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{A}, A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$ 则

$$g(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\lambda}g(A_n).$$

(3)　$g^*\triangleq\varphi\circ g$ 为测度.

(4)　g 为半测度且 $\forall\ A,B\in\mathscr{A}$,有

$$g(A\cup B)\overset{\lambda}{+}g(A\cap B)=g(A)\overset{\lambda}{+}g(B).$$

证明　(1)⇒(2)　由定理 2.1(4)与引理 2.1(5)即得欲证.

(2)⇒(3)　$\forall\ \{A_n, n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{A}, A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$,由引理 2.3,得

$$g^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)]=\varphi[g(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)]=\varphi(\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\lambda}g(A_n)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\circ g(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}g^*(A_n)$$

与 $g^*(\varnothing)=\varphi[g(\varnothing)]=\varphi(0)=0$. 得证.

(3)⇒(4)　由定理 2.2 的推论知,$g=\varphi^{-1}\circ g^*$ 为 S_λ 型测度,从而是半测度,且 $\forall\ A,B\in\mathscr{A}$,由引理 2.3,有

$$\begin{aligned}g(A\cup B)\overset{\lambda}{+}g(A\cap B)&=\varphi^{-1}\{\varphi[g(A\cup B)]+\varphi[g(A\cap B)]\}\\&=\varphi^{-1}[g^*(A\cup B)+g^*(A\cap B)]\\&=\varphi^{-1}[g^*(A)+g^*(B)]\\&=\varphi^{-1}\{\varphi[g(A)]+\varphi[g(B)]\}\\&=g(A)\overset{\lambda}{+}g(B).\end{aligned}$$

(4)⇒(1)　显然. 证毕.

下面给出 S_λ 型积分的定义.

定义 2.3　设 $\langle X,\mathscr{A},g\rangle$ 为 S_λ 型测度空间($\lambda>0$),f 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负可测实值函数,$T=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 为 X 的任一有限可测

分划，令

$$S_\lambda(f,T)=\sum_{k=1}^{n}{}^{\lambda}[\bigwedge_{x\in A_k}f(x)]\overset{\lambda}{\cdot}g(A_k).$$

则由下式给出的非负(广义)实数

$$S_\lambda(f)=\bigvee_{(T)}S_\lambda(f,T)$$

称为函数 f **关于** g **的** S_λ **型积分**，记作 $\int^\lambda fdg$.

如果令

$$S_\lambda(f,A,T)=\sum_{k=1}^{n}{}^{\lambda}[\bigwedge_{x\in A_k\cap A}f(x)]\overset{\lambda}{\cdot}g(A_k\cap A).$$

则由下式给出的非负(广义)实数

$$S_\lambda(f,A)=\bigvee_{(T)}S_\lambda(f,A,T)$$

称为函数 f 展布在集合 A 上(关于 g)的 S_λ 型积分，记作 $\int_A^\lambda fdg$.

定义 2.4　设 $\langle X,\mathscr{A},g\rangle$ 为 S_λ 型测度空间($\lambda>0$)，f 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的可测实值函数，f^+ 与 f^- 表示 f 的正部与负部，即 $f^+=f\cdot\chi_{\{f\geqslant 0\}}$ 与 $f^-=(-f)\cdot\chi_{\{f<0\}}$，对于任给 $A\in\mathscr{A}$，如果 $\int_A^\lambda f^-dg<+\infty$，则界定

$$\int_A^\lambda fdg=\frac{\int_A^\lambda f^+\,dg-\int_A^\lambda f^-\,dg}{1+\lambda\int_A^\lambda f^-\,dg}$$

且称之为 f 展布在 A 上(关于 g)的 S_λ 型积分.

如果 $\forall\ A\in\mathscr{A}$，$\left|\int_A^\lambda fdg\right|<+\infty$，称 f 为 S_λ 型可积函数，在不混淆时，简称为可积.

定理 2.4　f 可积 $\Leftrightarrow f^+$ 与 f^- 可积.

证明是直接的. 从略.

引理 2.4　φ 与 φ^{-1} 为保并、保交映射，即 $\forall\ \{a_j,j\in J\}\subseteq R^+$，

$$\varphi(\bigvee_{j\in J} a_j) = \bigvee_{j\in J}\varphi(a_j), \varphi(\bigwedge_{j\in J} a_j) = \bigwedge_{j\in J}\varphi(a_j),$$

$$\varphi^{-1}(\bigvee_{j\in J} a_j) = \bigvee_{j\in J}\varphi^{-1}(a_j), \varphi^{-1}(\bigwedge_{j\in J} a_j) = \bigwedge_{j\in J}\varphi^{-1}(a_j).$$

证明 如果 $\bigvee_{j\in J} a_j=+\infty$，则$\forall\ n>1$，$\exists\ j\in J$，使得 $a_j>\varphi^{-1}(n)$，从而，$\varphi(a_j)>\varphi(\varphi^{-1}(n))=n$. 于是，有 $\varphi(\bigvee_{j\in J} a_j)=\bigvee_{j\in J}\varphi(a_j)=+\infty$.

如果 $\bigvee_{j\in J} a_j<+\infty$. 由 $\varphi(x)=\ln(1+\lambda x)$的严格单增与连续性即得 $\varphi(\bigvee_{j\in J} a_j)=\bigvee_{j\in J}\varphi(a_j)$. 其他三个等式同理可证. 证毕.

定理 2.5 设$\langle X,\mathscr{A},g\rangle$为 S_λ 型测度空间($\lambda>0$)，f 为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的可测实值函数，令 $g^*=\varphi\circ g$，则$\forall\ A\in\mathscr{A}$，有

$$\int_A^\lambda f dg = \frac{1}{\lambda}(e^{\int_A f dg^*}-1),$$

且 f 为 S_λ 可积$\Leftrightarrow f$ 为 L 可积.

证明 首先假设 f 为非负可测实值函数，因为

$$\int_A^\lambda f dg = \bigvee_{(T)}\sum_{k=1}^{n}{}^{\lambda}[\bigwedge_{x\in A_k} f(x)] \overset{\lambda}{\cdot} g(A_k\cap A)\}$$

由引理 2.3 与引理 2.4，得

$$\int_A^\lambda f dg = \bigvee_{(T)}\varphi^{-1}[\sum_{k=1}^{n}[\bigwedge_{x\in A_k\wedge A} f(x)]\cdot[\varphi(g(A_k\cap A))]\}$$

$$=\varphi^{-1}\{\bigvee_{(T)}[\sum_{k=1}^{n}(\bigwedge_{x\in A_k\cap A} f(x))\cdot g^*(A_k\cap A)]\}$$

$$=\varphi^{-1}(\int_A f dg^*)$$

$$=\frac{1}{\lambda}(e^{\int_A f dg^*}-1).$$

现在假设 f 为一般的可测实值函数. 因为

$$\int_A^\lambda f dg = \frac{\int_A^\lambda f^+ dg - \int_A^\lambda f^- dg}{1+\lambda\int_A^\lambda f^- dg},$$

由上面推证知

$$\int_A^\lambda f^+ dg = \frac{1}{\lambda}(e^{\int_A f^+ dg^*} - 1),$$

$$\int_A^\lambda f^- dg = \frac{1}{\lambda}(e^{\int_A f^- dg^*} - 1).$$

则

$$\int_A^\lambda fdg = \frac{\frac{1}{\lambda}(e^{\int_A f^+ dg^*} - e^{\int_A f^- dg^*})}{e^{\int_A f^- dg^*}} = \frac{1}{\lambda}(e^{\int_A f^+ dg^* - \int_A f^- dg^*} - 1)$$

$$= \frac{1}{\lambda}(e^{\int_A f dg^*} - 1).$$

由上面的推证，显然有：f 为 S_λ 可积$\Leftrightarrow f$ 为 L 可积. 证毕.

利用定理 2.5 与 L 积分的性质不难证明下列各定理.

定理 2.6　设$\langle X,\mathscr{A},g\rangle$为 S_λ 型测度空间$(\lambda>0)$，f 为非负可测实值函数，$A\in\mathscr{A}$. 则下列论断成立.

(1)　$\int_A^\lambda fdg\geqslant 0$，且$\int_A^\lambda fdg=0\Leftrightarrow g[(f>0)\cap A]=0$.

(2)　$0\leqslant f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_A^\lambda f_n dg = \int_A^\lambda fdg.$$

(3)　$\int_A^\lambda fdg=\int^\lambda (f\cdot\chi_A)dg$，特别地，$\int_A^\lambda 1dg=g(A)$，$\int_A^\lambda 0dg=0$.

(4)　$\forall\ a\geqslant 0$，$\int_A^\lambda (a\cdot f)dg=a\overset{\lambda}{\cdot}\int_A^\lambda fdg$.

(5)　f_1 与 f_2 可积$\Rightarrow f_1+f_2$ 可积，且

$$\int_A^\lambda (f_1+f_2)dg = \int_A^\lambda f_1 dg \overset{\lambda}{+} \int_A^\lambda f_2 dg.$$

(6)　若$\{A_n,n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{A}$，且 $A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，则

$$\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n}^\lambda fdg = \sum_{n=1}^{\infty}{}^\lambda \int_{A_n}^\lambda fdg.$$

(7) $S(f,\cdot)$为$(X,\mathscr{A})$上的S_λ型测度.

定理 2.7 设$\langle X,\mathscr{A},g\rangle$为$S_\lambda$型测度空间($\lambda>0$),$f$为可积函数,$A\in\mathscr{A}$,则下列论断成立.

(1) $1+\lambda\int_A^\lambda fdg=\dfrac{1+\lambda\int_A^\lambda f^+dg}{1+\lambda\int_A^\lambda f^-dg}>0.$

(2) 若$f_1\leqslant f_2$,且f_1与f_2均可积,则$\int_A^\lambda f_1dg\leqslant\int_A^\lambda f_2dg$.

(3) 如果$f_1,f_2,\cdots,f_n$均是可积函数,则$\sum_{i=1}^n f_i$是可积函数,且

$$\int_A^\lambda\left(\sum_{i=1}^n f_i\right)dg=\frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^n\left[1+\lambda\int_A^\lambda f_idg\right]-1\right].$$

(4) $\forall\, a\in R,\int_A^\lambda(a\cdot f)dg=\dfrac{1}{\lambda}\left[\left(1+\lambda\int_A^\lambda fdg\right)^a-1\right].$

(5) 若f_1,f_2均可积,则f_1-f_2可积,且

$$\int_A^\lambda(f_1-f_2)dg=\frac{\int_A^\lambda f_1dg-\int_A^\lambda f_2dg}{1+\lambda\int_A^\lambda f_2dg}.$$

定理 2.8 设$\{f_n,n\geqslant1\}$是$\langle X,\mathscr{A},g\rangle$上的$S_\lambda$型可积实值函数列.

(1) 若$\bigwedge_{n=1}^\infty f_n$可积,则$\int_A^\lambda\left(\bigwedge_{n=1}^\infty f_n\right)dg\leqslant\bigwedge_{n=1}^\infty\int_A^\lambda f_ndg$.

(2) 若$\bigvee_{n=1}^\infty f_n$可积,则$\int_A^\lambda\left(\bigvee_{n=1}^\infty f_n\right)dg\geqslant\bigvee_{n=1}^\infty\int_A^\lambda f_ndg$.

(3) 若$\forall\, n\geqslant1,0\geqslant f_n\geqslant f_{n+1}$,且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$可积,则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_A^\lambda f_ndg=\int_A^\lambda fdg$.

定理 2.9 设$\{f_n,n\geqslant1\}$是$\langle X,\mathscr{A},g\rangle$上的$S_\lambda$型可积实值函数列,且$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$与$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$仍是$S_\lambda$型可积,则

(1) $\int_A^{\lambda}(\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n)dg \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_A^{\lambda} f_n dg.$

(2) $\int_A^{\lambda}(\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n)dg \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_A^{\lambda} f_n dg.$

定理 2.10　设$\{f_n, n>1\}$为$\langle X, \mathscr{A}, g\rangle$上的可测实值函数列，且$|f_n|\leqslant f_0$，$\forall\ n\geqslant 1$，$f_0$为非负可积函数，若$\lim_{n\to\infty} f_n = f$，则$f$可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_A^{\lambda} f_n dg = \int_A^{\lambda} f dg.$$

定理 2.11　设$\{f_n, n\geqslant 1\}$是$\langle X, \mathscr{A}, g\rangle$上的可测实值函数列，且$|f_n|\leqslant c<+\infty$，$\forall\ n\geqslant 1$，若$\lim_{n\to\infty} f_n = f$，则$f$可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_A^{\lambda} f_n dg = \int_A^{\lambda} f dg.$$

§3　F可测空间

为了叙述方便和本章的需要，现将第一章中介绍的F集的运算集中罗列如下，并补充本书以后要用到的一些运算. 为了不致混淆，在记号和术语方面稍作一些调整和统一.

令$I \triangleq [0,1]$，X为论域，$I^X = \{h \mid h: X\to I\}$为$X$上全体$F$集. $\forall\ h_1, h_2 \in I^X$. 界定$\forall\ x\in X$，

并　$(h_1 \vee h_2)(x) = h_1(x) \vee h_2(x).$

交　$(h_1 \wedge h_2)(x) = h_1(x) \wedge h_2(x).$

和(概率和)　$(h_1 \hat{+} h_2)(x) = h_1(x) + h_2(x) - h_1(x)h_2(x).$

积(概率积)　$(h_1h_2)(x) \triangleq (h_1 \hat{\cdot} h_2)(x) = h_1(x)h_2(x).$

有界和　$(h_1 \oplus h_2)(x) = [h_1(x) + h_2(x)] \wedge 1.$

有界积　$(h_1 \odot h_2)(x) = [h_1(x) + h_2(x) - 1] \vee 0.$

直和　$(h_1 + h_2)(x) = h_1(x) + h_2(x) \leqslant 1.$

差 $(h_1-h_2)(x)=[h_1(x)-h_2(x)]\vee 0$.

对称差 $(h_1\triangle h_2)(x)=|h_1(x)-h_2(x)|$.

补 $(h_1')(x)=[h_1(x)]'=1-h(x)$.

h_1 与 h_2 不相交 $\Leftrightarrow h_1\wedge h_2=0$(其中 $0(x)\equiv 0,\forall\ x\in X$).

h_1 与 h_2 相重 $\Leftrightarrow \exists\ x\in X$,合于 $h_1(x)+h_2(x)>1$.

h_1 与 h_2 不相重 $\Leftrightarrow \forall\ x\in X, h_1(x)+h_2(x)\leqslant 1$.

推广之,设 $\{h_j, j\in J\}$ 为 I^X 的有限或可数子系. 界定

和 $\sum\limits_{j\in J}\hat{+}h_j\Leftrightarrow(\sum\limits_{j\in J}\hat{+}h_j)(x)=1-\prod\limits_{j\in J}[1-h_j(x)],\forall\ x\in X$.

积 $\prod\limits_{j\in J}h_j\Leftrightarrow(\prod\limits_{j\in J}h_j)(x)=\prod\limits_{j\in J}h_j(x),\forall\ x\in X$.

有界和 $\bigoplus\limits_{j\in J}h_j\Leftrightarrow(\bigoplus\limits_{j\in J}h_j)(x)=[\sum\limits_{j\in J}h_j(x)]\wedge 1,\forall\ x\in X$.

有界积 $(\bigodot\limits_{j\in J}h_j)\Leftrightarrow(\bigodot\limits_{j\in J}h_j)(x)=\{1-\sum\limits_{j\in J}[1-h_j(x)]\}\vee 0,\forall\ x\in X$.

直和 $\sum\limits_{j\in J}h_j\Leftrightarrow(\sum\limits_{j\in J}h_j)(x)=\sum\limits_{j\in J}h_j(x)\leqslant 1,\forall\ x\in X$.

$\{h_j, j\in J\}$ 不相交 $\Leftrightarrow\forall\ i,j\in J, i\neq j, h_i$ 与 h_j 不相交.

$\{h_j, j\in J\}$ 不相重 $\Leftrightarrow\forall\ x\in X,\sum\limits_{j\in J}h_j(x)\leqslant 1$.

设 $\{h_n, n\geqslant 1\}\subseteq I^X$,界定

上极限 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}h_n\Leftrightarrow(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}h_n)(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}h_n(x),\forall\ x\in X$.

下极限 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}h_n\Leftrightarrow(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}h_n)(x)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}h_n(x),\forall\ x\in X$.

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n\Leftrightarrow\forall\ x\in X,\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x)$ 存在,界定 $(\lim\limits_{n\to\infty}h_n)(x)=\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x)$.

当 $h_n\leqslant h_{n+1}$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}h_n$.

当 $h_n\geqslant h_{n+1}$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty}h_n$.

引理 3.1 (1) $h_1\vee h_2=h_1+(h_2-h_1)=(h_1\wedge h_2)+(h_1\triangle h_2)=h_1+(h_2\odot h_1')$.

(2) $h_1 \wedge h_2 = h_2 - (h_2 - h_1) = h_1 \odot (h_2 \oplus h_1{}')$.

(3) $h_1 \hat{+} h_2 = h_1 + (h_2 - h_1 h_2) = h_1 + h_2 h_1{}'$.

(4) $h_1 h_2 = h_1 \odot (h_1{}' \hat{+} h_2)$.

(5) $h_1 \oplus h_2 = h_1 + [h_2 - (h_1 \odot h_2)]$.

(6) $h_1 \odot h_2 = h_1 - h_2{}'$.

(7) $h_1 - h_2 = h_1 - (h_1 \wedge h_2) = (h_1 \vee h_2) - h_2$.

(8) $h_1 + h_2 = (h'_1 - h_2)'$.

引理 3.2 设 $h_1, h_2 \in I^X$,则下列三条相互等价.

(1) $\forall x \in X, h_1(x) \wedge h_2(x) = 0$ 或 $h_1(x) \vee h_2(x) = 1$.

(2) $h_1 \oplus h_2 = h_1 \hat{+} h_2 = h_1 \vee h_2$.

(3) $h_1 \odot h_2 = h_1 h_2 = h_1 \wedge h_2$.

引理 3.3 设 $A, B \in \mathscr{P}(X)$,则

(1) $\chi_A \oplus \chi_B = \chi_A \hat{+} \chi_B = \chi_A \vee \chi_B = \chi_{A \cup B}$;

(2) $\chi_A \odot \chi_B = \chi_A \chi_B = \chi_A \wedge \chi_B = \chi_{A \cap B}$;

(3) A 与 B 不相交$\Leftrightarrow \chi_A$ 与 χ_B 不相重.

引理 3.4 (1)h_1 与 h_2 不相重$\Leftrightarrow h_1 \leqslant h_2{}' \Leftrightarrow h_1 \oplus h_2 = h_1 + h_2$.

(2) $\{h_n, n \geqslant 1\}$不相交$\Rightarrow \{h_n, n \geqslant 1\}$不相重.

引理 3.5 (1)$\varliminf_{n\to\infty} h_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} h_n$ 且当$\varliminf_{n\to\infty} h_n = \varlimsup_{n\to\infty} h_n$ 时,$\lim_n h_n$ 存在,

(2) $\varliminf_{n\to\infty} h_n = \bigvee_{k \geqslant 1} \bigwedge_{n \geqslant k} h_n, \varlimsup_{n\to\infty} h_n = \bigwedge_{k \geqslant 1} \bigvee_{n \geqslant k} h_n$.

以上五个引理请读者自证.

定义 3.1 设 $\mathscr{A}^* \subseteq I^X$ 满足下列条件.

(1) $1 \in \mathscr{A}^*$,(其中 $1(x) \equiv 1, \forall x \in X$).

(2) $h \in \mathscr{A}^* \Rightarrow h' \in \mathscr{A}^*$

(3) $\{h_n, n \geqslant 1\} \subseteq \mathscr{A}^* \Rightarrow \bigvee_{n=1}^{\infty} h_n \in \mathscr{A}^*$.

则称 $\mathscr{A}^*$ 为 $F\sigma$ **软代数**. 如果把(3)换成$\{h_n, n = 1, 2, \cdots, k\} \subseteq$

$\mathscr{A}^* \Rightarrow \bigvee_{n=1}^{k} h_n \in \mathscr{A}^*$，称 $\mathscr{A}^*$ 为 F **软代数**.

不难证明：

引理 3.6　如果 $\mathscr{A}^*$ 为 $F\sigma$ 软代数，则

(1)　$\varnothing \in \mathscr{A}^*$；

(2)　$\{h_j, j \in J\}$ 为 $\mathscr{A}^*$ 的有限或可数子系 $\Rightarrow \bigvee_{j\in J} h_j, \bigwedge_{j\in J} h_j \in \mathscr{A}^*$.

(3)　$\{h_n, n \geqslant 1\} \subseteq I^X \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} h_n, \overline{\lim}_{n\to\infty} h_n \in \mathscr{A}^*$.

引理 3.7　设 $\mathscr{A}^* \subseteq I^X$，满足定义 3.1 的条件(1)与(2)，则 $\mathscr{A}^*$ 为 $F\sigma$ 软代数的充要条件是：

(1)　$h_1, h_2 \in \mathscr{A}^* \Rightarrow h_1 \vee h_2 \in \mathscr{A}^*$，

(2)　$\{h_n, n \geqslant 1\} \subseteq \mathscr{A}^*, h_n \leqslant h_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} h_n \in \mathscr{A}^*$.

定义 3.2　设 $\mathscr{B}^* \subseteq I^X$，满足下列条件

(1)　$1 \in \mathscr{B}^*$，

(2)　$h_1, h_2 \in \mathscr{B}^* \Rightarrow h_1 h_2, h_1 - h_2 \in \mathscr{B}^*$，

(3)　$\{h_n, n \geqslant 1\} \subseteq \mathscr{B}^*$ 不相重 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} h_n \in \mathscr{B}^*$.

则称 $\mathscr{B}^*$ 为 $F\sigma$ **代数**. 如果把(3)换成 $\{h_n, n=1,\cdots,k\} \subseteq \mathscr{B}^*$ 不相重 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{k} h_n \in \mathscr{B}^*$. 称 $\mathscr{B}^*$ 为 F **代数**.

不难证明：

引理 3.8　如果 $\mathscr{B}^*$ 为 $F\sigma$ 代数，则

(1)　$h \in \mathscr{B}^* \Rightarrow h' \in \mathscr{B}^*$；

(2)　$\{h_j, j \in J\}$ 为 $\mathscr{B}^*$ 的有限或可数子系 $\Rightarrow \bigvee_{j\in J} h_j, \bigwedge_{j\in J} h_j \sum_{j\in J}^{\hat{+}} h_j$, $\prod_{j\in J} h_j, \bigoplus_{j\in J} h_j, \bigodot_{j\in J} h_j \in \mathscr{B}^*$；

(3)　$\mathscr{B}^*$ 为 $F\sigma$ 软代数.

引理 3.9　设 $\mathscr{B}^* \subseteq I^X$，适合定义 3.2 的条件(1)与(2)，则

$\mathscr{B}^*$ 为 $F\sigma$ 代数的充要条件是 $\forall\ \{h_n, n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{B}^*$，$h_n\leqslant h_{n+1}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n \in\mathscr{B}^*$.

引理 3.10　设 $\{\mathscr{L}_t, t\in T\}\subseteq I^X$.

(1)　如果 $\forall\ t\in T$，$\mathscr{L}_t$ 为 $F\sigma$ 软代数，则 $\bigcap\limits_{t\in T}\mathscr{L}_t$ 为 $F\sigma$ 软代数.

(2)　如果 $\forall\ t\in T$，$\mathscr{L}_t$ 为 $F\sigma$ 代数，则 $\bigcap\limits_{t\in T}\mathscr{L}_t$ 为 $F\sigma$ 代数.

定义 3.3　设 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 为可测空间，$h\in I^X$. 如果 $h(\cdot): X\to I$ 为 $\mathscr{A}$ 可测函数，则称 h 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的 **F 可测集**以 $\zeta(\mathscr{A})$ 表示 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上全体 F 可测集，且称 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为由 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 支撑的 **F 可测空间**.

显然，$\zeta(\mathscr{A})$ 为 $F\sigma$ 代数.

定义 3.4　设 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 为可测空间，$h\in I^X$，如果存在 X 的有限可测分划 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 与 $\{a_1, \cdots, a_n\}\subseteq[0, 1]$ 适合 $h=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}=\bigvee\limits_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ 则称 h 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的 **F 简单集**. 以 $M(\mathscr{A})$ 记 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上全体 F 简单集.

不难证明

引理 3.11　(1)　$M(\mathscr{A})$ 对于有限的 $\vee$，$\wedge$，$\hat{+}$，$\hat{\cdot}$，$\oplus$，$\odot$ 运算闭合.

(2)　$\forall\ \{h_n, n\geqslant 1\}\subseteq M(\mathscr{A})\Rightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} h_n, \varlimsup\limits_{n\to\infty} h_n\in\zeta(\mathscr{A})$.

(3)　$\forall$ h$\in\zeta(\mathscr{A})$，$\exists\ \{h_n, n\geqslant 1\}\subseteq M(\mathscr{A})$，$h_n\leqslant h_{n+1}$ 适合 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n=h$.

(4) $\zeta(\mathscr{A})=\bigcap\{\mathscr{B}^* \mid M(\mathscr{A})\subseteq\mathscr{B}^*$ 且 $\mathscr{B}^*$ 是 $F\sigma$ 软代数$\}$.

定义 3.5　设 $\mathscr{A}^*$ 是 X 上的 $F\sigma$ 软代数，如果存在 σ 代数 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}^*=\zeta(\mathscr{A})$. 则称 $\mathscr{A}^*$ 是可生成的，且称 $(X,\mathscr{A}^*)$ 为 F 可测空间.

定理 3.1　设 $\mathscr{A}^*$ 是 X 上的 $F\sigma$ 软代数，$\forall\ \lambda\in I$，$\lambda\in\mathscr{A}^*$. 令

$$\chi_{\mathscr{A}_0} = \mathscr{A}^* \cap \{0,1\}^X = \{\chi_A \mid \chi_A \in \mathscr{A}^* \text{ 且 } A \in \mathscr{P}(X)\},$$

$$\mathscr{A}^\circ = \sigma\{h_\alpha \mid \forall\, h \in \mathscr{A}^*, \alpha \in [0,1]\},$$

其中 $\sigma(\mathscr{E})$ 表示由集合系 $\mathscr{E}$ 产生的 σ 代数，即包含 $\mathscr{E}$ 的最小 σ 代数. 则 $\zeta(\mathscr{A}_0) \subseteq \mathscr{A}^* \subseteq \zeta(\mathscr{A}^0)$.

证明　由定义 3.4 知，$M(\mathscr{A}_0) \subseteq \mathscr{A}^*$，再由引理 3.11 得 $\zeta(\mathscr{A}_0) \subseteq \mathscr{A}^*$. 又 $\forall\, h \in \mathscr{A}^* \Rightarrow \forall\, \alpha \in [0,1], h_\alpha \in \mathscr{A}^\circ \Rightarrow h \in \zeta(\mathscr{A}^\circ)$. 证毕.

定义 3.6　设 $\mathscr{A}^*$ 为 $F\sigma$ 软代数. 如果沿用 I 表示全体常值 F 集，且 $I \subseteq \mathscr{A}^*$，则称 $\mathscr{A}^*$ 为**满层**的.

注 1　注意 I 既表示区间 $[0,1]$，又表示常值 F 集 $\lambda(\lambda \in [0,1])$ 全体，即 $\lambda \in [0,1]$ 既表示实数又表示隶属函数 $\lambda(x) = \lambda, \forall\, x \in X$ 的 F 集. 这样表示方法记号简便，可以省略很繁琐的说明. 到底 I 表示 $[0,1]$ 或者表示常值 F 集全体，视其在文中的作用是不致混淆的.

注 2　如果 $F\sigma$ 软代数 $\mathscr{A}^*$ 是可生成的，则一定是满层的，因为对于任何一个 σ 代数 $\mathscr{A}$ 都有 $I \subseteq \zeta(\mathscr{A})$.

注 3　在有些模糊数学的文献中“$F\sigma$ 代数”的定义把满层性作为前提条件之一（例如 Klement 等）. 一般文献中所指的 $F\sigma$ 代数与本章中的满层 $F\sigma$ 软代数才是同一概念.

本章中的一些 F 集合系（例如 $F\sigma$ 软代数与 $F\sigma$ 代数）都不把满层性作为定义中的条件之一. 这是同 Klement 等人所提出的框架之差别所在. 在下面的论述中，我们将看到这样更能够清晰地解剖 $F\sigma$ 软代数与 $F\sigma$ 代数的满层性与可生成性的结构.

定理 3.2　(1)　$F\sigma$ 软代数 $\mathscr{A}^*$ 是满层的充要条件是 $Q \cap I \subseteq \mathscr{A}^*$，其中 $Q \cap I = \{\lambda \mid \lambda \text{ 是} [0,1] \text{中的有理数且 } \lambda \text{ 表示常值 } F \text{ 集}\}$.

(2)　$F\sigma$ 代数 $\mathscr{B}^*$ 是满层的充要条件是存在正整数 $n > 1$，使

得$\frac{1}{n}\in\mathscr{B}^*$(特别$\frac{1}{2}\in\mathscr{B}^*$).

证明 (1) $\forall\lambda\in I,\exists\{\lambda_n,n\geqslant1\}\subseteq Q\cap I,\lambda_n\leqslant\lambda_{n+1}$,使得$\lambda=\bigvee_{n=1}^{\infty}\lambda_n$,则充分性得证,必要性是显然成立的.

(2) 只需证充分性.由$\mathscr{B}^*$是$F\sigma$代数知:首先,$\frac{1}{n}$的任何正整数k次幂$\frac{1}{n^k}=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{n}\in\mathscr{B}^*$;其次,对于任何$a_k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$当$a_k=0$时,显然有$\frac{a_k}{n_k}=0\in\mathscr{B}^*$,当$a_k\neq0$时,有$\frac{a_k}{n_k}=\sum_{i=1}^{a_k}\frac{1}{n^k}\in\mathscr{B}^*$;最后,对于任何$\lambda\in I$,必存在$a_k\in\{0,1,\cdots,n-1\},k\geqslant1$,使得$\lambda=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{n^k}\in\mathscr{B}^*$.所以$I\subseteq\mathscr{B}^*$.即$\mathscr{B}^*$是满层的.证毕.

定理 3.3 设$\langle X,\mathscr{A}\rangle$为可测空间,$\mathscr{L}\subseteq I^X$,$\mathscr{A}^*(\mathscr{L})$与$\mathscr{B}^*(\mathscr{L})$分别表示包含$\mathscr{L}$的最小$F\sigma$软代数与$F\sigma$代数,则

$$\zeta(\mathscr{A})=\mathscr{A}^*(\{\chi_A,A\in\mathscr{A}\}\cup(Q\cap I))=\mathscr{B}^*\left(\{\chi_A,A\in\mathscr{A}\}\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$$

证明 (1) 由引理3.11(4)知,$\zeta(\mathscr{A})=\mathscr{A}^*[M(\mathscr{A})]\supseteq\mathscr{A}^*(\{\chi_A,A\in\mathscr{A}\}\cup(Q\cap I))$.又$M(\mathscr{A})\subseteq\mathscr{A}^*(\{\chi_A,A\in\mathscr{A}\}\cup(Q\cap I))$,故又有$\zeta(\mathscr{A}))\subseteq\mathscr{A}^*(\{\chi_A,A\in\mathscr{A}\}\cup(Q\cap T))$.

(2) 由定理3.2(2)以及上面(1)立即得证.证毕.

定理 3.4 (1) $F\sigma$软代数$\mathscr{A}^*$为可生成的充要条件是

$$\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*(\chi_{\mathscr{A}_0}\cup(Q\cap I)),$$

其中$\chi_{\mathscr{A}_0}=\mathscr{A}^*\cap\{0,1\}^X$.

(2) $F\sigma$代数$\mathscr{B}^*$为可生成的充要条件是

$$\mathscr{B}^*=\mathscr{B}^*\left(\chi_{\mathscr{B}_0}\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=\mathscr{A}^*(\chi_{\mathscr{B}_0}\cup(Q\cap I)),$$

其中$\chi_{\mathscr{B}_0}=\mathscr{B}^*\cap\{0,1\}^X$.

证明 (1) 充分性,由定理3.3知,$\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*(\chi_{\mathscr{A}_0}\cup(Q\cap$

$I))=\zeta(\mathscr{A}_0)$(因为 $\mathscr{A}_0$ 显然为 σ 代数),故 $\mathscr{A}^*$ 是可生成的.

必要性,如果 $\mathscr{A}^*$ 是可生成的,则存在 σ 代数 $\mathscr{A}$,使得 $\mathscr{A}^*=\zeta(\mathscr{A})$,从而,$\mathscr{A}^*\cap\{0,1\}^X=\chi_{\mathscr{A}}$,即 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_0$. 于是,$\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*(\chi_{\mathscr{A}0}\cup(Q\cap I))$.

(2) 证明方法类似于(1),证毕.

定理 3.5 (1) 设 $\mathscr{A}^*$ 为 $F\sigma$ 软代数 $Q\cap I\subseteq\mathscr{A}^*$,则 $\mathscr{A}^*$ 是可生成的充要条件是 $\mathscr{A}_0=\mathscr{A}^0$.

(2) 设 $\mathscr{B}^*$ 为 $F\sigma$ 代数,$\frac{1}{2}\in\mathscr{B}^*$,则 $\mathscr{B}^*$ 是可生成的.

证明 (1) 由定理 3.2 知,$\mathscr{A}^*$ 是满层的,再由定理 3.1 知

$$\mathscr{A}^*=\zeta(\mathscr{A}_0)\Leftrightarrow\mathscr{A}_0=\mathscr{A}^0.$$

(2) 由定理 3.2 知,$I\subseteq\mathscr{B}^*$. 如果 $\mathscr{B}^*=I$,显然是可生成的. 如果 $\mathscr{B}^*\neq I$. $\forall\ h\in\mathscr{B}^*$ 与 $\alpha\in I$,如果 $h_\alpha=\varnothing$ 或 X,显然 $h_\alpha\in\mathscr{B}_0$. 如果 $h_\alpha\overline{\in}\{\varnothing,X\}$,$\forall\ \alpha\in(0,1)$,令

$$h^{(\alpha)}=(1\text{-}\alpha)\oplus(\alpha\wedge h),$$

则 $h^{(\alpha)}\in\mathscr{B}^*$,且

$$h^{(\alpha)}(x)=1\vee[(1-\alpha)+(\alpha\wedge h(x))]=\begin{cases}1, & x\in h_\alpha,\\ 1-\alpha+h(x), & x\overline{\in}h_\alpha\end{cases}$$

于是,$\prod\limits_{n=1}^{\infty}h^{(\alpha)}=\chi_{h_\alpha}\in\mathscr{B}^*$,$h_\alpha\in\mathscr{B}_0$,则 $h\in\zeta(\mathscr{B}_0)$,从而 $\mathscr{B}^*\subseteq\zeta(\mathscr{B}_0)$. 又显然有 $\zeta(\mathscr{B}_0)\subseteq\mathscr{B}^*$. 所以 $\mathscr{B}^*=\zeta(\mathscr{B}_0)$. 即得证 $\mathscr{B}^*$ 是可生成的. 证毕.

推论 (1) 满层 $F\sigma$ 软代数 $\mathscr{A}^*$ 为可生成的充要条件是 $\mathscr{A}_0=\mathscr{A}^0$.

(2) 满层 $F\sigma$ 代数 $\mathscr{B}^*$ 必定是可生成的.

例 1 设 $X=[0,1]$,$h_0(x)=x$,$x\in[0,1]$. $\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*(\{h_0\}\cup I)$. 显然,$\mathscr{A}^*$ 中的元素 h 是正方形区域 $[0,1]\times[0,1]$ 中的连续折

线构成. 由于 $\mathscr{A}_0=\{X,\varnothing\}$. 显然 $\mathscr{A}_0\neq\mathscr{A}^0$. 故 $\mathscr{A}^*$ 不是可生成的 $F\sigma$ 软代数.

由定理 3.5 以及注 2 知,满层性是 $F\sigma$ 代数可生成的充要条件,但对于 $F\sigma$ 软代数只是必要条件而非充分条件,例 1 就是满层 $F\sigma$ 软代数不是可生成的一个实例. 下面例子说明尽管 $\mathscr{B}_0=\mathscr{B}^0$, $F\sigma$ 代数(更一般 $F\sigma$ 软代数)也不一定是满层的,因而也不一定是可生成的.

例 2　设 $X=[0,1]$, $A^{(\alpha)}(x)=\alpha\wedge\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, $\forall\ \alpha\in[0,1]$. 且令

$$\mathscr{B}^*=\mathscr{B}^*\{A^{(\alpha)},\alpha\in[0,1]\}.$$

由于 $F\sigma$ 代数 $\mathscr{B}^*$ 不是满层的,从而不是可生成的,但 $\mathscr{B}_0=\mathscr{B}^0$.

$\left(\text{事实上 } \mathscr{B}_0=\mathscr{B}^0=\left\{\varnothing,[0,1],\left[0,\frac{1}{2}\right],\left(\frac{1}{2},1\right]\right\}\right)$.

§4　F 半测度与 F 测度

本节把半测度与测度的概念推广到 F 集的情形.

定义 4.1　设 $\mathscr{A}^*$ 为 X 上的 $F\sigma$ 软代数, $\underset{\sim}{m}$ 为 $\mathscr{A}^*$ 上的非负广义实值函数,即 $\underset{\sim}{m}:\mathscr{A}^*\to[0,+\infty]$. 如果满足下列条件(1)—(3),则称 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\mathscr{A}^*$ 上的 F **半测度**.

(1)　$\underset{\sim}{m}(0)=0$;

(2)　如果 $h_1,h_2\in\mathscr{A}^*$ 且 $h_1\leqslant h_2$, 则 $\underset{\sim}{m}(h_1)\leqslant\underset{\sim}{m}(h_2)$;

(3)　如果 $\{h_n,n\geqslant1\}\subseteq\mathscr{A}^*$, $h_n\leqslant h_{n+1}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{m}(h_n)=\underset{\sim}{m}(\lim\limits_{n\to\infty}h_n)$.

特别,当 $\underset{\sim}{m}(1)<+\infty$ 时,称 $\underset{\sim}{m}$ 为**有限 F 半测度**;当 $\underset{\sim}{m}(1)=1$ 时,称 $\underset{\sim}{m}$ 为**正规 F 半测度**.

不难证明下述定理.

定理 4.1 设 $\underset{\sim}{m}$ 是 $\mathscr{A}^*$ 上的 F 半测度.

(1) 如果 $h_1,h_2\in\mathscr{A}^*$,则

$$\underset{\sim}{m}(h_1\vee h_2)\geqslant\underset{\sim}{m}(h_1)\vee\underset{\sim}{m}(h_2),\underset{\sim}{m}(h_1\wedge h_2)\leqslant\underset{\sim}{m}(h_1)\wedge\underset{\sim}{m}(h_2).$$

(2) 如果 $\{h_n,n\geqslant1\}\subseteq\mathscr{A}^*$,则

$$\underset{\sim}{m}(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)\geqslant\bigvee_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{m}(h_n),\underset{\sim}{m}(\bigwedge_{n=1}^{\infty}h_n)\leqslant\bigwedge_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{m}(h_n)$$

定理 4.2 设映射 $\underset{\sim}{m}:\mathscr{A}^*\to[0,+\infty]$ 适合 $\underset{\sim}{m}(1)>0$,则 $\underset{\sim}{m}$ 为 F 半测度当且仅当 $\dfrac{\underset{\sim}{m}(\cdot)}{\underset{\sim}{m}(1)}$ 为 $\mathscr{A}^*$ 上的正规 F 半测度.

定理 4.3 设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为由 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 支撑的 F 可测空间.如果 m 为 $\mathscr{A}$ 上的半测度,且 $0<m(X)<+\infty$,则由下式

$$\underset{\sim}{m}(h)\triangleq m(X)\int h\circ\frac{m}{m(X)},\qquad\forall h\in\zeta(\mathscr{A}),$$

界定的 F 集合函数 $\underset{\sim}{m}(\cdot)$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 F 半测度.

证明 $\forall A\in\mathscr{A}$,

$$\underset{\sim}{m}(\chi_A)=m(X)\int\chi_A\circ\frac{m}{m(X)}=m(X)\cdot\frac{m(A)}{m(X)}=m(A).$$

由定理 1.12,与定理 1.17 知,$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的(有限)F 半测度.证毕.

定理 4.4 设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为由 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 支撑的 F 可测空间,如果 m 为 $\mathscr{A}$ 上的半测度,则由下式

$$\underset{\sim}{m}(h)\triangleq\int hdm,\qquad\forall h\in\zeta(\mathscr{A}).$$

界定的 F 集合函数 $\underset{\sim}{m}(\cdot)$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 F 半测度.其中 $\int hdm$ 为 h 关于半测度 m 的 L 型积分.

证明 显然,$\underset{\sim}{m}(0)=\int 0dm=0$,再由定理 1.4 与定理 1.7 即得所欲证.证毕.

定义 4.2 设 $\underset{\sim}{m}$ 为 F 可测空间 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 上的 F 半测度.

度.

(1)　如果 $h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$ 且 $h_1\wedge h_2=0$,有

$$\underset{\sim}{m}(h_1\vee h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)\vee\underset{\sim}{m}(h_2),$$

称 m 为 S 型 F 测度.

(2)　如果 $h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$,$h_1\wedge h_2=0$,有

$$\underset{\sim}{m}(h_1\vee h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)+\underset{\sim}{m}(h_2),$$

称 m 为 Z 型 F 测度.

(3)　如果 $h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$,$h_1$ 与 h_2 不相重,有

$$\underset{\sim}{m}(h_1+h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)+\underset{\sim}{m}(h_2),$$

称 m 为 H 型 F 测度.

定义 4.3　设 $\underset{\sim}{m}$ 为 F 可测空间 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 上的 F 半测度,且 $m(1)<+\infty$,任给 $\lambda>0$.

(1)　如果 $h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$,$h_1\wedge h_2=0$,有

$$\underset{\sim}{m}(h_1\vee h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)\overset{\lambda}{+}\underset{\sim}{m}(h_2),$$

称 m 为 S_λ 型 F 测度

(2)　如果 $h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$ 且 h_1 与 h_2 不相重,有

$$\underset{\sim}{m}(h_1+h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)\overset{\lambda}{+}\underset{\sim}{m}(h_2).$$

称 $\underset{\sim}{m}$ 为 H_λ 型 F 测度.

定理 4.5　设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为由 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 支撑的 F 可测空间,$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的非负广义实值函数且 $\underset{\sim}{m}(0)=0$,则下列各命题相互等价.

(1)　m 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 S 型 F 测度.

(2)　$\underset{\sim}{m}$ 为 F 半测度且 $\forall\ h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$,$\underset{\sim}{m}(h_1\vee h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)\vee\underset{\sim}{m}(h_2)$.

(3)　$\forall\ \{h_n,n\geqslant1\}\subseteq\zeta(\mathscr{A})$ 且 $h_i\wedge h_j=0,i\neq j$,则 $\underset{\sim}{m}(\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}h_n)$

$=\bigvee_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{m}(h_n)$.

(4) $\forall\ \{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{A})$，有 $\underset{\sim}{m}(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)=\bigvee_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{m}(h_n)$.

证明 (1)⇒(2) $\forall\ h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$，有$\{h_1\geqslant h_2\}\in\mathscr{A}$，$\{h_1<h_2\}\in\mathscr{A}$，从而 $\chi_{\{h_1\geqslant h_2\}}\in\zeta(\mathscr{A})$，$\chi_{\{h_1<h_2\}}\in\zeta(\mathscr{A})$且 $\chi_{\{h_1\geqslant h_2\}}\wedge\chi_{\{h_1<h_2\}}=0$，$\chi_{\{h_1\geqslant h_2\}}\vee\chi_{\{h_1<h_2\}}=1$. 于是，有

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{m}(h_1\vee h_2)&=\underset{\sim}{m}[(h_1\wedge\chi_{\{h_1\geqslant h_2\}})\vee(h_2\wedge\chi_{\{h_1<h_2\}})]\\&=\underset{\sim}{m}(h_1\wedge\chi_{\{h_1\geqslant h_2\}})\vee\underset{\sim}{m}(h_2\wedge\chi_{\{h_1<h_2\}})\\&\leqslant\underset{\sim}{m}(h_1)\vee\underset{\sim}{m}(h_2)\end{aligned}$$

显然

$$\underset{\sim}{m}(h_1\vee h_2)\geqslant\underset{\sim}{m}(h_1)\vee\underset{\sim}{m}(h_2)$$

所以

$$\underset{\sim}{m}(h_1\vee h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)\vee\underset{\sim}{m}(h_2).$$

(2)⇒(1) 显然.

(1)⇔(3)与(2)⇔(4)的证明方法类似于定理 1.2 的证明. 证毕.

定理 4.6 设$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$为由$\langle X,\mathscr{A}\rangle$支撑的 F 可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(A)$上的非负广义实值函数且 $\underset{\sim}{m}(0)=0$，则下列各命题相互等价.

(1) $\underset{\sim}{m}$ 为$\zeta(\mathscr{A})$上的 Z 型 F 测度

(2) $\underset{\sim}{m}$ 为 F 半测度且$\forall\ h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$，有

$$\underset{\sim}{m}(h_1\vee h_2)+\underset{\sim}{m}(h_1\wedge h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)+\underset{\sim}{m}(h_2).$$

(3) $\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{A})$，$h_i\wedge h_j=0,i\neq j$，则

$$\underset{\sim}{m}(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{m}(h_n).$$

证明 这里只证(1)⇒(2)，其余部分请读者自证.

$\forall\ h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$，则

$$h_1 \vee h_2 = (h_1 \wedge \chi_{\{h_1\geqslant h_2\}}) \vee (h_2 \wedge \chi_{\{h_1<h_2\}}),$$

$$h_1 \wedge h_2 = (h_1 \wedge \chi_{\{h_1<h_2\}}) \vee (h_2 \wedge \chi_{\{h_1\geqslant h_2\}})$$

于是

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{m}(h_1 \vee h_2) + \underset{\sim}{m}(h_1 \wedge h_2)\\
&=\underset{\sim}{m}(h_1 \wedge \chi_{\{h_1\geqslant h_2\}}) + \underset{\sim}{m}(h_2 \wedge \chi_{\{h_1<h_2\}})\\
&+\underset{\sim}{m}(h_1 \wedge \chi_{\{h_1<h_2\}}) + \underset{\sim}{m}(h_2 \wedge \chi_{\{h_1\geqslant h_1\}})\\
&=\underset{\sim}{m}[(h_1 \wedge \chi_{\{h_1\geqslant h_2\}}) \vee (h_1 \wedge \chi_{\{h_1<h_2\}})]\\
&+\underset{\sim}{m}[h_2 \wedge \chi_{\{h_1\geqslant\}}) \vee (h_2 \wedge \chi_{\{h_1<h_2\}})]\\
&=\underset{\sim}{m}(h_1) + \underset{\sim}{m}(h_2).
\end{aligned}$$

证毕.

定理 4.7　设 $\underset{\sim}{m}$ 为 F 可测空间 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 上的 F 半测度. 如果 $\forall\ h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$ 有 $\underset{\sim}{m}(h_1\wedge h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)\wedge\underset{\sim}{m}(h_2)$，则 $\underset{\sim}{m}$ 为 S 型 F 测度当且仅当 $\underset{\sim}{m}$ 为 Z 型 F 测度.

证明　如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 S 型 F 测度，则 $\forall\ h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$，有

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{m}(h_1 \vee h_2) + \underset{\sim}{m}(h_1 \wedge h_2) &= [\underset{\sim}{m}(h_1) \vee \underset{\sim}{m}(h_2)] + [\underset{\sim}{m}(h_1) \wedge \underset{\sim}{m}(h_2)]\\
&= \underset{\sim}{m}(h_1) + \underset{\sim}{m}(h_2).
\end{aligned}$$

所以 $\underset{\sim}{m}$ 为 Z 型 F 测度.

又若 $\underset{\sim}{m}$ 为 Z 型 F 测度，则 $\forall\ h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$，$h_1\wedge h_2=0$，有

$$\underset{\sim}{m}(h_1) \wedge \underset{\sim}{m}(h_2) = \underset{\sim}{m}(h_1 \wedge h_2) = \underset{\sim}{m}(0) = 0,$$

则

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{m}(h_1 \vee h_2) &= \underset{\sim}{m}(h_1) + \underset{\sim}{m}(h_2)\\
&= [\underset{\sim}{m}(h_1) \vee \underset{\sim}{m}(h_2)] + [\underset{\sim}{m}(h_1) \wedge \underset{\sim}{m}(h_2)]\\
&= \underset{\sim}{m}(h_1) \vee \underset{\sim}{m}(h_2).
\end{aligned}$$

所以 $\underset{\sim}{m}$ 为 S 型 F 测度. 证毕.

定理 4.8 设$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$为由$\langle X,\mathscr{A}\rangle$支撑的$F$可测空间,$\underset{\sim}{m}$为$\zeta(\mathscr{A})$上的非负广义实值函数.则$\underset{\sim}{m}$为$H$型$F$测度的充要条件是$\underset{\sim}{m}(0)=0$且对于$\zeta(\mathscr{A})$中任何一个不相重的可数系$\{h_n, n\geqslant 1\}$,有

$$\underset{\sim}{m}\left(\sum_{n=1}^{\infty}h_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{m}(h_n).$$

请读者自证.

定理 4.9 设$\underset{\sim}{m}$为$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$上的$H$型$F$测度.

(1) 如果$h\in\zeta(\mathscr{A})$且$a\in I$,则$\underset{\sim}{m}(ah)=a\underset{\sim}{m}(h)$.

(2) 如果$h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$,$h_1\leqslant h_2$且$\underset{\sim}{m}(h_2)<+\infty$,则$\underset{\sim}{m}(h_2-h_1)=\underset{\sim}{m}(h_2)-\underset{\sim}{m}(h_1)$.

(3) 如果$h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$,则$\underset{\sim}{m}(h_1\hat{+}h_2)\dot{+}\underset{\sim}{m}(h_1h_2)=\underset{\sim}{m}(h_2)+\underset{\sim}{m}(h_1)$.

证明 (1) 首先,当$a=0$时,$ah=0$,显然成立.

其次,若$a=\frac{1}{k}$,(k为自然数),则对于任何$h\in\zeta(A)$,有

$$h=\frac{1}{k}h+\frac{1}{k}h+\cdots+\frac{1}{k}h(\text{共}\ k\ \text{项})$$

于是

$$\underset{\sim}{m}(h)=\underset{\sim}{m}\left(\frac{1}{k}h\right)+\underset{\sim}{m}\left(\frac{1}{k}h\right)+\cdots+\underset{\sim}{m}\left(\frac{1}{k}h\right)=k\underset{\sim}{m}\left(\frac{1}{k}h\right),$$

所以 $\underset{\sim}{m}\left(\frac{1}{k}h\right)=\frac{1}{k}\underset{\sim}{m}(h)$.

这样对于[0,1]中任何正有理数$\frac{r}{k}\in I\cap Q$,

$$\frac{r}{k}h=\sum_{1}^{r}\frac{1}{k}h=\frac{1}{k}h+\cdots+\frac{1}{k}h(\text{共}\ r\ \text{项})$$

有

$$\underset{\sim}{m}\left(\frac{r}{k}h\right)=r\underset{\sim}{m}\left(\frac{1}{k}h\right)=\frac{r}{k}\underset{\sim}{m}(h)$$

最后，对于任何正实数 $\alpha\in I$，存在单调不减的正有理数列 $\{r_n, n\geqslant 1\}\subseteq Q\cap I$，使得 $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}r_n$ 且

$$\underset{\sim}{m}(\alpha h) = \lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{m}(r_n h) = \lim_{n\to\infty}r_n\underset{\sim}{m}(h) = \alpha\underset{\sim}{m}(h)$$

(2)　由于 $h_1\leqslant h_2$，则 $h_2=h_1+(h_2-h_1)$，从而

$$\underset{\sim}{m}(h_2) = \underset{\sim}{m}(h_1) + \underset{\sim}{m}(h_2 - h_1).$$

所以　$\underset{\sim}{m}(h_2-h_1)=\underset{\sim}{m}(h_2)-\underset{\sim}{m}(h_1)$.

(3)　由于 $h_1\hat{+}h_2=h_1+(h_2-h_1h_2)$，则

$$\underset{\sim}{m}(h_1\hat{+}h_2) = \underset{\sim}{m}(h_1) + \underset{\sim}{m}(h_2 - h_1h_2).$$

如果 $\underset{\sim}{m}(h_1\hat{+}h_2)=+\infty$，结论显然成立. 如果 $\underset{\sim}{m}(h_1\hat{+}h_2)<+\infty$，由(2)得 $\underset{\sim}{m}(h_2-h_1h_2)=\underset{\sim}{m}(h_2)-\underset{\sim}{m}(h_1h_2)$. 再将此式代入上面等式即得所欲证. 证毕.

定理 4.10　设 $\underset{\sim}{m}$ 为 F 可测空间 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 上的 F 半测度. 则 $\underset{\sim}{m}$ 为 H 型 F 测度的充要条件是对于任何 $h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$，有

$$\underset{\sim}{m}(h_1\oplus h_2) + \underset{\sim}{m}(h_1\odot h_2) = \underset{\sim}{m}(h_1) + \underset{\sim}{m}(h_2)$$

证明　充分性. 如果 h_1 与 h_2 不相重，则 $h_1\oplus h_2=h_1+h_2$，$h_2\odot h_2=0$，于是，$\underset{\sim}{m}(h_1+h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)+\underset{\sim}{m}(h_2)$. 所以 $\underset{\sim}{m}$ 为 H 型 F 测度.

必要性，首先 $h_1\oplus h_2=h_1+[h_2-(h_1\odot h_2)]$，则

$$\underset{\sim}{m}(h_1\oplus h_2) = \underset{\sim}{m}(h_1) + \underset{\sim}{m}[h_2 - (h_1\odot h_2)]$$

如果 $\underset{\sim}{m}(h_1\oplus h_2)=+\infty$，结论显然成立. 如果 $\underset{\sim}{m}(h_1\oplus h_2)<+\infty$，由定理 4.9(2)，得

$$\underset{\sim}{m}[h_2 - (h_1\odot h_2)] = \underset{\sim}{m}(h_2) - \underset{\sim}{m}(h_1\odot h_2)$$

综合上面两式，即得所欲证. 证毕.

推论 1　设 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 上的 H 型 F 测度，则 $\underset{\sim}{m}$ 必为 Z 型 F 测度.

推论 2 设 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 上的 F 半测度，如果对于任何 $h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$，有

$$\underset{\sim}{m}(h_1\hat{+}h_2)+\underset{\sim}{m}(h_1h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)+\underset{\sim}{m}(h_2),$$

则 $\underset{\sim}{m}$ 必为 Z 型 F 测度.

定理 4.11 设 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 上的有限 F 半测度，任给 $\lambda>0$，则下列命题相互等价.

(1) $\underset{\sim}{m}$ 为 H_λ 型 F 测度.

(2) 若 $\{h_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 中可数个不相重的 F 集，则

$$\underset{\sim}{m}(\sum_{n=1}^{\infty}h_n)=\frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{\infty}[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_n)]-1\}$$

(3) 若 $\forall\, h\in\zeta(\mathscr{A})$，令 $\underset{\sim}{m}^*(h)=\ln[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h)]$，则 $\underset{\sim}{m}^*$ 为 H 型 F 测度.

证明 (1)⇒(2) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 H_λ 型 F 测度，则 $h_1,h_2\in\zeta(A)$，且不相重，有

$$\underset{\sim}{m}(h_1\dot{+}h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)\overset{\lambda}{+}\underset{\sim}{m}(h_2)=\underset{\sim}{m}(h_1)+\underset{\sim}{m}(h_2)+\lambda\underset{\sim}{m}(h_1)\underset{\sim}{m}(h_2)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{2}[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_n)]-1\}.$$

由归纳法可证对于任何自然数 $m\geqslant 2$，如果 $\{h_n,\cdots,h_m\}\subseteq\zeta(\mathscr{A})$ 不相重，则

$$\underset{\sim}{m}(\sum_{n=1}^{m}h_n)=\frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{m}[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_n)]-1\}.$$

从而，对于任何不相重的可数个 F 集 $\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{A})$，有

$$m(\sum_{n=1}^{\infty}h_n)=\lim_{m\to\infty}\underset{\sim}{m}(\sum_{n=1}^{m}h_n)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{m}[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_n)]-1\}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{\infty}[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_n)]-1\}.$$

(2)⇒(3) 对于 $\zeta(\mathscr{A})$ 中任何不相重的可数系 $\{h_n,n\geqslant 1\}$，有

$$\underset{\sim}{m}^*(\sum_{n=1}^{\infty}h_n)=\ln[1+\lambda\underset{\sim}{m}(\sum_{n=1}^{\infty}h_n)]$$

$$=\ln[\prod_{n=1}^{\infty}[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_n)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_n)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{m}^*(h_n).$$

所以 $\underset{\sim}{m}^*$ 为 H 型 F 测度

(3)⇒(1)　对于 $\zeta(\mathscr{A})$ 中任何不相重的 F 集 h_1 与 h_2

$$\underset{\sim}{m}(h_1+h_2)=\frac{1}{\lambda}[e^{\underset{\sim}{m}^*(h_1+h_2)}-1]=\frac{1}{\lambda}[e^{\underset{\sim}{m}^*(h_1)+\underset{\sim}{m}^*(h_2)}-1]$$

$$=\frac{1}{\lambda}\{e^{\ln[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_1)]}\cdot e^{\ln[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_2)]}-1\}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\{[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_1)][1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_2)]-1\}$$

$$=\underset{\sim}{m}(h_1)\overset{\lambda}{+}\underset{\sim}{m}(h_2).$$

所以 $\underset{\sim}{m}$ 为 H_λ 型 F 测度. 证毕.

同理可证下述推论.

推论 3　设 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 上的有限 F 半测度，任给 $\lambda>0$，则下列命题相互等价.

(1)　$\underset{\sim}{m}$ 为 S_λ 型 F 测度.

(2)　$\forall\ \{h_n,n\geqslant1\}\subseteq\zeta(\mathscr{A})$，$h_i\wedge h_j=0,i\neq j$，则

$$\underset{\sim}{m}(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)=\frac{1}{\lambda}\{\prod_{n=1}^{\infty}[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h_n)]-1\}$$

(3)　若 $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$，令 $\underset{\sim}{m}^*(h)=\ln[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h)]$. 则 $\underset{\sim}{m}^*$ 为 Z 型 F 测度.

例 1 如果对于任何 $h\in I^X$ 界定 $\underset{\sim}{m}(h)\triangleq\bigvee_{x\in X}h(x)$，不难证明 $\underset{\sim}{m}(\cdot)$为 I^X 上的正规 S 型 F 测度

例 2 设 m 为可测空间$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的有限 S 型测度，$0<m(X)<+\infty$，$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$，界定

$$\underset{\sim}{m}(h)\triangleq m(X)\int h\circ\frac{m}{m(X)}.$$

则 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的有限 S 型 F 测度.

例 3 设 m 为可测空间$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的测度，$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$界定

$$\underset{\sim}{m}(h)\triangleq\int hdm.$$

则 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 H 型 F 测度，因而也是 Z 型 F 测度.

例 4 设 m 为可测空间$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的 S_λ 型测度$(\lambda>0)$，$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$，界定

$$\underset{\sim}{m}(h)\triangleq\int^{\lambda}hd\underset{\sim}{m},$$

则 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 H_λ 型 F 测度.

现在我们讨论 F 测度的积分表示. 不难证明下面的引理.

引理 设$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$为由$\langle X,\mathscr{A}\rangle$支撑的 F 可测空间. $\underset{\sim}{m}$ 是 $\zeta(\mathscr{A})$上的非负(广义)实值函数，$\forall\ A\in\mathscr{A}$，令 $m(A)=\underset{\sim}{m}(\chi_A)$.

(1) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 F 半测度，则 m 为 $\mathscr{A}$ 上的半测度.

(2) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 S 型 F 测度，则 m 为 $\mathscr{A}$ 上的 S 型测度.

(3) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 Z 型(或 H 型)F 测度，则 m 为 $\mathscr{A}$ 上的测度.

(4) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 H_λ 型(或 S_λ 型)F 测度，则 m 为 $\mathscr{A}$ 上的 S_λ 型测度.

定理 4.12　设$\langle X,\mathscr{A}\rangle$为可测空间，$\underset{\sim}{m}$为$\zeta(\mathscr{A})$上的正规$S$型$F$测度，$\forall A\in\mathscr{A}$，记$m(A)=\underset{\sim}{m}(\chi_A)$，则下列各命题相互等价.

(1)　若$\alpha\in I$与$h\in\zeta(\mathscr{A})$，则$\underset{\sim}{m}(\alpha\wedge h)=\alpha\wedge\underset{\sim}{m}(h)$.

(2)　若$\alpha\in I$与$A\in\mathscr{A}$. 则$\underset{\sim}{m}(\alpha\wedge\chi_A)=\alpha\wedge m(A)$.

(3)　$\underset{\sim}{m}(h)=\int h\circ m,\qquad\forall h\in\zeta(\mathscr{A})$

证明　(1)⇒(2)　显然.

(2)⇒(3)　如果h为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的$F$简单集，即$h\in M(\mathscr{A})$. 则存在$\{A_i,i=1,2,\cdots,n\}\subseteq\mathscr{A}$，$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n$与$1\geqslant a_1>a_2>\cdots>a_n\geqslant 0$，使得

$$h=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\wedge\chi_{A_i}).$$

于是

$$\underset{\sim}{m}(h)=\bigvee_{i=1}^{n}m(a_i\wedge\chi_{A_i})=\bigvee_{i=1}^{n}[a_i\wedge m(A_i)]$$

$$=\bigvee_{i=1}^{n}[a_i\wedge m(h\geqslant a_i)]=\int h\circ m.$$

对于任何$h\in\zeta(\mathscr{A})$，则在$M(\mathscr{A})$中存在一个单调不减的序列$\{h_n,n\geqslant 1\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=h$，再由$\underset{\sim}{m}$的下连续性与定理1.17有

$$\underset{\sim}{m}(h)=\lim_{n\to\infty}m(h_n)=\lim_{n\to\infty}\int h_n\circ m=\int h\circ m.$$

(3)⇒(1)　由定理1.18(2)，知

$$\underset{\sim}{m}(\alpha\wedge h)=\int(\alpha\wedge h)\circ m=\alpha\wedge\int h\circ m=\alpha\wedge\underset{\sim}{m}(h).$$

证毕.

定理 4.13　设$\langle X,\mathscr{A}\rangle$为可测空间，$\underset{\sim}{m}$为$\zeta(\mathscr{A})$上的$S$型$F$测度，且$0<\underset{\sim}{m}(1)<+\infty$，$\forall A\in\mathscr{A}$，记$m(A)=\underset{\sim}{m}(\chi_A)$. 则下列各命题相互等价.

(1)　若$\alpha\in I$与$h\in\zeta(\mathscr{A})$，则$\underset{\sim}{m}(\alpha\wedge h)=m(X)\alpha\wedge\underset{\sim}{m}(h)$.

(2) 若 $\alpha\in I$ 与 $A\in\mathscr{A}$，则 $\underset{\sim}{m}(\alpha\wedge\chi_A)=m(X)\alpha\wedge m(A)$.

(3) $\underset{\sim}{m}(h)=m(X)\cdot\int h\circ\frac{m}{m(X)}$, $\quad\forall\, h\in\zeta(\mathscr{A})$.

证明 (1)⇒(2)显然.

(2)⇒(3) 如果令 $\underset{\sim}{m}^\circ(\cdot)=\frac{\underset{\sim}{m}(\cdot)}{m(X)}$，$m^\circ(\cdot)=\frac{m(\cdot)}{m(X)}$，则由(2)得

$$\underset{\sim}{m}^\circ(\alpha\wedge\chi A)=\frac{\underset{\sim}{m}(\alpha\wedge\chi_A)}{m(X)}=\alpha\wedge\frac{m(A)}{m(X)}=\alpha\wedge m^\circ(A).$$

再由定理 4.12 知，对于任何 $h\in\zeta(\mathscr{A})$，有

$$\frac{\underset{\sim}{m}(h)}{m(X)}=\underset{\sim}{m}^\circ(h)=\int h\circ m^\circ=\int h\circ\frac{m}{m(X)},$$

所以

$$\underset{\sim}{m}(h)=m(X)\int h\circ\frac{m}{m(x)}.$$

(3)⇒(1) 由定理 4.12，得

$$\underset{\sim}{m}(\alpha\wedge h)=m(X)\underset{\sim}{m}^\circ(\alpha\wedge h)=m(X)[\alpha\wedge\underset{\sim}{m}^\circ(h)]$$

$$=\left[m(X)\alpha\right]\wedge\left[m(X)\cdot\frac{\underset{\sim}{m}(h)}{m(X)}\right]=m(X)\alpha\wedge\underset{\sim}{m}(h).$$

证毕.

定理 4.14 设 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 为可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的非负(广义)实值函数且 $\underset{\sim}{m}(0)=0$，若 $\forall\, A\in\mathscr{A}$，记 $m(A)=\underset{\sim}{m}(\chi_A)$，则下列各命题相互等价.

(1) $\underset{\sim}{m}$ 为 H 型 F 测度.

(2) $\underset{\sim}{m}$ 为 Z 型 F 测度，且 $\forall\,\alpha\in I$ 与 $h\in\zeta(\mathscr{A})$，有 $\underset{\sim}{m}(\alpha h)=\alpha\underset{\sim}{m}(h)$.

(3) $\underset{\sim}{m}$ 为 Z 型 F 测度，且 $\forall\,\alpha\in I$ 与 $A\in\mathscr{A}$，有 $\underset{\sim}{m}(\alpha\chi_A)=\alpha m(A)$.

(4) $\underset{\sim}{m}(h)=\int hdm,\qquad \forall\, h\in\zeta(\mathscr{A})$.

证明 (1)⇒(2) 由定理 4.9 与推论 1,立即得证.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 如果 h 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的 F 简单集,即 $h\in M(\mathscr{A})$,则存在 X 的一个可测分划 $\{A_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 与 $1\geqslant a_1>a_2>\cdots>a_n\geqslant 0$,使得 $h=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}=\bigvee_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$,显然,当 $i\neq j$ 时,$(a_i\chi_{A_i})\wedge(a_j\chi_{A_j})=0$,故由(3),有

$$\underset{\sim}{m}(h)=\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{m}(a_i\chi_{A_i})=\sum_{i=1}^{n}a_i m(A_i)=\int hdm.$$

如果 $h\in\zeta(\mathscr{A})$,则在 $M(\mathscr{A})$ 中存在单调不减的序列 $\{h_n,n\geqslant 1\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=h$. 再由 $\underset{\sim}{m}$ 的下连续性与 Lebesgue 积分的单调收敛定理,有

$$\underset{\sim}{m}(h)=\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{m}(h_n)=\lim_{n\to\infty}\int h_n dm=\int hdm.$$

(4)⇒(1) 由例 3. 即得. 证毕.

定义 4.4 设 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 为可测空间;$\langle[0,1),\mathscr{B}[0,1)\rangle$ 为 Borel 可测空间,称映射 $K:X\times\mathscr{B}[0,1)\to I$ 为**马尔科夫核**,如果 K 满足下列条件:

(1) $\forall\, x\in X,K(x,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}[0,1)$ 上的概率测度;

(2) $\forall\, B\in\mathscr{B}[0,1),K(\cdot,B)$ 是 $\mathscr{A}$ 可测的,即 $K(\cdot,B)\in\zeta(\mathscr{A})$.

定理 4.15 设 $\langle X,\mathscr{A},m\rangle$ 是测度空间,K 是马尔科夫核,如果 $\forall\, h\in\zeta(\mathscr{A})$,令

$$\underset{\sim}{m}(h)=\int K[x,[0,h(x))]dm.$$

则 $\underset{\sim}{m}$ 是 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 Z 型 F 测度.

证明 为使 $\underset{\sim}{m}(\cdot)$ 有意义. 首先需证 $K[x,[0,h(x))]$ 是 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 到 $[0,1]$ 的可测函数.

事实上,如果 $h\in M(\mathscr{A})$,即存在 X 上的一个 $\mathscr{A}$ 可测分划 $\{A_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 与 $a_i\in I,i=1,2,\cdots,n$,使得

$$h(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}(x),\forall\ x\in X.$$

则

$$K[x,[0,h(x))]=\sum_{i=1}^{n}K[x,[0,a_i)]\chi_{A_i}(x),\forall\ x\in X,$$

由定义 4.4,知 $K[x,[0,h(x))]$ 是 $\mathscr{A}$ 可测的.

对于任何 $h\in\zeta(\mathscr{A})$,则在 $M(\mathscr{A})$ 中存在单调不减序列 $h_n\nearrow h$,则

$$K[x,[0,h(x))]=\lim_{n\to 0}K[x,[0,h_n(x))]$$

是 $\mathscr{A}$ 可测的.

然后再证明 $\underset{\sim}{m}$ 是 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 Z 型 F 测度. 首先,

$$\underset{\sim}{m}(0)=\int K(x,\varnothing)dm=\int 0dm=0.$$

其次,若 $h_1,h_2\in\zeta(A),h_1\leqslant h_2$,显然,$\underset{\sim}{m}(h_1)\leqslant\underset{\sim}{m}(h_2)$. 又若 $h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$,有

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{m}(h_1\vee h_2)+\underset{\sim}{m}(h_1\wedge h_2)&=\int K[x,[0,h_1(x)\vee h_2(x))]dm\\&\quad+\int K[x,[0,h_1(x)\wedge h_2(x))]dm\\&=\int\{K[x,[0,h_1(x))]+K[x,[0,h_2(x)]\}dm\\&=\int K[x,[0,h_1(x))]dm+\int K[x,[0,h_2(x))]dm.\\&=\underset{\sim}{m}(h_1)+\underset{\sim}{m}(h_2)\end{aligned}$$

最后,若 $h_n\in\zeta(\mathscr{A}),h_n\leqslant h_{n+1},n\geqslant 1,h\in\zeta(\mathscr{A})$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=h$. 则

$K[0,[0,h_n(x))]\nearrow K[x,[0,h(x))]$.

于是

$$\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{m}(h_n)=\lim_{n\to\infty}\int K[x,[0,h_n(x))]dm$$
$$=\int K[x,[x,h(x))]dm$$
$$=\underset{\sim}{m}(h).$$

所以 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 Z 型 F 测度. 证毕.

定理 4.16　设 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 是可测空间, $\underset{\sim}{m}$ 是 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 Z 型 F 测度, $\underset{\sim}{m}(1)<+\infty$, $\forall A\in\mathscr{A}$ 记 $m(A)=\underset{\sim}{m}(\chi_A)$. 则在 m 意义下几乎处处 (a,e) 存在唯一确定的马尔科夫核 K, 使得

$$\underset{\sim}{m}(h)=\int K[x,[0,h(x))]dm,\qquad\forall h\in\zeta(\mathscr{A})$$

证明　分下列七步证明:

(1)　首先证明 $\forall a\in I$, 映射 $m_a:\mathscr{A}\to[0,+\infty)$, $A\to\underset{\sim}{m}(a\wedge\chi_A)$ 是 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的有限测度. 事实上, $m_a(\varnothing)=\underset{\sim}{m}(0)=0$, $m_a(X)=\underset{\sim}{m}(a)<+\infty$. 若 $\{A_n,n\geqslant1\}\subseteq\mathscr{A}$ 且 $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$, 则

$$m_a(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=m_a[\lim_{k\to\infty}\bigcup_{n=1}^{k}A_n]=\lim_{k\to\infty}\underset{\sim}{m}[a\wedge\chi_{\bigcup_{n=1}^{k}A_n}]$$
$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\underset{\sim}{m}(a\wedge\chi_{A_n})=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{m}(a\wedge\chi_{A_n}).$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}m_a(A_n).$$

(2)　显然有 $m=m_1$, 且 $\forall a\in I$, 当 $A\in\mathscr{A}$, $m(A)=0$ 时, 有

$$0\leqslant m_a(A)=\underset{\sim}{m}(a\wedge\chi_A)\leqslant\underset{\sim}{m}(\chi_A)=m(A)=0.$$

则 $m_a(A)=0$. 于是, m_a 关于 m 是绝对连续的. 由拉东一尼古丁定理知, 存在 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的可测函数 f_a, 使得

$$m_a(A)=\int_A f_a(x)dm,\qquad\forall A\in\mathscr{A}$$

(3)　由于当 f,g 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的可测函数且 $\forall\ A\in\mathscr{A}$,

$$\int_A f(x)dm = \int_A g(x)dm$$

时, $f(x)=g(x)(a,e)$. 于是, $f_0(x)=0, f_1(x)=1(a,e)$. 若以 $Q_{[0,\alpha)}$ 表示 $[0,\alpha)$ 中的有理数集, $\forall\ \alpha\in Q_{[0,1]}$, 任取 $\{r_n,n\geqslant 1\}\subseteq Q_{[0,\alpha)}$, $r_n\leqslant r_{n+1}$ 且 $r_n\nearrow\alpha$, 则 $\forall\ A\in\mathscr{A}$, 有

$$\int_A f_\alpha dm = m_\alpha(A) = \lim_{r_n\to\alpha} m_{r_n}(A)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_A f_{r_n}dm = \bigvee_{r\in Q_{[0,\alpha)}}\int_A f_r dm$$

$$= \int_A \Big(\bigvee_{r\in Q_{[0,\alpha)}} f_r\Big)dm.$$

故 $\forall\ \alpha\in Q_{[0,1]}$, $f_\alpha=\bigvee_{r\in Q_{[0,\alpha)}} f_r,(a.e)$. 如果相应在 m 的零测集上适当调整 $f_\alpha(x)$ 的值, 可使 $\forall\ x\in X, f_0(x)=0, f_1(x)=1$, $\forall\ \alpha\in Q_{[0,1]}$, $f_\alpha(x)=\bigvee_{r\in Q[0,\alpha)} f_r(x)$.

(4)　如果以 $Q_{[0,\alpha]}$ 表示 $[0,\alpha]$ 中全体有理数, 令

$$h_\alpha = \bigvee_{r\in Q_{[0,\alpha]}} f_r, \qquad \forall\ \alpha\in[0,1].$$

则当 $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$ 时, $h_\alpha\leqslant h_\beta$. 而且 $h_\alpha=h_{\alpha-0}$. 再由 $f_r\in\zeta(\mathscr{A})$, 知 $h_\alpha\in\zeta(\mathscr{A})$, 而且 $\forall\ A\in\mathscr{A}$, 有

$$m_\alpha(A) = \int_A f_\alpha dm = \int_A h_\alpha dm.$$

如果令 $q_x(\alpha)=h_\alpha(x)$, $\forall\ \alpha\in I, x\in X$. 则 $q_x(0)=0, q_x(1)=1$, 而且 $q_x(\cdot)$ 在 $I=[0,1]$ 上单调不减且左连续, 故 $\forall\ x\in X$, $q_x(\cdot)$ 是分布函数. 因此, $q_x(\cdot)$ 在 $\langle[0,1),\mathscr{B}[0,1)\rangle$ 上产生唯一的概率测度 Q_x, 使当 $\alpha,\beta\in I,\alpha<\beta$ 时, 有

$$Q_x([\alpha,\beta)) = q_x(\beta)-q_x(\alpha).$$

(5)　如果令 $K(x,B)=Q_x(B)$, $\forall\ x\in X, B\in\mathscr{B}_{[0,1)}$, 显然, $\forall\ x\in$

$X, K(x,\cdot)$是$\mathscr{B}_{[0,1)}$上的概率测度，下面证$\forall B\in\mathscr{B}_{[0,1)}, K(\cdot,B)$是$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的可测函数，从而，$K$是马尔科夫核. 令

$$\mathscr{D}=\{B\in\mathscr{B}_{[0,1)}\,|\,K(\cdot,B)\text{ 是}\langle X,\mathscr{A}\rangle\text{ 上的可测函数}\},$$

欲证$\mathscr{D}$是σ代数且$\mathscr{B}_{[0,1)}=\mathscr{D}$.

事实上，$K(x,[0,1))=Q_x([0,1))=1, \forall x\in X$，从而$[0,1)\in\mathscr{D}$，

$\forall A,B\in\mathscr{D}, B\subseteq A\Rightarrow A,B\in\mathscr{B}_{[0,1)}, K(\cdot,A)$与$K(\cdot,B)$在$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上可测

$$\Rightarrow A\text{-}B\in\mathscr{B}_{[0,1)}, K(\cdot A\text{-}B)=K(\cdot A)\text{-}K(\cdot B)\text{ 在}\langle X,\mathscr{A}\rangle\text{ 上可测}$$

$$\Rightarrow A\text{-}B\in\mathscr{D}$$

$$\forall\ \{A_n, n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{D}, A_n\leqslant A_{n+1}$$

$$\Rightarrow\{A_n,n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{B}_{[0,1)}, \forall\ n\geqslant 1, K(\cdot,A_n)\text{ 在}\langle X,\mathscr{A}\rangle\text{ 上可测}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{B}_{[0,1)}, K(\cdot\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}K(\cdot A_n)\text{ 在}\langle X,\mathscr{A}\rangle\text{ 上可测}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{D}$$

则$\mathscr{D}$是λ系. 令

$$\mathscr{E}=\{[\alpha,\beta)\,|\,0\leqslant\alpha\leqslant\beta<1\}.$$

由于

$$K(x,[\alpha,\beta))=Q_x([\alpha,\beta))=q_x(\beta)-q_x(\alpha)=h_\beta(x)-h_\alpha(x)$$

以及$h_\alpha(\cdot)$与$h_\beta(\cdot)$的可测性，知$\mathscr{E}\subseteq\mathscr{D}$. 显然，$\mathscr{E}$对于交运算封闭. 因而，$\mathscr{E}$是$\pi$系. 因此，由单调类定理(即$\lambda$系方法)知，$\sigma(\mathscr{E})=\mathscr{B}_{[0,1)}\subseteq\mathscr{D}$. 显然，$\mathscr{D}\subseteq\mathscr{B}_{[0,1)}$. 从而得证$\mathscr{D}$为$\sigma$代数且$\mathscr{D}=\mathscr{B}_{[0,1)}$.

(6) 设$h\in M(\mathscr{A})$即$h(x)=\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i\wedge\chi_{A_i}(x)), \forall x\in X$，其中$\{A_i, i=1,2,\cdots,n\}$是$X$的$\mathscr{A}$可测分划，$\{\alpha_i, i=1,2,,\cdots,n\}\subseteq I$，则

$$\underset{\sim}{m}(h)=\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{m}(\alpha_i\wedge\chi_{A_i})=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}h_{\alpha_i}(x)dm$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} K[x, [0, \alpha_i)]dm$$

$$= \int \sum_{i=1}^{n} K(x, [0, \alpha_i))\chi_{A_i}(x)dm$$

$$= \int K(x, [0, h(x)))dm.$$

如果 $h \in \zeta(\mathscr{A})$，则在 $M(\mathscr{A})$ 中存在单调不减序列 $\{h_n, n \geq 1\}$，使得 $h_n \nearrow h$. 于是

$$\underset{\sim}{m}(h) = \lim_{n\to\infty} m(h_n) = \lim_{n\to\infty} \int K(x, [0, h_n(x)))dm$$

$$= \int K(x, [0, h(x)))dm$$

(7) 由于 f_a 在 m 意义下被 a, e 唯一确定，从而，K 在 m 意义下也被 a, e 唯一确定. 证毕.

定理 4.17 设 $\langle X, \mathscr{A} \rangle$ 是可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的非负实值函数，$\underset{\sim}{m}(0) = 0$，$\underset{\sim}{m}(1) < +\infty$，$\forall A \in \mathscr{A}$，记 $m(A) = \underset{\sim}{m}(\chi_A)$. 任给 $\lambda > 0$，则下列各命题相互等价.

(1) $\underset{\sim}{m}$ 为 H_λ 型 F 测度.

(2) 记 $\underset{\sim}{m}^*(\cdot) = \ln[1 + \lambda \underset{\sim}{m}(\cdot)]$，$\underset{\sim}{m}^*$ 为 H 型 F 测度.

(3) $\underset{\sim}{m}$ 为 S_λ 型 F 测度且 $\forall \alpha \in I, h \in \zeta(\mathscr{A})$ 有 $\underset{\sim}{m}(ah) = \alpha \overset{\lambda}{\cdot} \underset{\sim}{m}(h)$.

(4) $\underset{\sim}{m}$ 为 S_λ 型 F 测度且 $\forall \alpha \in I, A \in \mathscr{A}$ 有 $\underset{\sim}{m}(\alpha\chi_A) = \alpha \overset{\lambda}{\cdot} m(A)$.

(5) $\underset{\sim}{m}(h) = \int^{\lambda} hdm, \qquad \forall h \in \zeta(\mathscr{A})$.

证明 (1)⇒(2) 由定理 4.11，立即得证.

(2)⇒(3) 由定理 4.14 知，$\underset{\sim}{m}^*$ 为 Z 型 F 测度且 $\forall \alpha \in I$，$h \in \zeta(\mathscr{A})$，

$$\underset{\sim}{m}^*(\alpha h)=\alpha\cdot\underset{\sim}{m}^*(h).$$

再由本节推论 3 知，m 为 S_λ 型 F 测度且

$$\underset{\sim}{m}(\alpha h)=\frac{1}{\lambda}[e^{\underset{\sim}{m}^*(\alpha h)}-1]=\frac{1}{\lambda}[e^{\alpha\underset{\sim}{m}^*(h)}-1]$$

$$=\frac{1}{\lambda}[e^{\ln[1+\lambda\underset{\sim}{m}(h)]^\alpha}-1]=\frac{1}{\lambda}[(1+\lambda\underset{\sim}{m}(h))^\alpha-1]$$

$$=\alpha\overset{\lambda}{\cdot}\underset{\sim}{m}(h).$$

(3)⇒(4)　显然.

(1)⇒(2)　由于 $\underset{\sim}{m}$ 为 S_λ 型 F 测度，由此，知 $\underset{\sim}{m}^*$ 为 Z 型 F 测度且 $\forall\ \alpha\in I,A\in\mathscr{A}$，有

$$\underset{\sim}{m}^*(\alpha\chi_A)=\ln[1+\lambda\underset{\sim}{m}(\alpha\chi_A)]=\ln[1+\lambda(\alpha\overset{\lambda}{\cdot}m(A))].$$

$$=\ln\left\{1+\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}[(1+\lambda m(A))^\alpha-1]\right\}$$

$$=\ln[1+\lambda m(A)]^\alpha=\alpha\ln[1+\lambda m(A)]$$

$$=\alpha m^*(A).$$

再由定理 4.14 知，$\underset{\sim}{m}^*$ 为 H 型 F 测度.

(2)⇒(5)　由定理 4.14 知，$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$，

$$\underset{\sim}{m}^*(h)=\int hdm^*$$

从而，由定理 2.5 知

$$\underset{\sim}{m}(h)=\frac{1}{\lambda}[e^{\underset{\sim}{m}^*(h)}-1]=\frac{1}{\lambda}[e^{\int hdm^*}-1]$$

$$=\int^\lambda hdm.$$

(5)⇒(1)　由本节例 4 即得所欲证. 证毕.

利用定理 2,5、定理 4,15、定理 4,16 与本节推论 3 可以证明下述定理.

定理 4.18 设$\langle X,\mathscr{A}\rangle$是可测空间，$\underset{\sim}{m}$为$\zeta(\mathscr{A})$上的非负实值函数，$\underset{\sim}{m}(0)=0$，$\underset{\sim}{m}(1)<+\infty$，$\forall A\in\mathscr{A}$，记$m(A)=\underset{\sim}{m}(\chi_A)$. 任给$\lambda>0$. 则下列各命题相互等价.

(1) $\underset{\sim}{m}$为S_λ型F测度.

(2) 记$\underset{\sim}{m}^*(\cdot)=\ln[1+\lambda m(\cdot)]$，$\underset{\sim}{m}^*$为$Z$型$F$测度.

(3) 在m意义下存在$a.e$唯一确定的马尔科夫核K，使得

$$\underset{\sim}{m}(h)=\int^{\lambda}K[x,[0,h(x))]dm,\qquad \forall h\in\zeta(\mathscr{A})$$

注 如果$\underset{\sim}{m}$为Z型(或S_λ型)F测度，且$\underset{\sim}{m}(1)<+\infty$，即可将$\underset{\sim}{m}(h)$表成$\underset{\sim}{m}(h)=\int K[x,[0,h(x))]dm$ (或$\underset{\sim}{m}(h)=\int^{\lambda}K[x,[0,h(x))]dm$)，当且仅当在$m$意义下，$a,e$适合$\forall\lambda\in I$，$K[x,[0,\lambda)]=K[x,[0,1)]\lambda=\lambda$时，$\underset{\sim}{m}$为$H$型(或$H_\lambda$)$F$测度.

§5 F 可测映射

设$R=(-\infty,+\infty)$，$R^+=[0,+\infty)$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{B}^+$分别表示R与R^+上的Borelσ代数.

定义 5.1 设$\langle X,\mathscr{A}\rangle$是可测空间.

(1) 设$\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{R}^+$是$\underset{\sim}{X}$到$\underset{\sim}{R}^+$的$F$映射，即$\forall x\in X$，$g(x,\cdot)$是$(0,1]$到$(0,1]$的单调不减的连续函数，且$\lim\limits_{x\to0+}g(x,\lambda)=0$. 称$\underset{\sim}{f}=(f,g)$为**非负(实值)$F$函数**.

如果$f:X\to R^+$为非负可测函数，即$f^{-1}(\mathscr{B}^+)\subseteq\mathscr{A}$，且$\forall\lambda\in(0,1]$，$g(\cdot,\lambda):X\to[0,1]$为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的可测函数，则称$\underset{\sim}{f}$为**非负$F$可测函数**.

(2) 设 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{R}$ 是 $\underset{\sim}{X}$ 到 $\underset{\sim}{R}$ 的 F 映射，称 $\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为(实值)F 函数. 进而，如果 $f:X\to R$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的可测函数，且 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$g(\cdot,\lambda):X\to(0,1]$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的可测函数，则称 $\underset{\sim}{f}$ 为 **F 可测函数**.

更一般的情况，我们有

定义 5.2 设 $\langle X_1,\mathscr{A}_2\rangle$，$\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$ 是两个可测空间，$\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}_1\to\underset{\sim}{X}_2$ 是 F 映射. 如果 f 为 $\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$ 到 $\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$ 的可测映射，且 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$g(\cdot,\lambda):X_1\to[0,1]$ 是 $\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$ 上的可测函数，则称 $\underset{\sim}{f}$ 为 $\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$ 到 $\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$ 的 F 可测映射. 在不混淆时，简称为 **F 可测映射**.

定理 5.1 设 $\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$，$\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$ 是两个可测空间，$\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}_1\to\underset{\sim}{X}_2$ 是 F 映射. 则下列各命题相互等价.

(1) f 是 $\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$ 到 $\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$ 的 F 可测映射

(2) $\forall\ B\in\zeta(\mathscr{A}_2)$，$\underset{\sim}{f}^{-1}(B)\in\zeta(\mathscr{A}_1)$.

(3) $\forall\ B\in M(\mathscr{A}_2)$，$f^{-1}(B)\in\zeta(\mathscr{A}_1)$.

(4) $\forall\ B^\circ\in\mathscr{A}_2$，$a\in(0,1]$，$\underset{\sim}{f}^{-1}(aB^\circ)\in\zeta(\mathscr{A}_1)$.

证明 (1)⇒(2) $\forall\ B\in\zeta(\mathscr{A}_2)$，$\lambda\in(0,1]$，由定理 3.1 知

$$B_{(f,g_\lambda)}=\{y\in X_2\,|\,g(x,\lambda)\leqslant B(y),x\in f^{-1}(y)\},$$

如果 $B_{(f,g_\lambda)}=\varnothing$，显然，有

$$[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]_\lambda=f^{-1}[B_{(f,g_\lambda)}]=\varnothing\in\mathscr{A};$$

如果 $B_{(f,g_\lambda)}\neq\varnothing$，则

$$\begin{aligned}[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]_\lambda&=\{x\in X\,|\,g(x,\lambda)\leqslant B[f(x)]\}\\&=\{x\in X\,|\,g(x,\lambda)>B[f(x)]\}'.\end{aligned}$$

其中

$$\{x\in X\,|\,g(x,\lambda)>B[f(x)]\}$$

$$= \bigcup_{\lambda \in Q \cap (0,1]} [\{x \in X | g(x,\lambda) > r\} \cap \{x \in X | B[f(x)] < r\}].$$

由于 $g(\cdot\ \lambda)$ 为 $\langle X, \mathscr{A}_1 \rangle$ 上的可测函数，$B \in \zeta(\mathscr{A}_2)$ 且 f 为 $\langle X_1, \mathscr{A}_1 \rangle$ 到 $\langle X_2, \mathscr{A}_2 \rangle$ 的可测映射，从而，$B[f(\cdot)] = (B \circ f)(\cdot)$ 为 $\langle X_1, \mathscr{A}_1 \rangle$ 上的可测函数，于是，$\{x \in X_1 | g(x,\lambda) > r\} \in \mathscr{A}_1$，$\{x \in X_1 | B[f(x)] < r\} \in \mathscr{A}_1$. 则

$$\{x \in X_1 | g(x,\lambda) > B[f(x)]\} \in \mathscr{A}_1,$$

于是

$$[\underset{\sim}{f}^{-1}(B)]_\lambda = \{x \in X_1 | g(x,\lambda) > B[f(x)]\}' \in \mathscr{A}_1.$$

即已证明 $\underset{\sim}{f}^{-1}(B) \in \zeta(\mathscr{A}_1)$.

(2)⇒(3)⇒(4) 显然.

(4)⇒(1) 如果 $\forall B^\circ \in \mathscr{A}_2, \alpha \in (0,1]$，$\underset{\sim}{f}^{-1}(\alpha B^\circ) \in \zeta(\mathscr{A}_1)$，特别取 $\alpha = 1$ 时，有 $\underset{\sim}{f}^{-1}(\chi_{B^\circ}) \in \zeta(\mathscr{A}_1)$，则对任给的 $\lambda \in (0,1]$，

$$\begin{aligned} f^{-1}(B^\circ) &= \{x \in X_1 | f(x) \in B^\circ\} \\ &= \{x \in X_1 | \chi_{B^\circ}[f(x)] = 1\} \\ &= \{x \in X_1 | g(x,\lambda) \leqslant \chi_{B^\circ}[f(x)] = 1\} \\ &= [\underset{\sim}{f}^{-1}(\chi_{B^\circ})]_\lambda \in \mathscr{A}, \end{aligned}$$

于是，f 为 $\langle X_1, \mathscr{A}_1 \rangle$ 到 $\langle X_2, \mathscr{A}_2 \rangle$ 的可测映射，又

$$\begin{aligned} \{x \in X | g(x,\lambda) \leqslant \alpha\} &= \{x \in X_1 | g(x,\lambda) \leqslant (\alpha X_2)[f(x)]\} \\ &= [\underset{\sim}{f}^{-1}(\alpha X_2)]_\lambda \in \mathscr{A}_1. \end{aligned}$$

于是，$g(\cdot,\lambda): X_1 \to (0,1]$ 是 $\langle X_1, \mathscr{A}_1 \rangle$ 上的可测函数. 由定义 5.2 知，$\underset{\sim}{f} = (f,g)$ 为 $\langle X_1, \mathscr{A}_1 \rangle$ 到 $\langle X_2, \mathscr{A}_2 \rangle$ 的 F 可测映射. 证毕.

推论 1 设 $\langle X_1, \mathscr{A}_1 \rangle$，$\langle X_2, \mathscr{A}_2 \rangle$ 是两个可测空间，$\underset{\sim}{f} = (f,g)$: $\underset{\sim}{X}_1 \to \underset{\sim}{X}_2$ 是 F 映射且 $g: (0,1] \to (0,1]$. 则 $\underset{\sim}{f}$ 为 F 可测映射的充要条件是 $f: X_1 \to X_2$ 为可测映射.

推论 2 设 $\langle X_1, \mathscr{A}_1 \rangle$，$\langle X_2, \mathscr{A}_2 \rangle$ 是两个可测空间，$\underset{\sim}{f} = (f,g)$ 是

$\underset{\sim}{X}_1$ 到 $\underset{\sim}{X}_2$ 的 F 映射. 如果存在某个 $y\in X_2$，使得 $f(x)\equiv y, \forall\ x\in X_1$. 则 $\underset{\sim}{f}$ 为 F 可测映射的充要条件是 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$g(\cdot,\lambda)$ 为 X_1 到 $(0,1]$ 的 $\mathscr{A}_1$ 可测函数.

引理 5.1　设 $g: X\to(0,1]$ 为 X 到 $(0,1]$ 的保序下满映射. $\forall\ h\in\mathscr{F}(X)$，令

$$h_g(x)=g_x[h(x)]=\begin{cases}g(x,h(x)), & x\in \mathrm{Supp}h,\\ 0, & x\overline{\in}\mathrm{Supp}h.\end{cases}$$

则 $h_g\in\mathscr{F}(X)$，且 $\forall\ \{h_n, n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{F}(X)$，有

$$(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)_g=\bigvee_{n=1}^{\infty}(h_n)_g, (\bigwedge_{n=1}^{\infty}h_n)_g=\bigwedge_{n=1}^{\infty}(h_n)_g.$$

证明　由第三章定理 2.3 知，$\forall\ x\in X$，有

$$(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)_g(x)=g_x[(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)(x)]=\bigvee_{n=1}^{\infty}g_x[h_n(x)]=[\bigvee_{n=1}^{\infty}(h_n)_g](x)$$

$$\text{则}(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)_g=\bigvee_{n=1}^{\infty}(h_n)_g$$

另一等式同理可证. 证毕.

定理 5.2　设 $\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$ 为两个可测空间，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$ 到 $\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$ 的 F 可测映射，则 $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$，有 $h_g\in\zeta(\mathscr{A})$.

证明　首先，$\forall\ \lambda\in(0,1]$，令

$$\lambda_g(x)=g_x(\lambda), \forall\ x\in X.$$

显然有 $\lambda_g\in\zeta(\mathscr{A}_1)$.

其次，$\forall\ h=\bigvee_{i=1}^{n}a_iA_i\in M(\mathscr{A}_1)$，则由引理 5.1 知

$$h_g(x)=\bigvee_{i=1}^{n}(a_iA_i)_g(x), \forall\ x\in X.$$

其中 $\forall\ i\in\{1,\cdots,n\}$，$(a_iA_i)_g(x)=[(a_i)_g\chi_{A_i}](x)$. 于是，$h_g=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i)_g\chi_{A_i}$ 从而，得 $h_g\in\zeta(\mathscr{A}_1)$.

最后，$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A}_1)$，则在 $M(\mathscr{A}_1)$ 中存在单调不减序列 $\{h_n, n$

$\geqslant 1\}$合于 $h=\lim\limits_{n\to\infty} h_n=\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} h_n$，由引理 5.1 知，$h_g=\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}(h_n)_g$. 从而，$h_g\in\zeta(\mathscr{A})$. 证毕.

定理 5.3 设$\langle X_i,\mathscr{A}_i\rangle$，$i=1,2,3$，为三个可测空间，$\underset{\sim}{f}_1=(f_1,g_1)$为$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$到$\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$的 F 可测映射，$\underset{\sim}{f}_2=(f_2,g_2)$为$\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$到$\langle X_3,\mathscr{A}_3\rangle$的 F 可测映射. 令 $f=f_2\circ f_1$，$g=g_2\circ \underset{\sim}{f}_1$，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$，则

(1) $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A}_1)$，令

$$h_{(f_1,g_2)}(x)=\begin{cases} g_2(f_1(x),h(x)), & x\in \operatorname{supp}h,\\ 0, & x\overline{\in}\operatorname{supp}h.\end{cases}$$

那么，$h_{(f_1,g_2)}\in\zeta(\mathscr{A}_1)$.

(2) $\underset{\sim}{f}$为$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$到$\langle X_3,\mathscr{A}_3\rangle$的 F 可测映射.

(3) $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$，$h_g=(h_{g_1})_{(f_1,g_2)}\in\zeta(\mathscr{A}_1)$.

证明 (1) 由于 $f_1(\cdot)$为$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$到$\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$的可测映射，且$\forall\ \alpha\in(0,1]$. $g_2(\cdot,\alpha)$为$\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$上的可测函数，则 $g_2(f_1(\cdot),\alpha)$为$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$上的可测函数，且$\forall\ x\in X_1$，$g_2(f_1(x),\alpha)\in(0,1]$. 因此，如果令 $\alpha_{(f_1,g_2)}(\cdot)=g_2(f_1(\cdot),\alpha)$则 $\alpha_{(f_1,g_2)}\in\zeta(\mathscr{A}_1)$，显然当 $\alpha=0$ 时，$h_{(f_1,g_2)}=0\in\zeta(\mathscr{A}_1)$.

$\forall\ A\in\mathscr{A}_1$，$\alpha\in(0,1]$. 容易验证，$(\alpha A)_{(f_1,g_2)}=\alpha_{(f_1,g_2)}\chi_A\in\zeta(\mathscr{A}_1)$. 利用定理 5.2 证明中相似的方法，即可得$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A}_1)$，$h_{(f_1,g_2)}\in\zeta(\mathscr{A}_1)$.

(2) 由于 f_1 与 f_2 的可测性，知 $f=f_2\circ f_1$ 为$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$到$\langle X_3,\mathscr{A}_3\rangle$的可测映射. 又$\forall\ \lambda\in(0,1]$，由定理 5.2 知，$\lambda_{g_1}\in\zeta(\mathscr{A}_1)$，再由(1)知，$(\lambda_{g_1})_{(f_1g_2)}\in\zeta(\mathscr{A}_1)$. 从而，$g_2(f_1(\cdot),g_1(\cdot,\lambda))=(\lambda_{g_1})_{(f_1,g_2)}(\cdot)$为$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$上的可测函数，即 $g(\cdot,\lambda)=(g_2\circ\underset{\sim}{f}_1)(\cdot)$：$X_1\to(0,1]$为$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$上的可测函数. 再根据定义 5.2

知，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$为$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$到$\langle X_3,\mathscr{A}_3\rangle$的 F 可测映射.

(3)$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A}_1)$. 容易验证，$h_g=(h_{g_1})_{(f_1,g_2)}$. 再由 $h_{g_1}\in\zeta(\mathscr{A}_1)$ 与(1)，知 $h_g\in\zeta(\mathscr{A}_1)$. 证毕.

引理 5.2　设 X_1,X_2 是两个非空集合，$\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}_1\to\underset{\sim}{X}_2$ 为 $\underset{\sim}{X}_1$ 到 $\underset{\sim}{X}_2$ 的 F 映射. 令 $g^*=(i_{X_1},g):\underset{\sim}{X}_1\to\underset{\sim}{X}_1$，$f^*=(f,i_{(0,1]}):\underset{\sim}{X}_1\to\underset{\sim}{X}_2$. 其中 $i_{X_1}(x)=x,\forall\ x\in X$；$i_{(0,1]}(\lambda)=\lambda,\forall\ \lambda\in(0,1]$. 则 $\underset{\sim}{f}=f^*\circ g^*$，而且$\forall\ h\in\mathscr{F}(X_1)$，$g^*(h)=h_g$.

证明是简单的，从略.

定理 5.4　设$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$，$\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$是两个可测空间，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 是 X_1 到 X_2 的 F 映射.

(1)　$\underset{\sim}{f}$为$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$到$\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$的 F 可测映射的充要条件是 g^* 是$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$到$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$的 F 可测映射，且 f^* 是$\langle X_1,\mathscr{A}_1\rangle$到$\langle X_2,\mathscr{A}_2\rangle$的 F 可测映射.

(2)　如果 $g^*:\underset{\sim}{X}_1\to\underset{\sim}{X}_1$ 为 F 可测映射，则$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A}_1)$，$g^*(h)\in\zeta(\mathscr{A}_1)$.

证明　由引理 5.2 与定理 5.3 立即得证. 证毕.

定义 5.3　设 X 是非空集合，$\{\underset{\sim}{f}_n=(f_n,g_n):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{R}\}$是 F 函数序列. 如果存在 F 函数 $\underset{\sim}{f}=(f,g):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{R}$ 适合$\forall\ (x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}$，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ \lim_{n\to\infty}g_n(x,\lambda)=g(x,\lambda).$$

则称$\{\underset{\sim}{f}_n\}$收敛于 $\underset{\sim}{f}$，记作$\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{f}_n=\underset{\sim}{f}$.

定理 5.5　设$\{\underset{\sim}{f}_n=(f_n,g_n):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{R}\}$是 F 函数序列，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$为 $\underset{\sim}{X}$ 到 $\underset{\sim}{R}$ 的映射. 如果$\forall\ x\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ 且$\{g_n(x,\cdot)\}$在$(0,1]$上一致收敛于 $g(x,\cdot)$，则 $\underset{\sim}{f}$为 F 函数且$\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{f}_n=\underset{\sim}{f}$.

证明　因为$\forall\ x\in X$，

$$(g_n)_x(\lambda)=\begin{cases}g_n(x,\lambda), & \lambda\in(0,1],\\ 0, & \lambda=0,\end{cases}$$

$$g_x(\lambda)=\begin{cases} g(x,\lambda), & \lambda\in(0,1], \\ 0, & \lambda=0. \end{cases}$$

则$\{g_n(x,\cdot)\}$在$(0,1]$上一致收敛于$g(x,\cdot)\Leftrightarrow\{(g_n)_x(\cdot)\}$在$[0,1]$上一致收敛于$g_x(\cdot)$. 由于$\forall\ n\geqslant 1,(g_n)_x(\cdot)$为$[0,1]$上的单调不减的连续函数,于是$g_x(\cdot)$为$[0,1]$上的单调不减的连续函数,所以$g(x,\cdot)$是$(0,1]$到$(0,1]$的单调不减的连续函数. 而且$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}g(x,\lambda)=g_x(0)=0$. 因此,$\underset{\sim}{f}=(f,g)$为$F$函数,而且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$,$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x,\lambda)=g(x,\lambda)$,$\forall\ (x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}$. 根据定义 5.3,即得$\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{f}_n=\underset{\sim}{f}$. 证毕.

注　即使$\forall\ x\in X,\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f,g_n(x,\cdot)$在$(0,1]$上一致收敛,也不能得保证$\{\underset{\sim}{f}_n\}$的收敛性. 例如令$g_n(x,\lambda)=\dfrac{1}{n},\forall\ (x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}$,显然,$\forall\ x\in X,g_n(x,\cdot)$在$(0,1]$上一致收敛,但$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x,\lambda)=0,\forall\ (x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}$. 因此,定理 5.5 中还要求满足$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x,\lambda)\in(0,1],\forall\ (x,\lambda)\in\underset{\sim}{X}$.

定理 5.6　设$\{\underset{\sim}{f}_n=(f_n,g_n):\underset{\sim}{X}\to\underset{\sim}{R}\}$是可测空间$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的$F$可测函数序列,$\underset{\sim}{f}=(f,g)$为$\underset{\sim}{X}$到$\underset{\sim}{R}$的$F$函数,而且$\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{f}_n=\underset{\sim}{f}$. 则$\underset{\sim}{f}$是$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的$F$可测函数.

证明　由$\underset{\sim}{f}_n$的F可测性知,$f_n(\cdot)$为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的可测函数,且$\forall\ \lambda\in(0,1],g_n(\cdot,\lambda):X\to(0,1]$为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的可测函数. 因此,$f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$与$\forall\ \lambda\in(0,1],g(\cdot,\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(\cdot,\lambda)$均为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的可测函数,所以$\underset{\sim}{f}$是$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的$F$可测函数. 证毕.

定义 5.4　设$\underset{\sim}{f}_1=(f_1,g_1),\underset{\sim}{f}_2=(f_2,g_2)$是两个$\underset{\sim}{X}$到$\underset{\sim}{R}$的$F$函数且$g_1=g_2=g$. 给定$*\in\{\vee,\wedge,+,-,\cdot\}$,界定

$$\underset{\sim}{f}_1 * \underset{\sim}{f}_2 = (f_1 * f_2, g),$$

而且$\forall\ c\in R$,界定

$$c\underset{\sim}{f}_1 = (cf_1, g_1), c \wedge \underset{\sim}{f}_1 = (c \wedge f_1, g_1), c \vee \underset{\sim}{f}_1 = (c \vee f_1, g_1).$$

如果 $\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\underset{\sim}{X}$ 到 $\underset{\sim}{R}$ 的 F 函数,f^+ 与 f^- 分别表示 f 的正部与负部,即 $f^+=f\cdot\chi_{(f\geqslant 0)}$, $f^-=(-f)\cdot\chi_{(f<0)}$,且令 $\underset{\sim}{f}^+=(f^+, g)$, $\underset{\sim}{f}^-=(f^-, g)$,则

$$|\underset{\sim}{f}| \triangleq \underset{\sim}{f}^+ + \underset{\sim}{f}^- \qquad \underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{f}^+ - \underset{\sim}{f}^-.$$

定理 5.7　设$\langle X,\mathscr{A}\rangle$为可测空间,$\underset{\sim}{f}_1=(f_1,g)$,$\underset{\sim}{f}_2=(f_2,g)$为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的 F 可测函数,$c\in R$,则$\forall\ *\in\{\vee,\wedge,+,-,0\}$,$\underset{\sim}{f}_1 * \underset{\sim}{f}_2$ 为 F 可测函数且 $c\underset{\sim}{f}_1$,$c\wedge\underset{\sim}{f}_1$,$c\vee\underset{\sim}{f}_1$ 为 F 可测函数.

证明是简单的,请读者自证.

推论 1　F 函数 $\underset{\sim}{f}=(f,g)$为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的 F 可测函数,当且仅当 $\underset{\sim}{f}^+$与 $\underset{\sim}{f}^-$为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的 F 可测函数.

推论 2　如果 $\underset{\sim}{f}=(f,g)$是$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的 F 可测函数,则$|\underset{\sim}{f}|$是$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的 F 可测函数.

§6　F 积分

本节把积分概念推广,讨论几种类型的模糊积分.为此,先引入派生半测度和派生测度的概念.

定义 6.1　设$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$是 F 可测空间,$\underset{\sim}{m}$ 是 $\zeta(\mathscr{A})$上的 F 半测度,任给 $h\in\zeta(\mathscr{A})$,记

$$m_h(A) \triangleq \underset{\sim}{m}(h \wedge \chi_A), \qquad \forall\ A\in\mathscr{A}$$

称 m_h 为 h 的**派生半测度**.如果进一步 $\underset{\sim}{m}$ 为 $*$ 型 F 测度,其中 $*\in$

$\{Z,H,S,S_\lambda,H_\lambda;\lambda>0\}$,则统称 m_h 为 h 的**派生测度**.

显然有

定理 6.1 (1) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 F 半测度,则 m_h 为 $\mathscr{A}$ 上的半测度.

(2) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 Z 型(或 H 型)F 测度,则 m_h 为 $\mathscr{A}$ 上的测度.

(3) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 S 型 F 测度,则 m_h 为 $\mathscr{A}$ 上的 S 型测度.

(4) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 S_λ 型(或 H_λ 型)F 测度,则 m_h 为 $\mathscr{A}$ 上 S_λ 型测度.

定理 6.2 (1) $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$,$m_h\ll m$(其中 $m(A)=\underset{\sim}{m}(\chi_A)$,$A\in\mathscr{A}$),即若 $E\in\mathscr{A}$,$m(E)=0$,则 $m_h(E)=0$.

(2) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 H 型 F 测度,$h\in\zeta(\mathscr{A})$,则

$$m_h(A)=\int_A h dm,\qquad \forall\ A\in\mathscr{A}.$$

因此,在 m 意义下,有 $a.e$ 唯一确定的拉东—尼古丁导数(R-N 导数)

$$\frac{dm_h}{dm}=h.$$

(3) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 Z 型 F 测度,则在 m 意义上,存在 a,e 唯一确定的马尔科夫核 K,使得对于 $h\in\zeta(\mathscr{A})$,有

$$m_h(A)=\int_A K[(x,[0,h(x))]dm,\qquad \forall\ A\in\mathscr{A}$$

因此,在 m 意义下,有 $a.e$ 唯一确定的 R-N 导数

$$\frac{dm_h}{dm}(x)=K[x,[0,h(x))],\quad (x\in X,a.e)$$

定义 6.2 设$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$为 F 可测空间. $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的

F 半测度. $\underset{\sim}{f}=(f,g)$为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的非负 F 可测函数,$h\in\zeta(\mathscr{A})$. 则由下式给出的非负(广义)实数

$$S(\underset{\sim}{f},h)=\bigvee_{\alpha\geqslant 0}\{\alpha\wedge\underset{\sim}{m}[h_g\wedge\chi_{(f>\alpha)}]\},$$

称为 F 函数 $\underset{\sim}{f}$ 展布在 h 上关于 F 半测度 $\underset{\sim}{m}$ 的 S 型积分,简称为 $\underset{\sim}{f}$ 在 h 上的 **S 型 F 积分**,记作 $\int_h\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}$.

由定义 6.2 立即可得下列定理(证明方法与 §2 中相应定理相似).

定理 6.3　设$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$是 F 可测空间,$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 F 半测度,$\underset{\sim}{f}=(f,g)$是$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的非负 F 可测函数,$h,h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$. 则下列论断成立.

(1)　$\int_h\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}=\int f\circ m_{h_g}$.

(2)　$\forall\ \alpha\geqslant 0$ 有 $\alpha\wedge m_{h_g}(f>\alpha)\leqslant\int_h\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}\leqslant\alpha\vee m_{h_g}(f>\alpha)$.

(3)　若 $h_1\leqslant h_2$,则$\int_{h_1}\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}\leqslant\int_{h_2}\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}$.

(4)　$\int_{h_1\wedge h_2}\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}\leqslant\int_{h_1}\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}\wedge\int_{h_2}\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}$

$\leqslant\int_{h_1}\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}\vee\int_{h_2}\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}\leqslant\int_{h_1\vee h_2}\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}$.

(5)　$\int_h\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}=+\infty\Leftrightarrow\forall\ \alpha\geqslant 0,m_{h_g}(f>\alpha)=+\infty$.

(6)　$\int_h\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}\leqslant\underset{\sim}{m}(h_g)$.

定理 6.4　设$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$是 F 可测空间,$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 F 半测度,$\underset{\sim}{f}=(f,g)$为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的非负 F 可测函数,$h\in\zeta(\mathscr{A})$. 则

(1)　$\int_h\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}=x_0\Rightarrow\int_h\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}=\bigvee_{\alpha\in[0,x_0]}[\alpha\wedge m_{h_g}(f>\alpha)]$;

(2)　$\int_h\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}=x_0\Leftrightarrow m_{h_g}(f>x_0)\leqslant x_0\leqslant m_{h_g}(f>x_0-0)$;

(3) $\int_h \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{m} = \bigwedge_{\alpha \geqslant 0} [\alpha \vee m_{h_g}(f > \alpha)]$;

(4) $\int_h \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{m} = 0 \Leftrightarrow m_{h_g}(f > 0) = 0$.

定理 6.5 设 $\langle X, \mathscr{A}, \zeta(\mathscr{A})\rangle$ 是 F 可测空间 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 F 半测度. 如果对于 $\langle X, \mathscr{A}\rangle$ 上的任何一个非负 F 可测函数 $\underset{\sim}{f} = (f, g)$, 令

$$S(\underset{\sim}{f}, h) = \int_h \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{m},$$

$$S^*(\underset{\sim}{f}, h) = \bigvee_{\alpha \geqslant 0} [\alpha \wedge m_{h_g}(f \geqslant \alpha)],$$

$$\hat{S}(\underset{\sim}{f}, h) = \bigvee_{A \in \mathscr{A}} \{[\bigwedge_{x \in A} f(x)] \wedge m_{h_g}(A)\}.$$

则 $\hat{S}(\underset{\sim}{f}, h) = S^*(\underset{\sim}{f}, h) = S(\underset{\sim}{f}, h)$.

定理 6.6 设 $\langle X, \mathscr{A}, \zeta(\mathscr{A})\rangle$ 是 F 可测空间, $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 F 半测度, $\{\underset{\sim}{f}_n = (f_n, g_n), n \geqslant 1\}$ 是适合如下条件的非负 F 可测函数序列: $\forall\, n \geqslant 1, f_n \leqslant f_{n+1}, g_n \leqslant g_{n+1}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \underset{\sim}{f}_n = \underset{\sim}{f} = (f, g)$, 则 $\forall\, h \in \zeta(\mathscr{A})$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_h \underset{\sim}{f}_n \circ \underset{\sim}{m} = \int_h \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{m}$$

证明 因为 $\forall\, n \geqslant 1, h_{g_n} \leqslant h_g$, 且 $\forall\, \alpha \geqslant 0$, 有 $(f_n > \alpha) \subseteq (f > \alpha)$, 则

$$\int_h \underset{\sim}{f}_n \circ \underset{\sim}{m} = \bigvee_{\alpha \geqslant 0} \{\alpha \wedge \underset{\sim}{m}[h_{g_n} \wedge (f_n > \alpha)]\}$$

$$\leqslant \bigvee_{\alpha \geqslant 0} \{\alpha \wedge \underset{\sim}{m}[h_g \wedge (f > \alpha)]\} = \int_h \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{m}.$$

又 $\forall\, \alpha \geqslant 0$. 当 $n \to \infty$ 时,

$$h_{g_n} \nearrow h_g = \bigvee_{n=1}^{\infty} h_{g_n}, (f_n > \alpha) \nearrow (f > \alpha),$$

则

$$\underset{\sim}{m}[h_{g_n} \wedge \chi_{(f_n > \alpha)}] \nearrow \underset{\sim}{m}[h_g \wedge \chi_{(f > \alpha)}].$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n \circ m \geqslant \alpha \wedge \lim_{n\to\infty} m[h_{g_n} \wedge \chi_{(f_n>\alpha)}]$$
$$= \alpha \wedge m[h_g \wedge \chi_{(f>\alpha)}].$$

所以又有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{h} f_n \circ m \geqslant \int_h f \circ m.$$

综合上述，即得$\lim_{n\to\infty}\int_h f_n \circ m = \int_h f \circ m$. 证毕.

定理 6.7 设$\langle X, \mathscr{A}, \zeta(\mathscr{A})\rangle$是 F 可测空间，m 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 F 半测度. 如果$\{h_n, n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{A})$，且$\forall\ n\geqslant 1, h_n\leqslant h_{n+1}, \lim_{n\to\infty} h_n = h$，则对于任意给定的$\langle X, \mathscr{A}\rangle$上的非负 F 可测函数 $f=(f, g)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{h_n} f \circ m = \int_h f \circ m.$$

证明是简单的，请读者自证.

定理 6.8 设$\langle X, \mathscr{A}, \zeta(\mathscr{A})\rangle$是 F 可测空间，m 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 F 半测度，$f=(f, g)$为$\langle X, \mathscr{A}\rangle$上的非负 F 可测函数，则 $S(f, \cdot)$ 为$\zeta(\mathscr{A})$上的 F 半测度.

证明 显然，$\forall$ h$\in\zeta(\mathscr{A})$，$S(f, h)\geqslant 0$ 且 $S(f, 0)=0$. 再由定理 6.3 与定理 6.6，即得所欲证. 证毕.

定理 6.9 设$\langle X, \mathscr{A}, \zeta(\mathscr{A})\rangle$为 F 可测空间，m 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 S 型 F 测度，$f=(f, g)$为$\langle X, \mathscr{A}\rangle$上的非负 F 可测函数. 则

(1) $\forall\ \{h_n, n\geqslant 1\}\subsetneq\zeta(\mathscr{A})$有$\int_{\bigvee_{n=1}^{\infty} h_n} f \circ m = \bigvee_{n=1}^{\infty}\int_{h_n} f \circ m$.

(2) $S(f, \cdot)$为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 S 型 F 测度.

证明 (1) $$\int_{\bigvee_{n=1}^{\infty} h_n} f \circ m = \bigvee_{\alpha\geqslant 0}\{\alpha \wedge m[(\bigvee_{n=1}^{\infty} h_n)_g \wedge \chi_{(f>\alpha)}]\}$$
$$= \bigvee_{\alpha\geqslant 0}\{\alpha \wedge m[\bigvee_{n=1}^{\infty} (h_n)_g \wedge \chi_{(f>\alpha)}]\}$$

$$=\bigvee_{\alpha\geqslant 0}\{\alpha\wedge[\bigvee_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{m}((h_n)_g\wedge\chi_{(f>\alpha)})]\}$$

$$=\bigvee_{n=1}^{\infty}\{\bigvee_{\alpha\geqslant 0}[\alpha\wedge\underset{\sim}{m}((h_n)_g\wedge\chi_{(f>\alpha)}]\}$$

$$=\bigvee_{n=1}^{\infty}\int_{h_n}\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}.$$

(2) 由(1)与定理6.8,即得所欲证. 证毕.

定理 6.10 设$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$为$F$可测空间,$\underset{\sim}{m}$为$\zeta(\mathscr{A})$上的$S$型$F$测度,$\forall A\in\zeta(\mathscr{A})$记$m(A)=\underset{\sim}{m}(\chi_A)$. 如果$0<m(X)<+\infty$且$\forall\lambda\in(0,1]$,$A\in\mathscr{A}$,有$\underset{\sim}{m}(\lambda A)=\lambda m(X)\wedge m(A)$. 则对于$(X,\mathscr{A})$上任意给的非负$F$可测函数$\underset{\sim}{f}=(f,g)$与任给的$h\in\zeta(\mathscr{A})$,有

$$\int_h\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}=\int(f\wedge m(X)h_g)\circ m.$$

特别,如果$m(X)=1$,则有$\int_h\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}=\int(f\wedge h_g)\circ m.$

证明 因为$h_g=\bigvee_{\lambda\in Q\cap I}\lambda(h_g)_{\lambda}$,由定理所给条件知,$\forall\alpha\geqslant 0$,

$$\underset{\sim}{m}[h_g\wedge\chi_{(f>\alpha)}]=\underset{\sim}{m}[\bigvee_{\lambda\in Q\cap I}(\lambda\wedge\chi_{(h_g)_{\lambda}\cap(f>\alpha)})]$$

$$=\bigvee_{\lambda\in Q\cap I}\{\lambda m(X)\wedge m[(h_g)_{\lambda}\cap(f>\alpha)]\}.$$

则

$$\int_h\underset{\sim}{f}\circ\underset{\sim}{m}=\bigvee_{\alpha\geqslant 0}\{\alpha\wedge\underset{\sim}{m}[h_g\wedge\chi_{(f>\alpha)}]\}$$

$$=\bigvee_{\alpha\geqslant 0}\{\alpha\wedge(\bigvee_{\lambda\in Q\cap I}[\lambda m(X)\wedge m[(h_g)_{\lambda}\cap(f>\alpha)]])\}$$

$$=\bigvee_{\lambda\in Q\cap I}\{m(X)\lambda\wedge\{\bigvee_{\alpha\geqslant 0}[\alpha\wedge m((h_g)_{\lambda}\wedge(f>\alpha)]\}\}$$

$$=\bigvee_{\lambda\in Q\cap I}[m(X)\lambda\wedge(\int_{(h_g)_{\lambda}}f\circ m)].$$

由本章定理1.20,知

$$\int_{(h_g)_{\lambda}}f\circ m=\int[f\wedge m(X)\chi_{(h_g)_{\lambda}}]\circ m.$$

再由 S 型积分的性质，得

$$\int_h \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{m} = \bigvee_{\lambda \in Q \cap I} \{m(X)\lambda \wedge \int [f \wedge m(X)\chi_{(h_g)_\lambda}] \circ m\}$$

$$= \int [f \wedge m(X)(\bigvee_{\lambda \in Q \cap I} \lambda (h_g)_\lambda)] \circ m$$

$$= \int [f \wedge m(X) h_g] \circ m.$$ 证毕.

定理 6.11　设 $\langle X, \mathscr{A}, \zeta(\mathscr{A})\rangle$ 是 F 可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 F 半测度，$h \in \zeta(\mathscr{A})$.

(1)　如果 $\underset{\sim}{f} = (f, g)$ 为 $\langle X, \mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数，$c \in (0, +\infty)$，则

$$\int_h (c \vee \underset{\sim}{f}) \circ \underset{\sim}{m} = (c \vee \int_h \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{m}) \wedge m(h_g);$$

$$\int_h (c \wedge \underset{\sim}{f}) \circ \underset{\sim}{m} = c \wedge \int_h \underset{\sim}{f} \circ \underset{\sim}{m}.$$

(2)　如果 $\{\underset{\sim}{f_n} = (f_n, g_n), n \geqslant 1\}$ 为 $\langle X, \mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数序列，且 $g_n = g_1, \forall\, n > 1$. 界定

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{f_n} = (\bigwedge_{n=1}^{\infty} f_n, g_1), \quad \bigvee_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{f_n} = (\bigvee_{n=1}^{\infty} f_n, g_1),$$

则

$$\int_h (\bigwedge_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{f_n}) \circ \underset{\sim}{m} \leqslant \bigwedge_{n=1}^{\infty} (\int_h \underset{\sim}{f_n} \circ \underset{\sim}{m}) \leqslant \bigvee_{n=1}^{\infty} (\int_h \underset{\sim}{f_n} \circ \underset{\sim}{m}) \leqslant \int_h (\bigvee_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{f_n}) \circ \underset{\sim}{m}$$

进一步，如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 S 型 F 测度，则

$$\int_h (\bigvee_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{f_n}) \circ \underset{\sim}{m} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \int_h \underset{\sim}{f_n} \circ \underset{\sim}{m}.$$

证明　(1)　由定理 6.3(1) 与定理 1.18，立即得证.

(2)　由定理 6.3(1)、(3) 定理 1.10 与定理 1.24 立即得所欲证. 证毕.

定义 6.3　设 $\langle X, \mathscr{A}, \zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为 F 可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的

F 半测度，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数，$h\in\zeta(\mathscr{A})$，$T=\{A_1\cdots A_n\}$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 的任一有限可测分划，令

$$L(\underset{\sim}{f},h,T)=\sum_{i=1}^{n}\left[\bigwedge_{x_i\in A_i}f(x)\right]\cdot\underset{\sim}{m}(h_g\wedge\chi_{A_i}).$$

则由下式给出的非负（广义）实数

$$L(\underset{\sim}{f},h)=\bigvee_{(T)}S(\underset{\sim}{f},h,T)$$

称为 F 函数 $\underset{\sim}{f}$ 展布在 F 集 h 上关于 F 半测度 $\underset{\sim}{m}$ 的 L 型积分，简称为 $\underset{\sim}{f}$ 在 h 上的 **L 型 F 积分**，记作 $\int_h\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}$.

由定义 6.3 立即可证下述定理.

定理 6.12　设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为 F 可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 F 半测度，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数，$h,h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$. 则下列论断成立.

(1)　$\int_h\underset{\sim}{f}dm=\int fdm_{h_g}$.

(2)　$h_1\leqslant h_2\Rightarrow\int_{h_1}\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}\leqslant\int_{h_2}\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}$.

(3)　$\int_{h_1\wedge h_2}\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}\leqslant\int_{h_1}\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}\wedge\int_{h_2}\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}\leqslant\int_{h_1}\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}\vee\int_{h_2}\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}$
$\leqslant\int_{h_1\vee h_2}\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}$.

(4)　$\forall\, c\in[0,+\infty)$，$\int_h c\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}=c\int_h\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}$.

(5)　$\underset{\sim}{m}(h)=0\Rightarrow\int_h\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}=0$.

定理 6.13　设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为 F 可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 F 半测度，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数. 那么，

(1)　如果 $\{h_n,n\leqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{A})$，$h_n\leqslant h_{n+1}$，$\forall\, n\geqslant 1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=h$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{h_n}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{m}\doteq\int_h\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{m}.$$

(2)　$L(f,\cdot)$ 是 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 F 半测度.

定理 6.14　设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 是 F 可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的有限 Z 型 F 测度，$\forall\ A\in\mathscr{A}$，记 $m(A)=\underset{\sim}{m}(\chi_A)$，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数，则 $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$，在 m 意义下存在 $a.e$ 唯一确定的马尔科夫核 K，使得

$$\int_h \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m} = \int f(x)K[x,[0,h_g(x))]dm$$

证明　由于 $\underset{\sim}{m}$ 为 Z 型 F 测度，则 h 的派生测度 m_h 为测度. 再由定理 6.2$m_{h_g}<<m$，且在 m 意义下存在 $a.e$ 唯一确定的马尔科夫核 K，使得 m_{h_g} 的 N-R 导数.

$$\frac{dm_{h_g}}{dm}(x) = K[x,[x,h_g(x))],\quad x\in X,a,e$$

所以

$$\int_h \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m} = \int f(x)dm_{h_g} = \int f(x)K[x,[0,h_g(x))]dm.$$ 证毕

定理 6.15　设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 是 F 可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 H 型 F 测度，$\forall\ A\in\mathscr{A}$，记 $m(A)=\underset{\sim}{m}(\chi_A)$，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数，则 $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$ 有

$$\int_h \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m} = \int f(x)h_g(x)dm.$$

特别，(1)　当 $g:(0,1]\to(0,1]$ 时，$\int_h \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m} = \int f(x)g(h(x))dm$；

(2)　当 $g=i_{(0,1]}$ 时，$\int_h \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m} = \int f(x)h(x)dm$.

证明方法与定理 6.14 相类似，请读者自证.

定理 6.16　设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 是 F 可测空间，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数.

(1)　如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的有限 Z 型 F 测度. 则 $L(\underset{\sim}{f},\cdot)$ 是 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 Z 型 F 测度

(2)　如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 H 型 F 测度，且存在 $E\in\mathscr{A}$ 适合

$\underset{\sim}{m}[\chi_{E\cap(f>0)}]=\underset{\sim}{m}[\chi_{(f>0)}]<+\infty$以及$\forall x\in E,\lambda\in(0,1]$有$g(x,\lambda)=\lambda g(x,1)$，则$L(\underset{\sim}{f},\cdot)$为$\zeta(\mathscr{A})$上的$H$型$F$测度.

证明 (1) 由定理6.13知，$L(\underset{\sim}{f},\cdot)$为$\zeta(\mathscr{A})$上的$F$半测度. 又$\forall h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A}),h_1\wedge h_2=0$，有$(h_1\vee h_2)_g=(h_1)_g\vee(h_2)_g$且$(h_1)_g\wedge(h_2)_g=0$. 从而$\forall x\in X$，有

$$K[x,[0,(h_1\vee h_2)_g(x))]=K[x,[0,(h_1)_g(x))]+K[x,[0,(h_2)_g(x))]$$

则

$$\begin{aligned}L(\underset{\sim}{f},h_1\vee h_2)&=\int f(x)K[x,[0,(h_1\vee h_2)g(x))]dm\\&=\int f(x)K[x,[0,(h_1)_g(x))]dm\\&\quad+\int f(x)K[x,[0,(h_2)g(x))]dm\\&=L(\underset{\sim}{f},h_1)+L(\underset{\sim}{f},h_2)\end{aligned}$$

所以$L(\underset{\sim}{f},\cdot)$为$\zeta(\mathscr{A})$上的$Z$型$F$测度.

(2) 由定理6.13知，$L(\underset{\sim}{f},\cdot)$为$\zeta(\mathscr{A})$上的半测度. 如果记$m$为$\underset{\sim}{m}$在$\mathscr{A}$上的限制，则

$$m[(f>0)-E]=m(f>0)-m[(f>0)\cap E]=0.$$

如果$h_1,h_2\in\zeta(A)$且不相重，则有

$$\begin{aligned}&\int_{(f>0)-E}f(x)(h_1+h_2)_g(x)dm\\&=\int_{(f>0)-E}f(x)[(h_1)_g+(h_2)_g](x)dm=0\end{aligned}$$

又$\forall x\in E$，有

$$\begin{aligned}(h_1+h_2)_g(x)&=g_x[h_1(x)+h_2(x)]=g_x(1)[h_1(x)+h_2(x)]\\&=g_x(1)h_1(x)+g_x(1)h_2(x)=[(h_1)_g+(h_2)_g](x)\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
L(\underset{\sim}{f}, h_1 + h_2) &= \int f(x)(h_1 + h_2)_g(x)dm \\
&= \int_{(f>0)} f(x)(h_1 + h_2)_g(x)dm \\
&= \int_{E\cap(f>0)} f(x)(h_1 + h_2)_g(x)dm \\
&+ \int_{(f>0)-E} f(x)(h_1 + h_2)g(x)dm \\
&= \int_{E\cap(f>0)} f(x)[(h_1)_g + (h_2)_g](x)dm \\
&+ \int_{(f>0)-E} f(x)[(h_1)_g + (h_2)_g](x)dm \\
&= \int_{(f>0)} f(x)[(h_1)_g(x) + (h_2)g(x)]dm \\
&= \int f(x)(h_1)g(x)dm + \int f(x)(h_2)g(x)dm \\
&= L(f, h_1) + L(f, h_2),
\end{aligned}
$$

所以 $L(\underset{\sim}{f}, \cdot)$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 H 型 F 测度. 证毕.

定义 6.4 设 $\langle X, \mathscr{A}, \zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为 F 可测空间, $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 Z 型 F 测度, $\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X, \mathscr{A}\rangle$ 上的 F 可测函数, 如果对于 $h\in \zeta(\mathscr{A})$, $\int_h \underset{\sim}{f}^- dm < +\infty$, 则界定 $\underset{\sim}{f}$ 展布在 h 上的 L 型 F 积分为

$$
\int_h \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m} = \int_h \underset{\sim}{f}^+\, d\underset{\sim}{m} - \int_h \underset{\sim}{f}^-\, d\underset{\sim}{m}.
$$

进一步, 如果 $\int_h \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m} < +\infty$, 称 $\underset{\sim}{f}$ 在 h 上 L 型 F 可积. 如果 $\forall\, h\in \zeta(\mathscr{A})$, f 都 L 型 F 可积, 则称 $\underset{\sim}{f}$ 为 L 型 F **可积函数**. 在不混淆时简称为 F 可积函数.

由定义 6.4 显然有 $\int_h \underset{\sim}{f} d\underset{\approx}{m} = \int f dm_{h_g}$. 而且不难证明下述定理.

定理 6.17 $\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 L 型 F 可积当且仅当 $|\underset{\sim}{f}|=(|\underset{\sim}{f}|, g)$

为 L 型 F 可积.

定理 6.18 设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为 F 可测空间，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 F 可测函数，$h\in\zeta(\mathscr{A})$.

(1) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 Z 型 F 测度，m 为 $\underset{\sim}{m}$ 在 $\mathscr{A}$ 上的限制，且 $\underset{\sim}{f}^{-}$ 在 h 上 L 型 F 可积，则在 m 意义下存在 $a.e$ 唯一确定的马尔科夫核 K，合于

$$\int_h \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m}=\int f(x)K[x,[0,h_g(x))]dm.$$

(2) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 H 型 F 测度，m 为 $\underset{\sim}{m}$ 在 $\mathscr{A}$ 上的限制且 $\underset{\sim}{f}^{-}$ 在 h 上 L 型 F 可积. 则

$$\int_h \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m}=\int f(x)h_g(x)dm.$$

证明是简单的，请读者自证.

定理 6.19 设 $\langle X,\mathscr{A},\mathrm{m},\zeta(\mathscr{A}),\underset{\sim}{m}\rangle$ 为 H 型 F 测度空间，即 $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A}),\underset{\sim}{m}(h)=\int hdm$. $\{\underset{\sim}{f}_n=(f_n,g_n),n\geqslant1\}$ 为 L 型 F 可积函数序列，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的 F 可测函数. 令

$E=\{x\in X\,|\,\forall\ \lambda\in(0,1],\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x,\lambda)=g(x,\lambda)\}$

如果 $m(E')=0$ 且存在 L 可积实值函数 $G(x)$，使 $\forall\ n\geqslant1$，在 m 意义下 $a.e.$ $|f_n(x)|\leqslant|G(x)|$. 则 $\underset{\sim}{f}$ 为 L 型 F 可积函数且 $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_h \underset{\sim}{f}_n d\underset{\sim}{m}=\int_h \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m}.$$

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(h)_{g_n}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(g_n)_x[h(x)]=g_x[h(x)]=h_g(x)$，$\forall\ x\in E$，又 $\forall\ n\geqslant1$，

$$|f_n(x)h_{g_n}(x)|\leqslant|f_n(x)|\leqslant|G(x)|,a.e.m.$$

则 $\forall\ x\in E$，有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)h_{g_n}(x)=f(x)h_g(x).$$

所以由 Lebesgue 积分的控制收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_h \underset{\sim}{f_n} d\underset{\sim}{m}=\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)h_{g_n}(x)dm=\int f(x)h_g(x)dm$$

$$=\int_h \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m}.$$

证毕.

定义 6.5　设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为 F 可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 S_λ 型(或 H_λ 型，$\lambda>0$)F 测度，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数，$h\in\zeta(\mathscr{A})$，$T=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上任给的有限可测分划. 令

$$S_\lambda(\underset{\sim}{f},h,T)=\sum_{i=1}^{n}{}^{\lambda}\left[\bigwedge_{x\in A_i} f(x)\right]\lambda\, \underset{\sim}{m}(h_g\wedge \chi_{A_i}).$$

则由下式给出的非负(广义)实数

$$S_\lambda(\underset{\sim}{f},h)=\bigvee_{(T)} S_\lambda(\underset{\sim}{f},h,T)$$

称为 $\underset{\sim}{f}$ 展布在 h 上关于 S_λ 型(或 H_λ 型)F 测度 $\underset{\sim}{m}$ 的 S_λ 型积分，简称为 $\underset{\sim}{f}$ 在 h 上的 **S_λ 型 F 积分**，记作 $\int_h^\lambda \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m}$.

由定义 6.5 立即可得

定理 6.20　$\int_h^\lambda \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m}=\int^\lambda f dm_{h_g}$.

定理 6.21 设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 是 F 可测空间，$h\in\zeta(\mathscr{A})$.

(1)　如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 S_λ 型 F 测度，m 为 $\underset{\sim}{m}$ 在 $\mathscr{A}$ 上的限制，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数且 $\int_h^\lambda \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m}<+\infty$. 则在 m 意义下存在 $a.e$ 唯一确定的马尔科夫核 K，使得

$$\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m}=\int^\lambda f(x)K[x,[0,h_g(x))]dm.$$

(2)　如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 H_λ 型 F 测度，m 为 $\underset{\sim}{m}$ 在 $\mathscr{A}$ 上的限制，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数且 $\int_h^\lambda \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m}<+\infty$，

则

$$\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m} = \int^\lambda f(x)h_g(x)dm.$$

证明 (1) 令 $\varphi(x)=\ln(1+\lambda x)$，由 m_{h_g} 是 S_λ 型测度与定理 2.3 知，$m_{h_g}^*=\varphi\circ m_{h_g}$ 为测度. 再由定理 6.20 与定理 2.5 知

$$\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m} = \frac{1}{\lambda}(e^{\int f dm_{h_g}^*} - 1)$$

再由定理 6.14 知，在 m^*(从而在 m)意义下存在 $a.e$ 唯一确定的马尔科夫核 K，使得

$$\int^\lambda f dm_{h_g}^* = \int^\lambda f(x)K[x,[0,h_g(x))]dm^*,$$

其中 $m^*=\varphi\circ m$. 则

$$\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m} = \frac{1}{\lambda}(e^{\int f(x)K[x,[0,h_g(x))]dm^*} - 1)$$

$$= \int^\lambda f(x)K[x,[0,h_g(x))]dm.$$

(2) 类似于(1)的证明方法. 证毕.

由 S_λ 积分的性质不难证明

定理 6.22 设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 是 F 可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 S_λ 型 F 测度，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的非负 F 可测函数，$\forall\, h\in\zeta(\mathscr{A})$ 且 $\int_h \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m}<+\infty$. 则下列论断成立.

(1) $\int_h^\lambda \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m}=0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{m}(h\wedge\chi_{(f>0)})=0$.

(2) $h_1\leqslant h_2, h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$，则 $\int_{h_1}^\lambda \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m} \leqslant \int_{h_2}^\lambda \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m}$.

(3) $\{h_n, n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{A})$，$h_n\leqslant h_{n+1}$，$\forall\, n\geqslant 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n=h$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{h_n}^\lambda \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m} = \int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m}.$$

(4) $\forall\, a\geqslant 0$，$\int_h^\lambda (a\underset{\sim}{f}) d\underset{\sim}{m} = a\,\dot{\lambda}\int_h^\lambda \underset{\sim}{f} d\underset{\sim}{m}$.

(5)　如果$\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{A})$，$h_i\wedge h_j=0$，$i\neq j$，且$\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n=h$．则

$$\int_h^{\lambda}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{m}=\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\lambda}\int_{h_n}^{\lambda}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{m}.$$

(6)　$S_\lambda(\underset{\sim}{f},\cdot)$为$\zeta(\mathscr{A})$上的$S_\lambda$型$F$测度．

定理 6.23　设$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$是$F$可测空间，$\underset{\sim}{m}$为$\zeta(\mathscr{A})$上的$H_\lambda$型$F$测度，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的非负$F$可测函数，$\forall\, h\in\zeta(\mathscr{A})$，$\int_h^{\lambda}\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}<+\infty$．如果存在$E\in\zeta(\mathscr{A})$适合$\underset{\sim}{m}(\chi_{(f>0)\cap E})]=\underset{\sim}{m}(\chi_{(f>0)})$，且$\forall\, x\in E,\lambda\in(0,1]$有$g(x,\lambda)=g(x,1)\lambda$．则$S_\lambda(\underset{\sim}{f},\cdot)$为$\zeta(\mathscr{A})$上的$H_\lambda$型$F$测度．

证明　令$\varphi(x)=\ln(1+\lambda x)$，$\underset{\sim}{m}^*=\varphi\circ\underset{\sim}{m}$．则$\underset{\sim}{m}^*$为$H$型$F$测度．且

$$\underset{\sim}{m}^*[\chi_{(f>0)\cap E}]=\varphi[\underset{\sim}{m}(\chi_{(f>0)\cap E})]=\varphi[\underset{\sim}{m}(\chi_{(f>0)})]=\underset{\sim}{m}^*(\chi_{(f>0)})$$

由定理6.16知，$\varphi(S_\lambda(\underset{\sim}{f},\cdot))$为$H$型$F$测度，再由定理4.17知，$S_\lambda(\underset{\sim}{f},\cdot)$为$H_\lambda$型$F$测度．证毕．

定义 6.6　设$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$是$F$可测空间，$\underset{\sim}{m}$为$\zeta(\mathscr{A})$上的$S_\lambda$型(或$H_\lambda$型)$F$测度，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上的$F$可测函数，$h\in\zeta(\mathscr{A})$．若$\int_h^{\lambda}\underset{\sim}{f}^-d\underset{\sim}{m}<+\infty$，则称

$$\int_h^{\lambda}\underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{m}\triangleq\frac{\int_h^{\lambda}\underset{\sim}{f}^+\,d\underset{\sim}{m}-\int_h^{\lambda}\underset{\sim}{f}^-\,d\underset{\sim}{m}}{1+\lambda\int_h^{\lambda}\underset{\sim}{f}^-\,d\underset{\sim}{m}}$$

为$\underset{\sim}{f}$展布在h上关于S_λ型(或H_λ型)F测度$\underset{\sim}{m}$的S_λ型积分，简称为$\underset{\sim}{f}$在h上的S_λ**型F积分**．如果$\int_h^{\lambda}\underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}<+\infty$，称$\underset{\sim}{f}$在$h$上$S_\lambda$**型$F$可积**；如果$\forall\, h\in\zeta(\mathscr{A})$，$\underset{\sim}{f}$都$S_\lambda$型$F$可积，称$f$为$S_\lambda$**型$F$可积函数**．

不难证明下述定理．

定理 6.24 设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为 F 可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 S_λ 型 F 测度，$\underset{\sim}{f}=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的 F 可测函数，$h\in\zeta(\mathscr{A})$. 则下列论断成立.

(1) $\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}=\int^\lambda fdm_{h_g}$.

(2) $\underset{\sim}{f}$ 为 S_λ 型 F 可积函数当且仅当 $\underset{\sim}{f}^+$ 与 $\underset{\sim}{f}^-$ 为 S_λ 型 F 可积函数.

(3) $$1+\lambda\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}d\underset{\sim}{m}=\frac{1+\lambda\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}^+d\underset{\sim}{m}}{1+\lambda\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}^-d\underset{\sim}{m}}>0.$$

(4) 若 $\underset{\sim}{f}$ 为 S_λ 型 F 可积函数，则

$$\int_h^\lambda |f|dm=\int_h^\lambda f^+\,dm\overset{\lambda}{+}\int_h^\lambda f^-\,dm$$
$$=\int_h^\lambda f^+\,dm+\int_h^\lambda f^-\,dm+\lambda\left(\int_h^\lambda f^+\,dm\right)\left(\int_h^\lambda f^-\,dm\right)$$

(5) 若 $\underset{\sim}{f}$ 为 S_λ 型 F 可积函数，则 $\forall\ a\in R$，有

$$\int_h^\lambda (a\underset{\sim}{f})dm=\frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{m})^a-1\right]=a\overset{\lambda}{\cdot}\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{m}$$

(6) 若令 $\underset{\sim}{m}^*(\cdot)=\ln(1+\lambda\underset{\sim}{m}(\cdot))$ 则 $\underset{\sim}{f}$(关于 $\underset{\sim}{m}$)S_λ 型 F 可积当且仅当 $\underset{\sim}{f}$(关于 $\underset{\sim}{m}^*$)L 型 F 可积. 而且

$$\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\,d\underset{\sim}{m}=\frac{1}{\lambda}(e^{\int_h fdm^*}-1)$$

定理 6.25 设 $\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$ 为 F 可测空间，$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$ 上的 H_λ 型 F 测度，$\{\underset{\sim}{f}_n=(f_n,g_n),n\geqslant 1\}$ 为 S_λ 型 F 可积函数序列，$f=(f,g)$ 为 $\langle X,\mathscr{A}\rangle$ 上的 F 可测函数，令

$$E=\{x\in X|\forall\ \lambda\in(0,1],\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\lim_{n\to\infty}g_n(x,\lambda)=g(x,\lambda)\}$$

如果 $m(E')=\underset{\sim}{m}(\chi_{E'})=0$，且存在 S_λ 型可积实值函数 $G(x)$，使 $\forall\ n\geqslant 1$，在 m 意义下 $a.e$ 有 $|f_n(x)|\leqslant|G(x)|$，则 $\underset{\sim}{f}$ 为 S_λ 型 F 可积函数

且 $h\in\zeta(\mathscr{A})$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}_n d\underset{\sim}{m} = \int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m}.$$

证明 令 $\varphi(x)=\ln(1+\lambda x)$. 则 $\underset{\sim}{m}^*=\varphi\circ\underset{\sim}{m}$ 为 H 型 F 测度,且 $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A}),\underset{\sim}{m}^*(h)=\int hdm^*,m^*(E')=\varphi[m(E')]=\varphi(0)=0$. 还有由定理 6.24(6)知,$\{\underset{\sim}{f}_n,n\geqslant 1\}$为 L 型 F 可积函数序列,G 为 L 型 F 可积函数,在 m^* 意义下 a,e 有 $|f_n(x)|\leqslant|G(x)|$. 则由定理 6.19 知,$\underset{\sim}{f}$为 L 型 F 可积函数且$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_h \underset{\sim}{f}_n d\underset{\sim}{m}^* = \int_h \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m}^*.$$

再由定理 6.24(6)知

$$\lim_{n\to\infty}\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}_n d\underset{\sim}{m} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda}(e^{\int_h f_n dm^*}-1) = \frac{1}{\lambda}(e^{\lim_{n\to\infty}\int_h f_n dm^*}-1)$$

$$=\frac{1}{\lambda}(e^{\int_h f dm^*}-1) = \int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m}.$$

证毕.

定理 6.26 设$\langle X,\mathscr{A},\zeta(\mathscr{A})\rangle$为 F 可测空间,$\underset{\sim}{m}$ 为 $\zeta(\mathscr{A})$上的 S_λ 型 F 测度,m 为 $\underset{\sim}{m}$ 在 $\mathscr{A}$ 上的限制,$\underset{\sim}{f}=(f,g)$为$\langle X,\mathscr{A}\rangle$上关于 $\underset{\sim}{m}$ 的 S_λ 型 F 可积函数,$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{A})$.

(1) 则在 m 意义下存在 $a.e$ 唯一确定的马尔科夫核 K,使得

$$\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m} = \int^\lambda f(x)K[0,[0,h_g(x))]dm.$$

(2) 如果 $\underset{\sim}{m}$ 为 H_λ 型 F 测度,则

$$\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m} = \int^\lambda f(x)h_g(x)dm.$$

证明 (1) 由于

$$\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}\, d\underset{\sim}{m} = \frac{\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}^+ d\underset{\sim}{m} - \int_h^\lambda \underset{\sim}{f}^- d\underset{\sim}{m}}{1+\lambda\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}^- d\underset{\sim}{m}}$$

以及 $\underset{\sim}{f}$ 的 S_λ 型 F 可积性知，$\underset{\sim}{f}^+$ 与 $\underset{\sim}{f}^-$ 为 S_λ 型 F 可积，由定理 6.21 知，在 m 意义下存在 $a \cdot e$ 唯一确定的马尔科夫核 K，使得

$$\int_h^\lambda \underset{\sim}{f}^\pm \, dm = \int^\lambda f^\pm(x) K[x, [0, h_g(x))] dm,$$

则

$$\int_h^\lambda \underset{\sim}{f} \, dm = \frac{\int^\lambda f^+(x) K[x, [0, h_g(x))] dm - \int^\lambda f^-(x) K[x, [0, h_g(x))] dm}{1 + \lambda \int^\lambda f^-(x) K[x, [0, h_g(x))] dm}$$

$$= \int_h^\lambda f(x) K[x, [0, h_g(x))] dm.$$

(2) 类似于(1)的证明方法. 证毕.

第五章 模糊概率与随机模糊集

本章介绍模糊概率与随机模糊集的有关基本知识. 主要内容包括模糊事件与模糊概率,模糊事件的独立性与极限定理,模糊随机变量,随机集与模糊落影分布,模糊集值映射与模糊集空间的可测结构,随机模糊集的定义及其性质,随机模糊集的诱导分布与矩,随机模糊集的独立性与极限定理,随机模糊集的条件数学期望与模糊鞅等.

§1 F 事件与 F 概率

设$\langle \Omega,\mathscr{F},P\rangle$是概率空间,由第四章的论述容易看出:

(1) $h\in\zeta(\mathscr{F})$当且仅当 $h(\cdot)$为$\langle \Omega,\mathscr{F},P\rangle$上的随机变量;

(2) 映射 $\underset{\sim}{P}(\cdot):\zeta(\mathscr{F})\to[0,1]$为$\zeta(\mathscr{F})$上的正规 H 型 F 测度当且仅当 $\underset{\sim}{P}(h)=E(h(\cdot)),\forall\, h\in\zeta(\mathscr{F})$,其中 $E(h(\cdot))=\int h(\omega)dP$ 表示随机变量 $h(\cdot)$的数学期望.

于是我们有

定义 1.1 称$\langle \Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{A}),\underset{\sim}{P}\rangle$为由$\langle \Omega,\mathscr{F},P\rangle$**支撑的** F **概率空间**.

一般地，我们有

定义 1.2 设 Ω 为非空集，$\underset{\sim}{\mathscr{F}}$ 为 Ω 上的满层 $F\sigma$ 代数，$\underset{\sim}{P}$ 为 $\underset{\sim}{\mathscr{F}}$ 上的正规 H 型 F 测度，即适合.

(1) $\underset{\sim}{P}(0)=0,\underset{\sim}{P}(1)=1.$

(2) 如果$\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\underset{\sim}{\mathscr{F}}$ 且不相重，则

$$\underset{\sim}{P}(\sum_{n=1}^{\infty}h_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n).$$

则称 $\underset{\sim}{P}$ 为 $\underset{\sim}{\mathscr{F}}$ 上的 F **概率**；称 $\underset{\sim}{\mathscr{F}}$ 中的元素为 F 事件，称$\langle \Omega,\underset{\sim}{\mathscr{F}},\underset{\sim}{P}\rangle$为 F **概率空间**.

由第四章中 H 型 F 测度的积分表示定理；立即得下述定理.

定理 1.1 设$\langle \Omega,\underset{\sim}{\mathscr{F}},\underset{\sim}{P}\rangle$为 F 概率空间，令 $\chi_{\mathscr{F}}=\underset{\sim}{\mathscr{F}}\cap\{0,1\}^{\Omega}$，$P(A)=\underset{\sim}{P}(\chi_A),\forall A\in\mathscr{F}$. 则$\langle \Omega,\mathscr{F},P\rangle$是概率空间，而且 $\underset{\sim}{\mathscr{F}}=\zeta(\mathscr{F})$，

$$\underset{\sim}{P}(h)=\int h(\omega)dP,\qquad \forall h\in\underset{\sim}{\mathscr{F}}.$$

由定理 1.1 可知，任何一个 F 概率空间$\langle \Omega,\underset{\sim}{\mathscr{F}},\underset{\sim}{P}\rangle$都是由一个(分明的)概率空间$\langle \Omega,\mathscr{F},P\rangle$支撑的.

在模糊数学的一些文献中，把正规 Z 型 F 测度作为 F 概率的定义，为了术语不致混淆我们有.

定义 1.3 设$\langle \Omega,\mathscr{F},\zeta(\mathscr{F})\rangle$为 F 可测空间，$\underset{\sim}{P}$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$上的正规 Z 型 F 测度，即适合.

(1) $\underset{\sim}{P}(0)=0,\underset{\sim}{P}(1)=1;$

(2) 如果$\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$，且两两不相交，则

$$\underset{\sim}{P}(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n).$$

则称 $\underset{\sim}{P}$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$上的**概率** F **测度**，简称 PF **测度**，称$\langle \Omega,\mathscr{F},P;$

$\xi(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$为由$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$支撑的 *PF* **测度空间**.

事实上,若$\underset{\sim}{P}$为$\xi(\mathscr{F})$上的 *PF* 测度,记$P(A)=\underset{\sim}{P}(\chi_A)$,$\forall A\in\mathscr{F}$则在$P$意义下存在 a.e 唯一确定的马尔科夫核$K$,使得

$$\underset{\sim}{P}(h)=\int K[\omega,[0,h(\omega))]dP,\qquad \forall h\in\xi(\mathscr{F}).$$

因此,*PF* 测度空间$\langle\Omega,\xi(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$总是由一个概率空间$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$支撑的.

显然,*F* 概率必为 *PF* 测度,但反之不然.如果$\underset{\sim}{P}$为 *PF* 测度,$\forall h\in\xi(\mathscr{F})$,一般$\underset{\sim}{P}(h')\neq 1-\underset{\sim}{P}(h)$.但如果$\underset{\sim}{P}$为 *F* 概率,则必有$\underset{\sim}{P}(h')=1-\underset{\sim}{P}(h)$.这是本书把正规的 *H* 型 *F* 测度作为 *F* 概率定义的理由之一.在本章以后的讨论中,还可以看到 *F* 概率比之于 *PF* 测度更有效地保留了(分明)概率的基本性质.

既然 *F* 概率就是正规的 *H* 型 *F* 测度,在第四章中已系统地论述了 *H* 型 *F* 测度的性质,在此不再赘述.只需特别提出实际上是已经证明过的

定理 1.2　设$\langle\Omega,\mathscr{F},\xi(\mathscr{F})\rangle$是 *F* 可测空间,$\underset{\sim}{P}$为$\xi(\mathscr{F})$上的非负 *F* 集合函数,适合$\underset{\sim}{P}(0)=0$,$\underset{\sim}{P}(1)=1$,且$\forall A\in\mathscr{F}$记$P(A)=\underset{\sim}{P}(\chi_A)$.则下列各命题相互等价.

(1)　$\underset{\sim}{P}$为$\xi(\mathscr{F})$上的 *F* 概率.

(2)　$\underset{\sim}{P}$为$\xi(\mathscr{F})$上的 *F* 半测度,且对于$\xi(\mathscr{F})$中任何两个不相重的 *F* 集h_1与h_2有

$$\underset{\sim}{P}(h_1+h_2)=\underset{\sim}{P}(h_1)+\underset{\sim}{P}(h_2).$$

(3)　如果h_1,h_2为$\xi(\mathscr{F})$中不相重的 *F* 集,则

$$\underset{\sim}{P}(h_1+h_2)=\underset{\sim}{P}(h_1)+\underset{\sim}{P}(h_2).$$

而且当$\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\xi(\mathscr{F})$,$h_n\geqslant h_{n+1}$,$n\geqslant 1$,以及$\bigwedge_{n=1}^{\infty}h_n=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{P}(h_n)=0.$$

(4) $\underset{\sim}{P}$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$ 上的 PF 测度，且 $\forall\ \alpha\in I, h\in\zeta(\mathscr{F})$，有 $\underset{\sim}{P}(\alpha h)=\alpha\underset{\sim}{P}(h)$.

(5) $\underset{\sim}{P}$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$ 上的 PF 测度，且 $\forall\ \alpha\in I, A\in\mathscr{F}$，有 $\underset{\sim}{P}(\alpha A)=\alpha P(A)$.

下面给出 PF 测度成为 F 概率的另一个充要条件，这就是 Klement 条件.

定义 1.4 设 $\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$ 为 PF 测度空间，如果 $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{F}),\alpha\in[0,1)$ 都有

$$\lim_{\beta\to\alpha+0}\frac{\underset{\sim}{P}(h\wedge\beta)-\underset{\sim}{P}(h\wedge\alpha)}{\beta-\alpha}=P(h_{\dot{\alpha}}),$$

则称 PF 测度 $\underset{\sim}{P}$ 满足 Klement 条件.

PF 测度不一定满足 Klement 条件.

例 设 $\Omega=[0,1]$，$\mathscr{F}=\{A\mid A$ 为 $[0,1]$ 的 Lebesgue 可测子集$\}$，P 为 $\mathscr{F}$ 上的 Lebesgue 测度，显然，$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$ 是概率空间. $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{F})$，令 $\underset{\sim}{P}(h)=\int[h(\omega)]^2dP$. 不难验证，$\underset{\sim}{P}(\cdot)$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$ 上的 PF 测度. 若取 $h(\omega)=\omega,\forall\ \omega\in\Omega$. 则对于任何 $\alpha\in[0,1)$ 有 $P(h_{\dot{\alpha}})=1-\alpha$. 又 $\forall\ \beta\in(\alpha,1]$，有

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{P}(h\wedge\beta)-\underset{\sim}{P}(h\wedge\alpha)&=\int[h(\omega)\wedge\beta]^2dP-\int[h(\omega)\wedge\alpha]^2dP\\&=\int_{\{\omega\leqslant\beta\}}\omega^2dP+\int_{\{\omega>\beta\}}\beta^2dP-\int_{\{\omega\leqslant\alpha\}}\omega^2dP-\int_{\{\omega>\alpha\}}\alpha^2dP\\&=\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}+\beta^2(1-\beta)-\alpha^2(1-\alpha)\\&=(\beta-\alpha)\left[\beta+\alpha-\frac{2}{3}(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)\right]\end{aligned}$$

则

$$\lim_{\beta\to\alpha+0}\frac{\underset{\sim}{P}(h\wedge\beta)-\underset{\sim}{P}(h\wedge\alpha)}{\beta-\alpha}=2\alpha(1-\alpha).$$

因此，当 $\alpha\neq\frac{1}{2}$ 时

$$\lim_{\beta\to\alpha+0}\frac{\underset{\sim}{P}(h\wedge\beta)-\underset{\sim}{P}(h\wedge\alpha)}{\beta-\alpha}\neq P(h_{\dot{\alpha}}).$$

即 PF 测度 $\underset{\sim}{P}$ 不满足 Klement 条件.

定理 1.3　设$\langle\Omega,\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$是 F 概率空间,则 $\underset{\sim}{P}$ 满足 Klement 条件.

证明　由于 $\underset{\sim}{P}$ 为 F 概率,则$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{F})$与 $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant1$,有

$$\underset{\sim}{P}(h\wedge\beta)-\underset{\sim}{P}(h\wedge\alpha)=\underset{\sim}{P}[(h\wedge\beta)-(h\wedge\alpha)].$$

又

$$[(h\wedge\beta)-(h\wedge\alpha)](\omega)=\begin{cases}\beta-\alpha, & h(\omega)>\beta,\\ h(\omega)-\alpha, & \alpha<h(\omega)\leqslant\beta,\\ 0, & h(\omega)\leqslant\alpha.\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{P}(h\wedge\beta)-\underset{\sim}{P}(h\wedge\alpha)&=(\beta-\alpha)P(h_{\beta})+\int_{\{\alpha<h(\omega)\leqslant\beta\}}(h(\omega)-\alpha)dP\\&=(\beta-\alpha)P(h_{\alpha})-\int_{\{\alpha<h(\omega)\leqslant\beta\}}[\beta-h(\omega)]dP.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{\beta\to\alpha+0}\frac{\underset{\sim}{P}(h\wedge\beta)-\underset{\sim}{P}(h\wedge\alpha)}{\beta-\alpha}=P(h_{\alpha}).$$

证毕.

引理　设 $g(x)$为$[0,1]$上的单调不减的连续函数,且$\forall\ x\in[0,1)$,$g(x)$具有右导数且为常数 c,即 $g'^{+}(x)\equiv c,\forall\ x\in[0,1]$. 则 $g(\cdot)$在$[0,1]$为线性函数 $g(x)=cx+d$.

读者自证.

定理 1.4　设$\langle\Omega,\mathscr{F},\zeta(\mathscr{F})\rangle$是 F 可测空间,$\underset{\sim}{P}$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$上的 PF 测度. 如果 $\underset{\sim}{P}$ 满足 Klement 条件,则 $\underset{\sim}{P}$ 是 F 概率.

证明　任给 $A\in\mathscr{F}$,令 $g_A(\alpha)=\underset{\sim}{P}(\chi_A\wedge\alpha)$,$\alpha\in I$. 显然,$g_A(\cdot)$为 $I=[0,1]$上的单调不减的左连续函数. 又$\forall\ \alpha\in[0,1)$有 $\underset{\sim}{P}[(\chi_A\wedge\alpha)_{\alpha}]=P(A)$. 则由 Klement 条件知

$$\lim_{\beta\to\alpha+0}\frac{\underset{\sim}{P}(\chi_A\wedge\beta)-\underset{\sim}{P}(\chi_A\wedge\alpha)}{\beta-\alpha}=P(A).$$

即是说 $g_A(\cdot)$在$[0,1)$上具有常值右导数 $P(A)$. 从而 $g_A(\cdot)$在$[0,1]$上连续,再由引理知,$g_A(\alpha)=P(A)\cdot\alpha+d$. 再由 $g_A(0)=0$,得 $d=0$. 于是,$g_A(\alpha)=P(A)\cdot\alpha$,从而得证$\forall\ \alpha\in I,A\in\mathscr{F}$,有

$$\underset{\sim}{P}(\alpha A)=\underset{\sim}{P}(\chi_A\wedge\alpha)=\alpha P(A).$$

再由定理 1.2 得证 $\underset{\sim}{P}$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$上的 F 概率. 证毕.

现在我们给出 F 条件概率的定义.

定义 1.5 设$\langle\Omega,\zeta(\mathscr{F}),P\rangle$是 F 概率空间. 给定 $h_1\in\zeta(\mathscr{F})$. 如果 $P(h_1)>0$,则 F 事件 h_2 关于 h_1 的 F **条件概率**记作 $\underset{\sim}{P}(h_2|h_1)$且界定为 $\underset{\sim}{P}(h_2|h_1)=\underset{\sim}{P}(h_1h_2)/\underset{\sim}{P}(h_1)$.

特别,当 $h_1=\chi_A$, $A\in\mathscr{F}$ 时,记 $\underset{\sim}{P}(h_2|A)=\underset{\sim}{P}(h_2|\chi_A)$;

当 $h_2=\chi_B,B\in\mathscr{F}$ 时,记 $P(B|h_1)=\underset{\sim}{P}(\chi_B|h_1)$;

当 $h_1=\chi_A,h_2=\chi_B$ 时,记 $P(B|A)=\underset{\sim}{P}(\chi_B|\chi_A)$.

定理 1.5 如果 $\underset{\sim}{P}(h)>0$,则 $\underset{\sim}{P}(\cdot|h)$为 $\zeta(\mathscr{F})$上的 F 概率.

证明 显然,$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{F})$,$0\leqslant\underset{\sim}{P}(h_1|h)\leqslant 1$,且 $\underset{\sim}{P}(0|h)=0$,$\underset{\sim}{P}(1|h)=1$. 又若$\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$且不相重,则

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{P}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}h_n\Big|h\Big)&=\underset{\sim}{P}\Big[\Big(\sum_{n=1}^{\infty}h_n\Big)h\Big]/\underset{\sim}{P}(h)\\&=\underset{\sim}{P}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}h_nh\Big)/\underset{\sim}{P}(h)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_nh)/\underset{\sim}{P}(h)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n|h).\end{aligned}$$

所以 $P(\cdot|h)$是 $\zeta(\mathscr{F})$上的 F 概率. 证毕.

定理 1.6 设$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$是概率空间,$h\in\zeta(\mathscr{F})$且 $\underset{\sim}{P}(h)=$

$\int hdP > 0$，则

(1)　$P(\cdot\,|h)$是$\langle\Omega,\mathscr{F}\rangle$上的概率.

(2)　$P(\cdot\,|h) << P$.

(3)　$\forall\ A\in\mathscr{F}$，有 $P(A|h)=\dfrac{1}{\underset{\sim}{P}(h)}\int_A hdP$.

证明　(1)　显然.

(2)　如果 $P(A)=0$，则 $P(A|h)=\dfrac{\underset{\sim}{P}(\chi_A h)}{\underset{\sim}{P}(h)}\leqslant\dfrac{P(A)}{\underset{\sim}{P}(h)}=0$，所以 $\underset{\sim}{P}(\cdot\,|h) << P$.

(3)　$P(A|h)=\dfrac{\underset{\sim}{P}(\chi_A h)}{\underset{\sim}{P}(h)}=\dfrac{1}{\underset{\sim}{P}(h)}\int h(\omega)\chi_A(\omega)dP$

$$=\frac{1}{\underset{\sim}{P}(h)}\int_A hdP.$$ 证毕.

由定义 1.5 直接可得下述定理.

定理 1.7　(乘法公式)　设 $h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{F})$，$\underset{\sim}{P}(h_1)>0$，则

$$\underset{\sim}{P}(h_1h_2)=\underset{\sim}{P}(h_1)\underset{\sim}{P}(h_2|h_1).$$

推论　设 $h_i\in\zeta(\mathscr{F})$，$i=1,2,\cdots,n$，$\underset{\sim}{P}(\prod_{i=1}^{n-1}h_i)>0$，则

$$\underset{\sim}{P}(\prod_{i=1}^{n}h_i)=\underset{\sim}{P}(h_1)\underset{\sim}{P}(h_2|h_1)\cdots\underset{\sim}{P}(h_n|\prod_{i=1}^{n-1}h_i).$$

定理 1.8　设$\{h_n,n\geqslant1\}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$且不相重. 如果 $\underset{\sim}{P}(\sum_{n=1}^{\infty}h_n)=1$，$\underset{\sim}{P}(h_n)>0$，$\forall\ n\geqslant1$，则$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{F})$，

(1)　(全 F 概率公式)　$\underset{\sim}{P}(h)=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n)\underset{\sim}{P}(h|h_n)$.

(2)　(贝叶斯公式)　当 $\underset{\sim}{P}(h)>0$ 时，有

$$\underset{\sim}{P}(h_k|h)=\frac{\underset{\sim}{P}(h_k)\underset{\sim}{P}(h|h_k)}{\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n)\underset{\sim}{P}(h|h_n)},(k\geqslant1)$$

证明　(1)　由 $\underset{\sim}{P}(\sum_{n=1}^{\infty}h_n)=1$ 知，$\underset{\sim}{P}[(\sum_{n=1}^{\infty}h_n)']=0$. 因为$\{h_n,n$

$\geqslant 1\}$不相重，则$\{hh_n, n\geqslant 1\}$也不相重，于是

$$h = h(\sum_{n=1}^{\infty} h_n) + h(\sum_{n=1}^{\infty} h_n)' = \sum_{n=1}^{\infty} hh_n + h(\sum_{n=1}^{\infty} h_n)'$$

又由 $0 \leqslant \underset{\sim}{P}[h(\sum_{n=1}^{\infty} h_n)'] \leqslant \underset{\sim}{P}[(\sum_{n=1}^{\infty} h_n)'] = 0$，则 $\underset{\sim}{P}[h(\sum_{n=1}^{\infty} h_n)'] = 0$. 所以

$$\underset{\sim}{P}(h) = \underset{\sim}{P}(\sum_{n=1}^{\infty} hh_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{P}(hh_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{P}(h_n)\underset{\sim}{P}(h|h_n).$$

(2) 由 $\underset{\sim}{P}(h_k|h) = \dfrac{\underset{\sim}{P}(h_k h)}{\underset{\sim}{P}(h)}$ 与(1)，立即得证. 证毕.

推论： 设$\{h_n, n\geqslant 1\}\subseteq \zeta(\mathscr{F})$，且 $h_i \wedge h_j = 0, i\neq j$. 若 $\underset{\sim}{P}(\bigvee_{n=1}^{\infty} h_n) = 1$，$\underset{\sim}{P}(h_n) > 0, n\geqslant 1$，则$\forall\ h\in\zeta(\mathscr{F})$，

(1) $\underset{\sim}{P}(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{P}(h_n)\underset{\sim}{P}(h|h_n)$.

(2) 当 $\underset{\sim}{P}(h) > 0$ 时，有

$$\underset{\sim}{P}(h_k|h) = \frac{\underset{\sim}{P}(h_k)\underset{\sim}{P}(h|h_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{P}(h_n)\underset{\sim}{P}(h|h_n)}, \qquad (k\geqslant 1)$$

证明 由于$\{h_n, n\geqslant 1\}$两两不相交，则必不相重. 再由定理 1.8 立即得证. 证毕.

注 定理 1.8 及其推论中把$\{h_n, n\geqslant 1\}$换成有限个 F 集合$\{h_1, \cdots, h_n\}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$，其他条件不变，则结论仍然成立.

§2 F 事件的独立性与极限定理

定义 2.1 设$\langle\Omega, \zeta(\mathscr{F}), \underset{\sim}{P}\rangle$是 F 概率空间，$h_1, h_2\in\zeta(\mathscr{F})$. 如果 $\underset{\sim}{P}(h_1h_2) = P(h_1)P(h_2)$，称 **F 事件 h_1 与 h_2 相互独立.**

定理 2.1　设 $h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{F})$.

(1)　如果 h_1 与 h_2 相互独立,则 h_1 与 h_2' ,h_1' 与 h_2,h_1' 与 h_2' 分别相互独立.

(2)　如果 $\underset{\sim}{P}(h_1)>0$,则 h_1 与 h_2 相互独立的充要条件是,$\underset{\sim}{P}(h_2|h_1)=\underset{\sim}{P}(h_2)$.

证明　(1)由于 h_1 与 h_2 相互独立,则

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{P}(h_1h_2')&=\underset{\sim}{P}(h_1-h_1h_2)=\underset{\sim}{P}(h_1)-\underset{\sim}{P}(h_1h_2)\\&=\underset{\sim}{P}(h_1)-\underset{\sim}{P}(h_1)\underset{\sim}{P}(h_2)=\underset{\sim}{P}(h_1)[1-\underset{\sim}{P}(h_2)]\\&=\underset{\sim}{P}(h_1)\underset{\sim}{P}(h_2').\end{aligned}$$

所以 h_1 与 h_2' 相互独立.由 h_1 与 h_2 的对称性知,h_1' 与 h_2 相互独立.最后再由上述已证明的结果,得 h_1' 与 h_2' 相互独立.

(2)　由乘法公式(定理 1.7)立即得证.证毕.

定义 2.2　设$\langle\Omega,\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$是 F 概率空间.

(1)　称 n 个 F 事件 $h_i,i=1,2,\cdots,n$ 是相互独立的,是指对于任何正整数 $r\geqslant2$ 与 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n$ 都有

$$\underset{\sim}{P}(\prod_{k=1}^{r}h_{i_k})=\prod_{k=1}^{r}\underset{\sim}{P}(h_{i_k}).$$

(2)　设$\{h_t,t\in T\}$是由至少两个 F 事件组成的 F 事件系.如果其中任何有限个(至少两个)事件都相互独立,则称$\{h_t,t\in T\}$相互独立;如果其中任何两个 F 事件都相互独立,则称$\{h_t,t\in T\}$两两独立.

显然,相互独立必两两独立.但反之不然.当$\{h_t,t\in T\}=\{h_1,h_2\}$时,两者合而为同一概念.

定理 2.2　设$\langle\Omega,\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$为 F 概率空间,$\{h_1,\cdots,h_n\}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$.则 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 相互独立的充要条件是如下 2^n 个等式同时成立:

$$\underset{\sim}{P}(h_1h_2\cdots h_n)=\underset{\sim}{P}(h_1)\underset{\sim}{P}(h_2)\cdots\underset{\sim}{P}(h_n)\text{共 }C_n^0\text{ 个},$$

$$\underset{\sim}{P}(h_1\cdots h_{i-1}h_i'\,h_{i+1}\cdots h_n)$$
$$=\underset{\sim}{P}(h_1)\cdots\underset{\sim}{P}(h_{i-1})\underset{\sim}{P}(h_i')\underset{\sim}{P}(h_{i+1})\cdots\underset{\sim}{P}(h_n)\text{共 }C_n^1\text{ 个},$$

$$\underset{\sim}{P}(h_1\cdots h_{i-1}h_i'\,h_{i+1}\cdots h_{j-1}h_j'\,h_{j+1}\cdots h_n)$$
$$=\underset{\sim}{P}(h_1)\cdots\underset{\sim}{P}(h_{i-1})\underset{\sim}{P}(h_i')\underset{\sim}{P}(h_{i+1})\cdots$$
$$\underset{\sim}{P}(h_{j-1})\underset{\sim}{P}(h_j')\underset{\sim}{P}(h_{j+1})\cdots\underset{\sim}{P}(h_n)\text{共 }C_n^2\text{ 个},$$

………………………………

$$\underset{\sim}{P}(h_1'\,h_2'\cdots h_n')=\underset{\sim}{P}(h_1')\underset{\sim}{P}(h_2')\cdots\underset{\sim}{P}(h_n')\text{共 }C_n^n\text{ 个}.$$

只要术语稍加变动,便可照搬概率论中的推证方法证明本定理.请读者自证.

推论 设$\{h_t,t\in T\}(\subseteq\zeta(\mathscr{F}))$相互独立,则对于 T 的任何子集 T^*,F 事件系$\{h_t,t\in T^*;h_t'\,t\in T-T^*\}$也相互独立.

定义 2.3 设$\langle\Omega,\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$是 F 概率空间.

(1) 设 $h\in\zeta(\mathscr{F})$,$\mathscr{L}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$.称 h 与 $\mathscr{L}$ 相互独立,是指$\forall\ h_1\in\mathscr{L}$,$h$ 与 h_1 相互独立.

(2) 设 $\mathscr{L}_t\subseteq\zeta(\mathscr{F})$,$t\in T$.称 $\mathscr{L}_t$,$t\in T$ 是相互独立的 F 事件系,是指$\forall\ t\in T$,$h_t\in\mathscr{L}_t$ 都有$\{h_t,t\in T\}$相互独立.

定理 2.3 设$\langle\Omega,\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$是 F 概率空间.

(1) 如果 $h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{F})$且 $\underset{\sim}{P}(h_2)=0$ 或 1,则 h_1 与 h_2 相互独立.

(2) 如果 $h_1,h_2(\in\zeta(\mathscr{F}))$相互独立,$h_3\in\zeta(\mathscr{F})$且 $\underset{\sim}{P}(h_3)=0$.则 $h_1\vee h_3$,$h_1\hat{+}h_3$,$h_1\oplus h_3$ 分别与 h_2 相互独立.

(3) 设 $h_1,h_2,h_3\in\zeta(\mathscr{F})$且 $h_1\wedge h_2=0$.如果 h_3 与$\{h_1,h_2\}$相互独立,则 h_3 与 $h_1\vee h_2$,h_3 与 $h_1\hat{+}h_2$ 分别相互独立.

(4) 设 h_i,$i=1,\cdots,n$,为 n 个不相重的 F 事件,$h\in\zeta(\mathscr{F})$,如

果 h 与 $\{h_i, i=1,\cdots,n\}$ 相互独立，则 h 与 $\sum_{i=1}^{n} h_i$ 相互独立.

(5)　若 $\alpha \in I, h \in \zeta(\mathscr{F})$，则 α 与 h 相互独立.

(6)　设 $h \in \zeta(\mathscr{F})$，则 h 与 h 相互独立当且仅当 $h(\cdot) = \underset{\sim}{P}(A), P-a.e$（即 $P\{\omega | h(\omega) = \underset{\sim}{P}(A)\} = 1$）.

(7)　设 $h \in \zeta(\mathscr{F}), \{h_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$ 中的单调系，且 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h^*$. 如果 h 与 $\{h_n, n \geqslant 1\}$ 相互独立，则 h 与 h^* 相互独立.

(8)　设 $\{h_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$ 中（F 事件）的单调系，且 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h^*, \mathscr{L} \subseteq \zeta(\mathscr{F})$. 如果 $\{h_n, n \geqslant 1\}$ 与 $\mathscr{L}$ 相互独立，则 h^* 与 $\mathscr{L}$ 也相互独立.

(9)　设 $\mathscr{F}_0$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 6 代数，$h \in \zeta(\mathscr{F})$. 如果 h 与 $\mathscr{F}_0$ 相互独立，则 h 与 $\zeta(\mathscr{F}_0)$ 相互独立.

(10)　设 $h \in \zeta(\mathscr{F})$. 则 h 与 $\mathscr{F}$ 相互独立当且仅当 $\exists\ \alpha \in [0, 1]$ 使 $h(\cdot) = \alpha, P-a.e.$

证明　(1) 显然.

(2)　
$$\underset{\sim}{P}[(h_1 \vee h_3)h_2] = \underset{\sim}{P}(h_1h_2 \vee h_3h_2)$$
$$= \underset{\sim}{P}(h_1h_2) + \underset{\sim}{P}(h_3h_2) - \underset{\sim}{P}[(h_1 \wedge h_3)h_2],$$

其中 $\underset{\sim}{P}[(h_1 \wedge h_3)h_2] = \underset{\sim}{P}(h_3h_2) = \underset{\sim}{P}(h_3) = 0$. 则由 h_1 与 h_2 相互独立知

$$\underset{\sim}{P}[(h_1 \vee h_3)h_2] = \underset{\sim}{P}(h_1h_2) = \underset{\sim}{P}(h_1)\underset{\sim}{P}(h_2).$$

另一方面，由 $\underset{\sim}{P}(h_1 \wedge h_3) = \underset{\sim}{P}(h_3) = 0$，得

$$\underset{\sim}{P}(h_1 \vee h_3)\underset{\sim}{P}(h_2) = [\underset{\sim}{P}(h_1) + \underset{\sim}{P}(h_3) - \underset{\sim}{P}(h_1 \wedge h_3)]\underset{\sim}{P}(h_2)$$
$$= \underset{\sim}{P}(h_1)\underset{\sim}{P}(h_2).$$

所以 $\underset{\sim}{P}[(h_1 \vee h_3)h_2] = \underset{\sim}{P}(h_1 \vee h_3)\underset{\sim}{P}(h_2)$，　即 h_2 与 $h_1 \vee h_3$ 相互独立.

由
$$\underset{\sim}{P}[(h_1 \oplus h_3)h_2] = \int \{[(h_1(\omega) + h_3(\omega)] \wedge 1\}h_2(\omega)dP$$
$$\leqslant \int [h_1(\omega) + h_3(\omega)]h_2(\omega)dP$$
$$= \underset{\sim}{P}(h_1h_2) + \underset{\sim}{P}(h_3h_2) = \underset{\sim}{P}(h_1h_2),$$

$$\underset{\sim}{P}(h_1 \oplus h_3)\underset{\sim}{P}(h_2) = [\underset{\sim}{P}(h_1) + \underset{\sim}{P}(h_3) - \underset{\sim}{P}(h_1 \odot h_3)]\underset{\sim}{P}(h_2)$$
$$= \underset{\sim}{P}(h_1)\underset{\sim}{P}(h_2).$$

知 $\underset{\sim}{P}[(h_1 \oplus h_3)h_2] = \underset{\sim}{P}(h_1 \oplus h_3)\underset{\sim}{P}(h_2)$，即 h_2 与 $h_1 \oplus h_3$ 相互独立.

最后再由 $h_1 \vee h_3 \leqslant h_1 \hat{+} h_3 \leqslant h_1 \oplus h_3$ 立即可得

$$\underset{\sim}{P}[(h_1 \hat{+} h_3)h_2] = \underset{\sim}{P}(h_1)\underset{\sim}{P}(h_2) = \underset{\sim}{P}(h_1 \hat{+} h_3)P(h_2),$$

即 h_2 与 $h_1 \hat{+} h_3$ 相互独立.

(3) 由 $h_1 \wedge h_2 = 0$ 知，

$(h_1 \vee h_2)(\omega) = (h_1 \hat{+} h_2)(\omega) = h_1(\omega) + h_2(\omega), \forall\ \omega \in \Omega$,

$$\underset{\sim}{P}[(h_1 \vee h_2)h_3] = \underset{\sim}{P}[(h_1 \hat{+} h_2)h_3] = \int [h_1(\omega) + h_2(\omega)]h_3(\omega)dP$$
$$= \underset{\sim}{P}(h_1h_3) + \underset{\sim}{P}(h_2h_3) = \underset{\sim}{P}(h_1)\underset{\sim}{P}(h_3) + \underset{\sim}{P}(h_2)\underset{\sim}{P}(h_3)$$
$$= [\underset{\sim}{P}(h_1) + \underset{\sim}{P}(h_2)]\underset{\sim}{P}(h_3).$$

又由 $\underset{\sim}{P}(h_1 \vee h_2) = \underset{\sim}{P}(h_1 \hat{+} h_2) = \underset{\sim}{P}(h_1) + \underset{\sim}{P}(h_2)$ 立即可得

$$\underset{\sim}{P}[(h_1 \vee h_2)h_3] = \underset{\sim}{P}(h_1 \vee h_2)\underset{\sim}{P}(h_3),$$
$$\underset{\sim}{P}[(h_1 \hat{+} h_2)h_3] = \underset{\sim}{P}(h_1 \hat{+} h_2)\underset{\sim}{P}(h_3).$$

即 h_3 与 $h_1 \vee h_2$，h_3 与 $h_1 \hat{+} h_2$，分别相互独立.

(4) 由于 $\{h_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 不相重且与 h 相互独立，则

$$\underset{\sim}{P}[(\sum_{i=1}^{n} h_i)h] = \underset{\sim}{P}[\sum_{i=1}^{n} h_ih] = \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{P}(h_i)\underset{\sim}{P}(h)$$
$$= [\sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{P}(h_i)]\underset{\sim}{P}(h) = \underset{\sim}{P}(\sum_{i=1}^{n} h_i)\underset{\sim}{P}(h).$$

所以 h 与 $\sum_{i=1}^{n} h_i$ 相互独立.

(5) 由 $\underset{\sim}{P}(\alpha h) = \alpha \underset{\sim}{P}(h)$ 及 $\underset{\sim}{P}(\alpha) = \alpha$ 知 α 与 h 相互独立.

(6) 如果 h 与 h 相互独立，则 $\underset{\sim}{P}(hh) = \underset{\sim}{P}(h)\underset{\sim}{P}(h)$. 当 $\underset{\sim}{P}(h) = 0$ 时，有 $h(\cdot) = \underset{\sim}{P}(h) = 0, P-a.e.$ 当 $\underset{\sim}{P}(h) > 0$ 时，则随机变量 $h(\cdot)$ 的方差.

$$D(h(\cdot)) = E(h^2(\cdot)) - [E(h\cdot))]^2 = \underset{\sim}{P}(hh) - \underset{\sim}{P}(h)\underset{\sim}{P}(h) = 0.$$

故　$h(\cdot)=$常数,$P-a.e.$ 又

$$\underset{\sim}{P}(hh)-\underset{\sim}{P}(h)\underset{\sim}{P}(h)=\int\{h^2(w)-[\underset{\sim}{P}(h)]^2\}dP=0.$$

则　$h^2(\cdot)-[\underset{\sim}{P}(h)]^2=0,P-a.e.$ 所以 $h(\cdot)=\underset{\sim}{P}(h),P-a.e.$

反之,如果 $h(\cdot)=\underset{\sim}{P}(h),P-a.e$,显然有 $\underset{\sim}{P}(hh)=\underset{\sim}{P}(h)\underset{\sim}{P}(h)$,即 h 与 h 相互独立.

(7)　如果 $h_n\leqslant h_{n+1},n\geqslant 1$,且 h 与 $\{h_n,n\geqslant 1\}$相互独立.则 $h_nh\nearrow h^*h$,且

$$\underset{\sim}{P}(h^*h)=\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{P}(h_nh)=\lim_{n\to\infty}P(h_n)P(h)=P(h^*)P(h)$$

于是,h 与 h^* 相互独立.

如果 $h_n\geqslant h_{n+1}$,则 $h_n'\leqslant h'_{n+1}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}h'_n=h^{*\prime}$,由定理 2.1 知,$h$ 与$\{h'_n,n\geqslant 1\}$相互独立,再由刚才的推证知,h 与 $h^{*\prime}$ 相互独立.最后由定理 2.1 知,h 与 h^* 相互独立.

(8)　如果$\{h_n,n\geqslant 1\}$与 $\mathscr{L}$ 相互独立,从而$\forall\ h\in\mathscr{L}$,h 与$\{h_n,n\geqslant 1\}$相互独立,由(7)知 h 与 h^* 相互独立,所以 h^* 与 $\mathscr{L}$ 相互独立.

(9)　如果 h 与 $\mathscr{F}_0$ 相互独立,则$\forall\ A\in\mathscr{F}_0$,有

$$\underset{\sim}{P}(h\chi_A)=\underset{\sim}{P}(h)P(A).$$

则$\forall\ \alpha\in I$,有

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{P}[(\alpha A)h]&=P[\alpha(\chi_Ah)]=\alpha\,\underset{\sim}{P}(\chi_Ah)\\&=\alpha\,\underset{\sim}{P}(\chi_A)\underset{\sim}{P}(h)=\underset{\sim}{P}(\alpha A)\underset{\sim}{P}(h)\end{aligned}$$

从而,h 与$\{\alpha A|A\in\mathscr{F}_0\}$相互独立.

如果 $h_0\in M(\mathscr{F}_0)$,则存在 $\alpha_i\in I,A_i\in\mathscr{F}_0,i=1,2,\cdots,n$,且 $A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j$,使得 $h_0=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$. 显然.$\{\alpha_i\chi_{A_i},i=1,\cdots n\}$不相交,从而不相重,则由(4)知,$h$ 与 h_0 相互独立,于是,h 与 $M(\mathscr{F}_0)$相互独立.

最后,如果 $h_0\in\zeta(\mathscr{F}_0)$,则存在单调不减序列$\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq$

$M(\mathscr{F}_0)$,使得 $h_0=\lim\limits_{n\to\infty}h_n$. 由已证知 h 与 $\{h_n,n\geqslant 1\}$ 相互独立,再由(7)得证 h 与 h_0 相互独立,从而,h 与 $\zeta(\mathscr{F}_0)$ 相互独立.

(10) 如果 h 与 $\mathscr{F}$ 相互独立,由(9)知,h 与 $\zeta(\mathscr{F})$ 相互独立. 又因 $h\in\zeta(\mathscr{F})$,从而 h 与 h 相互独立,再由(6)知,$h(\cdot)=\underset{\sim}{P}(h)$,$P-a.e.$

反之,如果 $h(\cdot)=\underset{\sim}{P}(h)$,$P-a.e.$ 则 $\forall\ A\in\mathscr{F}$,

$$\underset{\sim}{P}(h\chi_A)=\int h(\omega)\chi_A(\omega)dP=\int \underset{\sim}{P}(h)\chi_A(\omega)dP=\underset{\sim}{P}(h)P(A).$$

于是,h 与 A 相互独立. 从而得证 h 与 $\mathscr{F}$ 相互独立. 证毕.

注 如果 h 与 $\{h_1,h_2\}$ 相互独立,一般情况,h 与 $h_1\vee h_2$,h 与 $h_1\hat{+}h_2$,h 与 $h_1\oplus h_2$ 不一定相互独立.

例 2.1 设 $\Omega=[0,1]$,$\mathscr{F}=\{A\mid A$ 为$[0,1]$上的 Borel 集合$\}$,P 为 *Lebesgue* 测度在 $\mathscr{F}$ 上的限制. 令 $h_1(\omega)=1/2$,$h_2(\omega)=\omega$,$\forall\ \omega\in\Omega$ 以及

$$h_3(\omega)=\begin{cases}\omega, & \omega\in[0,\frac{1}{2}],\\ \frac{1}{6}, & \omega\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

不难验证,$\{h_1,h_2,h_3\}$ 相互独立,从而两两独立,而 h_1 与 $\{h_2\vee h_3,h_2\hat{+}h_3,h_2\oplus h_3\}$ 相互独立;h_2 与 $\{h_1\vee h_3,h_1\oplus h_3\}$ 相互独立,但 h_2 与 $h_1\hat{+}h_3$ 不相互独立;h_3 与 $h_1\hat{+}h_2$ 相互独立,但 h_3 与 $h_1\vee h_2$,h_3 与 $h_1\oplus h_2$ 不相互独立.

现在讨论 F 事件列的极限定理.

定理 2.4 设 $\langle\Omega,\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$ 是 F 概率空间,$\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$. 令 $H_1=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}h_n=\lim\limits_{N\to\infty}(\bigvee\limits_{n=N}^{\infty}h_n)$,$H_2=\lim\limits_{N\to\infty}(\hat{\sum\limits_{n=N}^{\infty}}h_n)$,

$H_3=\lim\limits_{N\to\infty}(\bigoplus\limits_{n=N}^{\infty}h_n)$.

(1)　如果$\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n)<+\infty$,则 $\underset{\sim}{P}(H_1)=P(H_2)=\underset{\sim}{P}(H_3)=0$.

(2)　如果$\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n)=+\infty$,且$\{h_n,n\geqslant 1\}$相互独立,则 $\underset{\sim}{P}(H_2)=\underset{\sim}{P}(H_3)=1$

证明　(1)　由于 $H_1\leqslant H_2\leqslant H_3$,故只需证 $\underset{\sim}{P}(H_3)=0$.

当 $N\to\infty$时,$\bigoplus_{n=N}^{\infty}h_n\downarrow H_3$,且$\forall\ \omega\in\Omega$,$(\bigoplus_{n=N}^{\infty}h_n)(\omega)\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}h_n(\omega)$. 则

$$0\leqslant\underset{\sim}{P}(H_3)=\lim_{N\to\infty}\underset{\sim}{P}(\bigoplus_{n=N}^{\infty}h_n)=\lim_{N\to\infty}\int(\bigoplus_{n=N}^{\infty}h_n)(\omega)dP$$

$$\leqslant\lim_{N\to\infty}\int[\sum_{n=N}^{\infty}h_n(\omega)]dP=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{\infty}\int h_n(\omega)dP$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n).$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n)<+\infty$,则$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n)=0$,即得 $\underset{\sim}{P}(H_3)=0$

(2)　由于 $H_2\leqslant H_3$,故只需证 $\underset{\sim}{P}(H_2)=1$.　事实上,

$$1-\underset{\sim}{P}(H_2)=\underset{\sim}{P}(H_2')=\underset{\sim}{P}[(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{\infty}\hat{+}\,h_n)']$$

$$=\underset{\sim}{P}\{[\bigwedge_{N=1}^{\infty}(\sum_{n=N}^{\infty}\hat{+}\,h_n)]'\}$$

$$=\underset{\sim}{P}[\bigvee_{N=1}^{\infty}(\prod_{n=N}^{\infty}h'_n)]=\underset{\sim}{P}[\lim_{N\to}\lim_{K\to\infty}(\prod_{n=N}^{N+k}h'_n)]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty}\underset{\sim}{P}(\prod_{n=N}^{N+k}h'_n).$$

由于$\{h_n,n\geqslant 1\}$相互独立,根据定理 2.2 的推论知,$\{h'_n,n\geqslant 1\}$相互独立. 则

$$1-\underset{\sim}{P}(H_2)=\lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty}\prod_{n=N}^{N+k}\underset{\sim}{P}(h'_n)=\lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty}\prod_{n=N}^{N+k}[1-\underset{\sim}{P}(h_n)].$$

因$\forall\ a\in[0,1]$,有 $1-a\leqslant e^{-a}$,故

$$\prod_{n=N}^{N+k}[1-\underset{\sim}{P}(h_n)]\leqslant e^{-\sum_{n=N}^{N+k}\underset{\sim}{P}(h_n)},$$

又由假设 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n)=+\infty$,则

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty}\prod_{n=N}^{N+k}[1-\underset{\sim}{P}(h_n)]=\lim_{N\to\infty}e^{-\sum_{n=N}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n)}=0.$$

于是,$1-\underset{\sim}{P}(H_2)=0$,即得证 $\underset{\sim}{P}(H_2)=1$. 证毕

例 2.2 设 $h_n=\frac{1}{n}$, $n\geqslant 1$. 显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$,且 $\{h_n,n\geqslant 1\}$ 相互独立,因此 $\underset{\sim}{P}(H_2)=\underset{\sim}{P}(H_3)=1$,但 $\underset{\sim}{P}(H_1)=0$.

事实上,由 $H_1=\overline{\lim_{n\to\infty}}h_n=\lim_{N\to\infty}(\bigvee_{n=N}^{\infty}h_n)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}=0$,故得 $\underset{\sim}{P}(H_1)=0$.

从例 2.2 知,定理 2.4(2)的条件不能推出 $\underset{\sim}{P}(H_1)=1$. 而且有可能 $\underset{\sim}{P}(H_1)=0$

例 2.3 任给 $\alpha\in(0,1]$,设 $h_n=\alpha(1-\frac{1}{n})$, $n\geqslant 1$. 显然,$\{h_n,n\geqslant 1\}$ 相互独立且 $\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}(h_n)=+\infty$. 由定理 2.4 知,$\underset{\sim}{P}(H_2)=\underset{\sim}{P}(H_3)=1$. 而且 $\underset{\sim}{P}(H_1)=\alpha$

定理 2.5 设 $\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$ 为 F 概率空间,$\{\mathscr{A}_n,n\geqslant 1\}$ 为一列相互独立的 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数. $\forall\, n\geqslant 1$ 令

$$\mathscr{E}_n=\{\bigcap_{k=1}^{n}E_k\mid E_k\in\mathscr{A}_k,k=1,2,\cdots,n\},$$

$$\mathscr{E}^{(n)}=\{\bigcap_{k=1}^{m}E_{i_k}\mid E_{i_k}\in\mathscr{A}_{i_k},n\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m,m\geqslant 1\},$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(\mathscr{E}_n)\triangleq\bigcap\{\mathscr{A}\mid\mathscr{A}\text{ 是包含 }\mathscr{E}_n\text{ 的 }\sigma\text{ 代数}\},$$

$$\mathscr{F}^{(n)}=\sigma(\mathscr{E}^{(n)})\triangleq\bigcap\{\mathscr{A}\mid\mathscr{A}\text{ 是包含 }\mathscr{E}^{(n)}\text{ 的 }\sigma\text{ 代数}\}.$$

则下列论断成立.

(1) $\forall\, n\geqslant 1,k\geqslant 1$, $\mathscr{F}_n$ 与 $\mathscr{F}^{(n+k)}$ 相互独立.

(2)　$\forall A\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)}$，　　$\underset{\sim}{P}(A)=0$ 或 1.

(3)　$\zeta(\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)})=\bigcap_{n=1}^{\infty}\zeta(\mathscr{F}^{(n)})$.

(4)　$\forall h\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\zeta(\mathscr{F}^{(n)})$，　　$h(\cdot)=\underset{\sim}{P}(h),P-a.e.$

(5)　$\forall h_n\in\zeta(\mathscr{A}_n)$，则 $\{h_n(\cdot),n\geqslant1\}$ 为相互独立的随机变量序列，而且 $H_i(\cdot)=\underset{\sim}{P}(H_i),P-a.e.\ i=1,2,3$.（其中 $H_1=\overline{\lim_{n\to\infty}}h_n$，$H_2=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{\infty}{}^{+}h_n$，$H_3=\lim_{N\to\infty}\bigoplus_{n=N}^{\infty}h_n$）.

证明　(1)　由于 $\{\mathscr{A}_n,n\geqslant1\}$ 相互独立知，$\mathscr{E}_n$ 与 $\mathscr{E}^{(n+k)}$ 相互独立，如果 $\forall B\in\mathscr{E}_n$，令

$$\mathscr{F}_B=\{A\in\mathscr{F}\,|\,P(AB)=P(A)P(B)\}.$$

由上所述知，$\mathscr{E}^{(n+k)}\subseteq\mathscr{F}_B$，不难证明，$\mathscr{F}_B$ 为 λ 系，$\mathscr{E}^{(n+k)}$ 为 π 系. 于是，$\mathscr{F}^{(n+k)}=\sigma(\mathscr{E}_{(n+k)})\subseteq\mathscr{F}_B$. 这就证明了 $\forall B\in\mathscr{E}_n$，$B$ 与 $\mathscr{F}^{(n+k)}$ 相互独立. 从而，$\mathscr{E}_n$ 与 $\mathscr{F}^{(n+k)}$ 相互独立. 再 $\forall C\in\mathscr{F}^{(n+k)}$，令

$$\mathscr{F}^{(C)}=\{A\in\mathscr{F}\,|\,P(AC)=P(A)P(C)\}.$$

由上所述知，$\mathscr{E}_n\subseteq\mathscr{F}^{(C)}$，$\mathscr{E}_n$ 为 π 系，而且同样可证明 $\mathscr{F}^{(C)}$ 为 λ 系，从而，$\mathscr{F}_n=\sigma(\mathscr{E}_n)\subseteq\mathscr{F}^{(C)}$. 于是，立即推得 $\mathscr{F}_n$ 与 $\mathscr{F}^{(n+k)}$ 相互独立.

(2)　$\forall A\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)}$，令

$$\mathscr{A}=\{E\in\mathscr{F}\,|\,P(AE)=P(A)P(E)\}$$

$\forall n\geqslant1$，$A\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)}\subseteq\mathscr{F}^{(n+1)}$，由 (1) 知 A 与 $\mathscr{F}_n$ 相互独立. 从而，$\forall n\geqslant1$，$\mathscr{F}_n\subseteq\mathscr{A}$. 容易验证，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 组成一个包含在 $\mathscr{A}$ 中的代数，又 $\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n)=\mathscr{F}^{(1)}$. 另一方面，$\mathscr{A}$ 为 λ 系，从而 $\mathscr{F}^{(1)}\subseteq\mathscr{A}$，显然. $A\in\mathscr{F}^{(1)}$. 因此，$P(A)=P(AA)=P(A)P(A)$. 所以 $P(A)=0$ 或 1.

(3) $\forall\ n\geqslant 1,\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)}\subseteq\mathscr{F}^{(n)}\Rightarrow\zeta(\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)})\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\zeta(\mathscr{F}^{(n)})$.

另一方面，$\forall\ h\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\zeta(\mathscr{F}^{(n)})\Rightarrow h\in\zeta(\mathscr{F}^{(n)}),\forall\ n\geqslant 1$.

$\Rightarrow\forall\ \alpha\in I,h_\alpha\in\mathscr{F}^{(n)},\forall\ n\geqslant 1$.

$\Rightarrow\forall\ \alpha\in I,h_\alpha\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)}$,

$\Rightarrow h\in\zeta(\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)})$.

于是，$\bigcap_{n=1}^{\infty}\zeta(\mathscr{F}^{(n)})\subseteq\zeta(\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)})$. 综合上述知，

$$\zeta(\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)})=\bigcap_{n=1}^{\infty}\zeta(\mathscr{F}^{(n)}).$$

(4) $\forall\ h\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\zeta(\mathscr{F}^{(n)})$. 由(3)知$\forall\ \alpha\in I,h_\alpha\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)}$. 再由(2)知，$P(h_\alpha)=0$ 或 1. 从而，存在常数 $c\in I$，使得 $h(\cdot)=c,P-a.e.$ 又 $P(h)=\int h(\omega)dP=c$. 故 $h(\cdot)=\underset{\sim}{P}(h),P-a.e.$

(5) $\forall\ h_n\in\zeta(\mathscr{A}_n)$. 由于 $\{\mathscr{A}_n,n\geqslant 1\}$相互独立知，$\{h_n(\cdot),n\geqslant 1\}$是相互独立的随机变量序列. 不难验证，$H_i\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\zeta(\mathscr{F}^{(n)}),i=1,2,3$. 由(4)立即得证 $H_i(\cdot)=\underset{\sim}{P}(H_i),i=1,2,3$. 证毕.

定理 2.6 设$\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$为 F 概率空间，$\{h_n,n\geqslant 1\}$ ($\subseteq\zeta(\mathscr{F})$)是相互独立 F 事件的单调序列，且$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=h$. 则 $h(\cdot)=\underset{\sim}{P}(h),P-a.e.$

证明 因为$\forall\ k\geqslant 1,h_k$ 与$\{h_n,n\geqslant 1,n\neq k\}$相互独立. 则由定理2.4(7)知，$h_k$ 与 h 相互独立. 再由 k 的任意性知，h 与$\{h_n,n\geqslant 1\}$相互独立，从而，h 与 h 相互独立. 再由定理 2.4(6)得 $h(\cdot)=\underset{\sim}{P}(h),P-a.e.$ 证毕.

定理 2.7 设$\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$是 F 概率空间，$\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$. 如果令 $H_n=\bigvee_{i=n}^{\infty}h_i,G_n=\bigwedge_{i=n}^{\infty}h_i$, $H=\lim\limits_{n\to\infty}H_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}h_n,G=\lim\limits_{n\to\infty}G_n=$

$\varliminf_{n\to\infty} h_n$.

(1)　如果$\{H_n,n\geqslant 1\}$相互独立，则 $H(\cdot)=\underset{\sim}{P}(H)$，$P-a.e.$

(2)　如果$\{G_n,h\geqslant 1\}$相互独立，则 $G(\cdot)=\underset{\sim}{P}(G)$，$P-a.e.$

证明　(1)　由于$\{H_n,n\geqslant 1\}$为单调不增的 F 事件序列，若$\{H_n,n\geqslant 1\}$相互独立，由定理 2.6 立即得 $H(\cdot)=\underset{\sim}{P}(H)$，$p-a.e.$

(2)　与(1)同理. 证毕.

定义 2.4　设$\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F},\underset{\sim}{P}\rangle$是 F 概率空间，$\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$，$h\dot{\in}\zeta(\mathscr{F})$.

(1)　如果随机变量序列$\{h_n(\cdot),n\geqslant 1\}$依概率收敛于 $h(\cdot)$，即$\forall\ \varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|h_n(\omega)-h(\omega)|\geqslant\varepsilon\}=0$，称$\{h_n,n\geqslant 1\}$**依概率收敛于** h，记作 $h_n\xrightarrow{P} h$.

(2)　如果随机变量序列$\{h_n(\cdot),n\geqslant 1\}$以概率 1 收敛于 $h(\cdot)$，即 $P\{\lim\limits_{n\to\infty}h_n(\omega)=h(\omega)\}=1$，则称$\{h_n,n\geqslant 1\}$以**概率** 1（亦称 $a.e$）**收敛于** h. 记作$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=h$，$P-a.e$ 或简记作 $h_n\xrightarrow{a.e}h$.

显然，“$h_n\xrightarrow{a.e}h$”$\Rightarrow$“$h_n\xrightarrow{P}h$”.

“$h_n\xrightarrow{a.e}h$”$\Leftrightarrow$“$h_n\Delta h\xrightarrow{a.e}0$”$\Leftrightarrow P\{\lim\limits_{n\to\infty}|h_n(\omega)-h(\omega)|=0\}=1$.

“$h_n\xrightarrow{P}h$”$\Leftrightarrow$“$h_n\triangle h\xrightarrow{P}0$”$\Leftrightarrow\forall\ \alpha\in(0,1]$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\{(h_n\triangle h)_\alpha\}=0$.

定义 2.5　设$\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$为 F 概率空间，$\{h_n,n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$，$\forall\ n\geqslant 1$，记 $\bar{h}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}h_k$. 如果 $\bar{h}_n\triangle\underset{\sim}{P}(\bar{h}_n)\xrightarrow{P}0$，称$\{h_n,n\geqslant 1\}$**服从弱大数定律**；如果 $\bar{h}_n\triangle\underset{\sim}{P}(h_n)\xrightarrow{a.e}0$，称$\{h_n,n\geqslant 1\}$**服从强大数定律**.

定理 2.8　设$\{h_n,n\geqslant 1\}$是 F 事件序列，则$\{h_n,n\geqslant 1\}$服从弱大数定律的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{P}[(h_n\triangle\underset{\sim}{P}(\bar{h}_n))^2]=0$.

证明 充分性. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{P}[(\bar{h}_n\triangle\underset{\sim}{P}(\bar{h}_n))^2]=0$, 则随机变量序列 $\{h_n(\cdot),n\geqslant1\}$ 满足条件: 为 $n\to\infty$ 时

$$\frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n}h_i(\cdot))=\frac{1}{n^2}E\{[\sum_{k=1}^{n}h_k(\cdot)-E(\sum_{k=1}^{n}h_k(\cdot))]^2\}$$

$$=E\{[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}h_k(\cdot)-E(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}h_k(\cdot))]^2\}$$

$$=\underset{\sim}{P}[(\bar{h}_n\triangle\underset{\sim}{P}(\bar{h}_n))^2]\to0.$$

则由概率论中的马尔科夫大数定律知, $\forall\ \varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\bar{h}_n(\omega)-E(\bar{h}_n(\cdot))|\geqslant\varepsilon\}=0.$$

即 $\qquad \bar{h}_n\triangle\underset{\sim}{P}(\bar{h}_n)\xrightarrow{P}0.$

必要性. 如果 $\{h_n,n\geqslant1\}$ 服从弱大数定律, 即 $\bar{h}_n\triangle P(\bar{h}_n)\xrightarrow{P}0$. 即 $\forall\ \varepsilon\in(0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\bar{h}_n(\omega)-E(\bar{h}_n(\cdot))|\geqslant\varepsilon\}=0$

如果令 $\qquad A_{n\varepsilon}=\{|\bar{h}_n(\omega)-E(\bar{h}_n(\cdot)|\geqslant\varepsilon\}.$

则 $\qquad \underset{\sim}{P}[(\bar{h}_n\triangle\underset{\sim}{P}(\bar{h}_n))^2]=\int[\bar{h}_n(\omega)-E(\bar{h}_n(\cdot))]^2dP$

$$=\int_{A_{n\varepsilon}}[\bar{h}_n(\omega)-E\bar{h}_n(\cdot))]^2dP+\int_{A'_{n\varepsilon}}[\bar{h}_n(\omega)-E(\bar{h}_n(\cdot))]^2dP$$

$$\leqslant\int_{A_{n\varepsilon}}1dP+\int_{A'_{n\varepsilon}}\varepsilon^2dP$$

$$=P(A_{n\varepsilon})+\varepsilon^2P(A'_{n\varepsilon})$$

$$\leqslant P\{|\bar{h}_n(\omega)-E(\bar{h}_n(\cdot)|\geqslant\varepsilon\}+\varepsilon^2.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{P}[(\bar{h}_n\Delta P(\bar{h}_n))^2]\leqslant\varepsilon^2$. 再令 $\varepsilon\to0$, 则得所欲证. 证毕.

定理 2.9 设 $\{h_n,n\geqslant1\}$ 为两两独立的 F 事件序列, 则 $\{h_n,n\geqslant1\}$ 服从弱大数定律.

证明 由于 $\{h_n,n\geqslant1\}$ 两两独立, 则当 $i\neq j$ 时, 有 $\underset{\sim}{P}(h_ih_j)=\underset{\sim}{P}(h_i)\underset{\sim}{P}(h_j)$. 于是, 随机变量序列 $\{h_n(\cdot),n\geqslant1\}$ 满足条件:

$$E[h_i(\cdot)h_j(\cdot)]=\underset{\sim}{P}(h_ih_j)=\underset{\sim}{P}(h_i)\underset{\sim}{P}(h_j)$$

$$=E[h_i(\cdot)]\cdot E[h_j(\cdot)].$$

即$\{h_n(\cdot),n\geqslant 1\}$两两不相关，则当$i\neq j$时，协方差$Cov(h_i(\cdot),h_j(\cdot))=0$，则

$$0\leqslant \underset{\sim}{P}[(\bar{h}_n \Delta P(\bar{h}_n))^2]=D(\bar{h}_n(\cdot))$$

$$=\frac{1}{n^2}D[\sum_{i=1}^{n}h_i(\cdot)]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D[h_i(\cdot)]\leqslant\frac{1}{n}.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\underset{\sim}{P}[(\bar{h}_n \Delta P(\bar{h}_n))^2]=0$. 由定理 2.8 知，$\{h_n,n\geqslant 1\}$服从弱大数定理. 证毕.

定理 2.10　设$\{h_n,n\geqslant 1\}$是两两独立的F事件序列，且$\forall\ n\geqslant 1$，$\underset{\sim}{P}(h_n)=a$，则$\bar{h}_n\xrightarrow{P}a$.

证明　因为$\underset{\sim}{P}(\bar{h}_n)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\underset{\sim}{P}(h_i)=a$，由定理2.9得$\bar{h}_n\triangle a\xrightarrow{P}0$，亦即$\bar{h}_n\xrightarrow{P}a$.

定理2.11　设$\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$是$F$概率空间，$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$为一列相互独立的$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数. $\forall\ n\geqslant 1$，$h_n\in\zeta(\mathscr{F}_n)$，则$\{h_n,n\geqslant 1\}$服从强大数定律，即$\bar{h}_n\triangle\underset{\sim}{P}(\bar{h}_n)\xrightarrow{a.e}0$.

证明　由于$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$相互独立，则$\{h_n(\cdot),n\geqslant 1\}$是相互独立的随机变量序列，且$\forall\ n\geqslant 1$，$D[h_n(\cdot)]\leqslant 1$. 因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{D[h_n(\cdot)]}{n^2}\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. 于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{D[h_n(\cdot)]}{n^2}$收敛. 由概率论中强大数定律的(柯尔莫哥洛夫)判别法知，$\bar{h}_n(\cdot)-E[\bar{h}_n(\cdot)]\xrightarrow{a.e}0$，即$\bar{h}_n\triangle\underset{\sim}{P}(\bar{h}_n)\xrightarrow{a.e}0$. 证毕.

推论1　设$\{h_n,n\geqslant 1\}$是F事件序列，如果$\{h_n(\cdot),n\geqslant 1\}$为相互独立的随机变量序列，则$\{h_n,n\geqslant 1\}$服从强大数定律.

推论2　设$\{h_n,n\geqslant 1\}$是F事件序列，$\forall\ n\geqslant 1$，$\underset{\sim}{P}(h_n)=a$. 如果$\{h_n(\cdot),n\geqslant 1\}$为相互独立的随机变量序列，则$\bar{h}_n\xrightarrow{a.e}a$.

§3 F 随机变量

定义3.1 设$\langle \Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$是 F 概率空间，如果 F 函数 $\underset{\sim}{\xi}=(\xi,g):\underset{\sim}{\Omega}\to\underset{\sim}{R}$ 是$\langle \Omega,\mathscr{F},P\rangle$上的 F 可测函数，则称 $\underset{\sim}{\xi}$为 F **随机变量**.

由定义3.1与 F 可测函数的定义及其等价条件，立即可得

定理3.1 设$\langle \Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$是 F 概率空间，$\underset{\sim}{\xi}=(\xi,g)$是 $\underset{\sim}{\Omega}$ 到 $\underset{\sim}{R}$ 的 F 函数. 则下列命题相互等价.

(1) $\underset{\sim}{\xi}=(\xi,g)$是 F 随机变量.

(2) $\xi:\Omega\to R$ 是随机变量，且$\forall\ \lambda\in(0,1]$，$g(\cdot,\lambda):\Omega\to(0,1]$是随机变量.

(3) $\forall\ \mathscr{B}\in\zeta(\mathscr{B})$，$\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)\in\zeta(\mathscr{F})$.

(4) $\forall\ B^{\circ}\in\zeta(\mathscr{B})$，$\alpha\in(0,1]$，$\underset{\sim}{\xi}^{-1}(\alpha B^{\circ})\in\zeta(\mathscr{F})$.

定义3.2 设$\langle \Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$是 F 概率空间，$\underset{\sim}{\xi}=(\xi,g)$为 $\underset{\sim}{\Omega}$ 到 $\underset{\sim}{R}$ 的 F 随机变量，$h\in\zeta(\mathscr{F})$，$P(h)>0$. 如果设 $P_h(\cdot)=P(\cdot|h)$ (显然$\langle \Omega,\mathscr{F},P_h(\cdot)\rangle$为概率空间).

(1) 称 $F_h(x)=P_h\{\xi(\omega)\leqslant x\}$为随机变量 ξ 展布在 F 集 h 上的分布函数.

(2) 称 $E_h(\xi)$为 ξ 展布在 h 上的数学期望；称 $E_h(\underset{\sim}{\xi})=E_{h_g}(\xi)$为 $\underset{\sim}{\xi}$展布在 h 上的数学期望，其中

$$E_h(\xi)=\int\xi(\omega)dP_h.$$

(3) 称 $D_h(\xi)=E_h[(\xi-E_h(\xi))^2]$为 ξ 展布在 h 上的方差；称 $D_h(\underset{\sim}{\xi})=D_{h_g}(\xi)$为 $\underset{\sim}{\xi}$展布在 h 上的方差.

定理3.2　如果 $h\in\zeta(\mathscr{F})$，$\underset{\sim}{P}(h)>0$，则 $F_h(x)$ 在 R 上为单调不减的右连续函数，且 $F_h(+\infty)=1$，$F_h(-\infty)=0$，而且 $E_h(\xi)=\int xdF_h$.

与经典概率方法完全相同，请读者自证.

定理3.3　设 $\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$ 是 F 概率空间，$\underset{\sim}{\xi}=(\xi,g)$ 为 F 随机变量，$h\in\zeta(\mathscr{F})$，$\underset{\sim}{P}(h)>0$. 则下列论断成立.

(1)　$\underset{\sim}{P}(h_g)>0$，且当 $g=i_{(0,1)}$ 时，$\underset{\sim}{P}(h_g)=\underset{\sim}{P}(h)$，$E_h(\underset{\sim}{\xi})=E_h(\xi)$，$D_h(\underset{\sim}{\xi})=D_h(\xi)$.

(2)　$E_h(\underset{\sim}{\xi})=\dfrac{1}{\underset{\sim}{P}(h_g)}\int_h\underset{\sim}{\xi}\,dP=\dfrac{1}{\underset{\sim}{P}(h_g)}\int\xi(\omega)h_g(\omega)dP.$

(3)　$$D_h(\underset{\sim}{\xi})=\frac{1}{\underset{\sim}{P}(h_g)}\int_h\underset{\sim}{\xi}^2d\underset{\sim}{P}-\left[\frac{1}{\underset{\sim}{P}(h_g)}\int_h\underset{\sim}{\xi}\,d\underset{\sim}{P}\right]^2$$
$$=E_h(\underset{\sim}{\xi}^2)-[E_h(\underset{\sim}{\xi})]^2，\text{其中 }\underset{\sim}{\xi}^2=(\xi^2,g).$$

(4)　当 $\xi(\omega)\equiv a$（常数）时，$E_h(\underset{\sim}{\xi})=a$，$D_h(\underset{\sim}{\xi})=0$.

(5)　$\forall\, a\in R$，$E_h(a\,\underset{\sim}{\xi})=aE_h(\underset{\sim}{\xi})$，$D_h(a\,\underset{\sim}{\xi})=a^2D_h(\underset{\sim}{\xi})$.

证明　(1)　由于 $g(x,\cdot):(0,1]\to(0,1]$ 为单调不减连续函数，于是，$\text{supp}h=\text{supp}h_g$，$h_g(\omega)=g(\omega,h(\omega))>0$，$\omega\in\text{Supp}h$. 则由 $\underset{\sim}{P}(h)>0$ 知，$P(\text{Supp}h)>0$ 故 $\underset{\sim}{P}(h_g)=\int_{\text{supp}h}g(\omega,h(\omega))dP>0$.

又当 $g=i_{(0,1)}$ 时，$h_g(\omega)=g[h(\omega)]=h(\omega)$，$\omega\in\text{supp}h$，则 $h_g=h$. 故 $\underset{\sim}{P}(h_g)=\underset{\sim}{P}(h)$，$E_h(\underset{\sim}{\xi})=E_h(\xi)$，$D_h(\underset{\sim}{\xi})=D_h(\xi)$.

(2)　$E_h(\underset{\sim}{\xi})=E_{h_g}(\xi)=\int\xi(\omega)dP_{h_g}=\dfrac{1}{\underset{\sim}{P}(h_g)}\int\xi(\omega)h_g(\omega)dP=\dfrac{1}{\underset{\sim}{P}(h_g)}\int_h\underset{\sim}{\xi}d\underset{\sim}{P}$. 上述证明应用了定理1.6，并由此得到 $\dfrac{dP_h(\omega)}{dP}=\dfrac{1}{\underset{\sim}{P}(h)}h(w)$，$P-a.e.$

(3)　$D_h(\underset{\sim}{\xi})=D_{h_g}(\xi)=\int[\xi(\omega)-E_{h_g}(\xi)]^2dP_{h_g}$

$$=\int \xi^2(\omega)dP_{h_g}-[\int \xi(\omega)dP_{h_g}]^2$$
$$=\frac{1}{\underset{\sim}{P}(h_g)}\int \xi^2(\omega)h_g(\omega)dP-[\frac{1}{\underset{\sim}{P}(h_g)}\int \xi(\omega)h_g(\omega)dP]^2$$
$$=\frac{1}{\underset{\sim}{P}(h_g)}\int_h \underset{\sim}{\xi}^2 d\underset{\sim}{P}-[\frac{1}{\underset{\sim}{P}(h_g)}\int_h \underset{\sim}{\xi} d\underset{\sim}{P}]^2$$
$$=E_h(\underset{\sim}{\xi}^2)-[E_h(\underset{\sim}{\xi})]^2$$

(4) 由(2)与(3)立即得证.

(5) $E_h(a\underset{\sim}{\xi})=E_{h_g}(a\xi)=aE_{h_g}(\xi)=aE_h(\underset{\sim}{\xi})$,

$D_h(a\xi)=D_{h_g}(a\xi)=a^2D_{h_g}(\xi)=a^2D_h(\underset{\sim}{\xi})$. 证毕.

定理3.4 设$\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$为 F 概率空间,$\underset{\sim}{\xi}=(\xi,g)$为 F 随机变量,记 $\xi_*=(\xi,i_{(0,1]})$,$\underset{\sim}{g}=(i_\Omega,g)$,则

(1) ξ_*为$\langle\Omega,\mathscr{F}\rangle$上的 F 可测函数,$\underset{\sim}{g}$为$\langle\Omega,\mathscr{F}\rangle$到$\langle\Omega,\mathscr{F}\rangle$的 F 可测映射,而且 $\underset{\sim}{\xi}=\xi_*\circ \underset{\sim}{g}$.

(2) $\forall\ h\in\zeta(\mathscr{F})$,记 $\underset{\sim}{P}^{(g)}(h)\triangleq\underset{\sim}{P}[g^{-1}(h)]$,其中

$$[\underset{\sim}{g}^{-1}(h)](\omega)=\begin{cases}\max\{\lambda\mid\lambda\in(0,1],g(\omega,\lambda)\leqslant h(\omega)\},&\omega\in \text{supp}h,\\ 0,&\omega\overline{\in}\text{supp}h.\end{cases}$$

那么,$\underset{\sim}{P}^{(g)}$为 $\zeta(\mathscr{F})$上的 PF 测度,而且$\forall\ A\in\mathscr{F}$,有 $P(A)=\underset{\sim}{P}^{(g)}(\chi_A)$. 进一步,如果$\forall\ \lambda\in(0,1]$,$g(\omega,\lambda)=g(\omega,1)\lambda$,$P-a.e$,那么,$\underset{\sim}{P}^{(g)}$为$\zeta(\mathscr{F})$上的 F 概率.

证明 (1) 显然.

(2) 由 $\underset{\sim}{g}^{-1}(0)=0$知,$\underset{\sim}{P}^{(g)}(0)=0$,且 $\underset{\sim}{P}^{(g)}(1)=\underset{\sim}{P}[g^{-1}(1)]=P(1)=1$.

又若$\{h_n,n\geqslant1\}$为两两不相交的 F 事件,则 $\text{supp}(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)=\bigvee_{n=1}^{\infty}\text{supp}h_n$ 且$\{\text{supp}h_n,n\geqslant1\}$两两不相交. 于是,$\underset{\sim}{g}^{-1}(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)=\bigvee_{n=1}^{\infty}g^{-1}(h_n)$,而且$\{\underset{\sim}{g}^{-1}(h_n),n\geqslant1\}$两两不相交,故

$$\underset{\sim}{P}^{(g)}(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_0)=\underset{\sim}{P}[\underset{\sim}{g}^{-1}(\bigvee_{n=1}^{\infty}h_n)]=\underset{\sim}{P}[\bigvee_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{g}^{-1}(h_n)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}[\underset{\sim}{g}^{-1}(h_n)]=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{P}^{(g)}(h_n).$$

所以 $\underset{\sim}{P}^{(g)}$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$ 上的 PF 测度.

如果 $A\in\mathscr{F}$，不难验证，$\underset{\sim}{g}^{-1}(\chi_A)=\chi_A$. 从而得 $\underset{\sim}{P}(A)=\underset{\sim}{P}(\chi_A)=\underset{\sim}{P}^{(g)}(\chi_A)$.

进一步，如果 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$g(\omega,\lambda)=g(\omega,1)\lambda$，$P-a.e$，则 $\underset{\sim}{g}^{-1}(h)(\omega)=\dfrac{1}{g(\omega,1)}h(\omega)$，$P-a.e.$ 则 $\forall\ \lambda\in(0,1]$ 与 $A\in\mathscr{F}$，有

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{P}^{(g)}(\lambda A)&=\underset{\sim}{P}[\underset{\sim}{g}^{-1}(\lambda A)]=\underset{\sim}{P}[\frac{1}{g(\cdot,1)}\lambda A]=\lambda\underset{\sim}{P}[\frac{1}{g(\cdot,1)}A]\\&=\lambda P[\underset{\sim}{g}^{-1}(\chi_A)]=\lambda\underset{\sim}{P}^{(g)}(\chi_A)=\lambda\underset{\sim}{P}(A).\end{aligned}$$

又由 $\underset{\sim}{P}^{(g)}$ 为 PF 测度知，$\underset{\sim}{P}^{(g)}$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$ 上的 F 概率. 证毕.

定义3.3　(1)　$\forall\ B\in\zeta(\mathscr{B})$，记 $\underset{\sim}{F}(B)=\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B))$，称 $\underset{\sim}{F}$ 为 F 随机变量 $\underset{\sim}{\xi}$(在 $\zeta(\mathscr{B})$ 上)的诱导分布.

(2)　$\forall\ B^{\circ}\in\mathscr{B}$，记 $F(B^{\circ})=P[\xi^{-1}(B^{\circ})]$，称 F 为随机变量 ξ(在 $\mathscr{B}$ 上)的诱导分布.

定理3.5　设 $\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$ 为 F 概率空间，$\underset{\sim}{\xi}=(\xi,g)$ 为 F 随机变量，则

(1)　$\underset{\sim}{F}$ 为 $\zeta(\mathscr{B})$ 上的 PF 测度，而且 $\forall\ B\in\zeta(\mathscr{B})$，有

$$\underset{\sim}{F}(B)\doteq\int_{\Omega}\underset{\sim}{g}^{-1}(B\circ\xi)dP=\int_{R}\underset{\sim}{g}^{-1}(B)dF.$$

(2)　$\forall\ B\in\zeta(\mathscr{B})$，$\underset{\sim}{F}(B)>0$，有

$$F_{\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)}(x)=\frac{1}{\underset{\sim}{F}(B)}\int_{R}\underset{\sim}{g}^{-1}(B)\chi_{(-\infty,x]}dF,$$

$$E_{\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)}(\xi)=\frac{1}{\underset{\sim}{F}(B)}\int_{R}x\underset{\sim}{g}^{-1}(B)(x)dF,$$

$$\begin{aligned}D_{\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)}(\xi)=&\frac{1}{\underset{\sim}{F}(B)}\int_{R}x^2g^{-1}(B)(x)dF\\&-[\frac{1}{\underset{\sim}{F}(B)}\int_{R}xg^{-1}(B)(x)dF]^2.\end{aligned}$$

证明 (1) $\underset{\sim}{F}(B)=\underset{\sim}{P}[(\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)]=\underset{\sim}{P}[\underset{\sim}{g}^{-1}(\xi_*^{-1}(B)]$

$$=\underset{\sim}{P}^{(g)}[\xi_*^{-1}(B)]=\underset{\sim}{P}^{(g)}[B\circ\xi]$$

由定理3.4知，$\underset{\sim}{P}^{(g)}$ 为 $\zeta(\mathscr{F})$ 上的 PF 测度，则 $\underset{\sim}{F}$ 为 $\zeta(\mathscr{B})$ 上的 PF 测度，且

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{F}(B)&=\underset{\sim}{P}^{(g)}[B\circ\xi]=\underset{\sim}{P}[\underset{\sim}{g}^{-1}(B\circ\xi)]\\&=\int_{\Omega}g^{-1}[B(\xi(\omega)]dP\\&=\int_{R}g^{-1}[B](x)dF.\end{aligned}$$

(2) $F_{\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)}(x)=P_{\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)}[\xi(\omega)\leqslant x]=\dfrac{\underset{\sim}{P}[\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)\chi_{(\xi(\omega)\leqslant x)}]}{\underset{\sim}{P}[\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)]}$，

由于 $\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)\chi_{(\xi(\omega)\leqslant x)}=\underset{\sim}{\xi}^{-1}[B\cdot\chi_{(-\infty,x]}]$， 则由(1)知

$$\begin{aligned}F_{\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)}(x)&=\frac{1}{\underset{\sim}{F}(B)}\int_{R}\underset{\sim}{g}^{-1}[B\chi_{(-\infty,x]}](u)dF\\&=\frac{1}{\underset{\sim}{F}(B)}\int_{R}\underset{\sim}{g}^{-1}(B)\chi_{(-\infty,x]}dF,\end{aligned}$$

$$E_{\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)}(\xi)=\int_{R}xdF_{\underset{\sim}{\xi}^{-1}(B)}=\frac{1}{\underset{\sim}{F}(B)}\int_{R}x\underset{\sim}{g}^{-1}(B)(x)dF.$$

另一等式同理可证. 证毕.

综上所述，只要 $\underset{\sim}{P}(h)>0$，则 $\langle\Omega,\mathscr{F},\underset{\sim}{P}_h\rangle$ 为一概率空间. 随机变量 ξ 的分布函数就为 F_h. 从而，概率论中的很多结果都可以相应得到. 由于方法同经典概率方法雷同，不必一一叙述，只举一、二说明其基本思想.

定理3.6 设 $\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$ 为 F 概率空间，$h\in\zeta(\mathscr{F})$，$\underset{\sim}{P}(h)>0$，$\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_n\cdots$ 为随机变量序列，令 $\eta_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}D_h(\eta_n)=0$，则 $\forall\ \varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P_h(|\eta_n-E(\eta_n)|\geqslant\varepsilon)=0$. 即

$$\eta_n-E(\eta_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\xi_i-E_h(\xi_i)]\xrightarrow{P_h}0.$$

这就是马尔科夫大数定律的变形，下面再列举独立同分布的中心极限定理的变形.

定理3.7　设$\langle\Omega,\mathscr{F},P;\zeta(\mathscr{F}),\underset{\sim}{P}\rangle$是$F$概率空间，$h\in\zeta(\mathscr{F})$，$\underset{\sim}{P}(h)>0$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$为相互独立且$\forall\ x\in R$，$P_h\{\xi_n(\omega)\leqslant x\}=P_h\{\xi_1(\omega)\leqslant x\}$，$n\geqslant 1$，且$E_h(\xi_1)=a_h$. $D_h(\xi_1)=\sigma_h^2\in(0,+\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}P_h\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i-na_h}{\sqrt{n}\ \sigma_h}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

§4　随机集与F落影分布

设$\langle X,\boldsymbol{B}\rangle$是可测空间，令$\mathscr{P}(\boldsymbol{B})=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}\}$设$\{\boldsymbol{A}_k,k\in K\}$为$\mathscr{P}(\boldsymbol{B})$中的任意子族，$\boldsymbol{A}\in\mathscr{P}(\boldsymbol{B})$. 记

$$\bigcup_{k\in K}\boldsymbol{A}_k=\{A\mid\exists\ k\in K,A\in\boldsymbol{A}_k\},$$

$$\bigcap_{k\in K}\boldsymbol{A}_k=\{A\mid\forall\ k\in K,A\in\boldsymbol{A}_k\},$$

$$\boldsymbol{A}'=\{A\mid A\overline{\in}\boldsymbol{A},A\in\boldsymbol{B}\}.$$

显然，在$\mathscr{P}(\boldsymbol{B})$中上述运算封闭. 进一步，令

$$1_{\boldsymbol{B}}(A)=\{B\in\boldsymbol{B}\mid B\subseteq A\},$$

$$2_{\boldsymbol{B}}(A)=\{B\in\boldsymbol{B}\mid B\supseteq A\}.$$

不难证明，$i_{\boldsymbol{B}}(\cdot)(i=1,2)$具有下列性质.

(1)　$1_{\boldsymbol{B}}(\varnothing)=\{\varnothing\}$，　$1_{\boldsymbol{B}}(X)=\boldsymbol{B}$，

$2_{\boldsymbol{B}}(\varnothing)=\boldsymbol{B}$，　$2_{\boldsymbol{B}}(X)=\{X\}$.

(2)　若$A,B\in\boldsymbol{B}$且$A\subseteq B$，则$1_{\boldsymbol{B}}(A)\subseteq 1_{\boldsymbol{B}}(B)$，$2_{\boldsymbol{B}}(A)\supseteq 2_{\boldsymbol{B}}(B)$.

(3)　$\forall\ \{A_k,k\in K\}\subseteq\mathscr{P}(\boldsymbol{B})$，有

$$1_{\boldsymbol{B}}\Big(\bigcap_{k\in K}A_k\Big)=\bigcap_{k\in K}1_{\boldsymbol{B}}(A_k),$$

$$2_B(\bigcup_{k\in K} A_k) = \bigcap_{k\in K} 2_B(A_k).$$

对于 $\mathscr{H}\subseteq\mathscr{P}(\mathbf{B})$，令

$$\mathscr{H}_{\underset{\vee}{1}} = \{A \in \mathbf{B} | 1_B(A) \in \mathscr{H}\}$$

$$\mathscr{H}_{\underset{\vee}{2}} = \{A \in \mathbf{B} | 2_B(A) \in \mathscr{H}\},$$

有下面定义.

定义4.1 称 $\mathscr{H}$ 为**正规的超 σ 域**. 如果

(1) $\langle\mathscr{H},\bigcup,\bigcap,'\rangle$ 是 $\mathscr{P}(\mathbf{B})$ 上的 $\boldsymbol{\sigma}$ 代数;

(2) $\mathscr{H}_{\underset{\vee}{1}} = \mathscr{H}_{\underset{\vee}{2}} = \mathbf{B}$.

特别，当 $\mathbf{B}=\mathscr{P}(X)$，$\mathscr{H}=\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ 时，$\mathscr{H}$ 为正规的超 σ 域.

对于非空的 $\mathscr{H}^\circ\subseteq\mathscr{P}(\mathbf{B})$，记

$\sigma(\mathscr{H}^\circ)=\bigcap\{\mathscr{H}|\mathscr{H}^\circ\subseteq\mathscr{H}$ 且 $\mathscr{H}$ 为正规的超 σ 域$\}$

$=\{\mathbf{A}\in\mathscr{P}(\mathbf{B})|\forall$ 正规的超 σ 域 $\mathscr{H}\supseteq\mathscr{H}^\circ, \mathbf{A}\in\mathscr{H}\}$.

定理4.1 $\sigma(\mathscr{H}^\circ)$ 是含 $\mathscr{H}^\circ$ 的最小的正规超 σ 域.

证明 首先不难验证 $\sigma(\mathscr{H}^\circ)$ 是 σ 代数. 设 $\mathscr{H}$ 是正规的超 σ 域. $A\in\mathbf{B}$，$i_B(A)\in\mathscr{H}$，从而 $i_B(A)\in\sigma(\mathscr{H}^\circ)$，于是

$$\mathbf{B}\subseteq\{A\in\mathbf{B}|i_B(A)\in\sigma(\mathscr{H}^\circ)\}=\sigma(\mathscr{H}^\circ)_{\underset{\vee}{i}} \qquad (i=1,2)$$

从而 $\sigma(\mathscr{H}^\circ)_{\underset{\vee}{i}}=\mathbf{B}(i=1,2)$. 所以 $\sigma(\mathscr{H}^\circ)$ 为含 $\mathscr{H}^\circ$ 的最小正规超 σ 域. 证毕.

记 $\qquad \hat{\mathbf{B}}=\sigma\{1_B(A),2_B(A)|A\in\mathbf{B}\}$,

称 $\hat{\mathbf{B}}$ 为 $\mathbf{B}$ 生成的正规超 σ 域，$\langle X,\mathbf{B},\hat{\mathbf{B}}\rangle$ 为**超可测空间**.

定义4.2 设 Ω, X 是两个非空集，$\mathbf{D}\subseteq\mathscr{P}(X)$. 称映射 $\Gamma:\Omega\to\mathbf{D}$ 为 Ω 到 X 的 (D) 集值映射.

定义4.3 设 $\langle\Omega,\mathscr{F}\rangle$ 是可测空间，$\langle X,\mathbf{B},\hat{\mathbf{B}}\rangle$ 是超可测空间. 称集值映射 $\Gamma:\Omega\to\mathbf{B}$ 是 $\mathscr{F}$-$\hat{\mathbf{B}}$ **可测的**，如果 $\forall\ \mathbf{A}\in\hat{\mathbf{B}}$ 有 $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\mathbf{A})=\{\omega\in$

$\Omega | \Gamma(\omega) \in \boldsymbol{A}\} \in \mathscr{F}$

如果$\forall\ A \in \boldsymbol{B}$ 有

$$\Gamma^{-1}(i_{\boldsymbol{B}}(A)) = \{\omega \in \Omega | \Gamma(\omega) \in i_{\boldsymbol{B}}(A)\} \in \mathscr{F} \quad (i=1,2)$$

称 Γ 为$(i)(i=1,2)$底可测. 如果(1)底可测与(2)底可测同时成立,称 Γ 为 $\mathscr{F}$-$\boldsymbol{B}$ **底可测的**.

定理4.2　设$\langle\Omega,\mathscr{F}\rangle$为可测空间,$\langle X,\boldsymbol{B},\hat{\boldsymbol{B}}\rangle$为超可测空间. 则集值映射 $\Gamma:\Omega\to\boldsymbol{B}$ 为 $\mathscr{F}-\hat{\boldsymbol{B}}$ 可测的充要条件是 Γ 为 $\mathscr{F}-\boldsymbol{B}$ 底可测的.

证明　必要性. 由于 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 是正规超 σ 域,则

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{\underset{\vee}{i}} = \{A \in \boldsymbol{B} | \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{B}}(A) \in \hat{\boldsymbol{B}}\} = \boldsymbol{B} \qquad (\boldsymbol{i}=1,2)$$

从而

$$\{i_{\boldsymbol{B}}(A) | i=1,2, A \in \boldsymbol{B}\} \subseteq \hat{\boldsymbol{B}}.$$

若 Γ 是 $\mathscr{F}$-$\hat{B}$ 可测的,则 $\Gamma^{-1}[i_B(A)] \in \mathscr{F}$,$(A \in \boldsymbol{B}, i=1,2)$,从而 Γ 是 $\mathscr{F}$-$\boldsymbol{B}$ 底可测的.

充分性. 令

$$\mathscr{H} = \{\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} | \Gamma^{-1}(\boldsymbol{A}) \in \mathscr{F}\}.$$

容易证明,$\mathscr{H}$ 是 б 代数. 如果 Γ 是 $\mathscr{F}$-$\boldsymbol{B}$ 底可测的. 则当 $\mathbf{A} \in \mathbf{B}$ 时,有 $\Gamma[i_B(A)] \in \mathscr{F}(i=1,2)$. 于是,$i_B(A) \in \mathscr{H}$,$(i=1,2)$. 因此

$$\mathscr{H}_{\underset{\vee}{i}} = \{A \in \boldsymbol{B} | i_{\boldsymbol{B}}(A) \in \mathscr{H}\} = \mathbf{B}, \qquad (\mathrm{i}=1,2).$$

且

$$\mathscr{H} \supseteq \{1_{\boldsymbol{B}}(A), 2_{\boldsymbol{B}}(A) | A \in \boldsymbol{B}\},$$

于是

$$\hat{\boldsymbol{B}} = б\{1_{\boldsymbol{B}}(A), 2_{\boldsymbol{B}}(A) | A \in \boldsymbol{B}\} \subseteq \mathscr{H}.$$

即当 $A \in \hat{\boldsymbol{B}}$ 时,必有 $\mathbf{A} \in \mathscr{H}$. 亦即 $\Gamma^{-1}(\mathbf{A}) \in \mathscr{F}$. 所以 Γ 为 $\mathscr{F}$-$\hat{\boldsymbol{B}}$ 可测的. 证毕.

定义4.4　设$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$是概率空间,$\langle X,\boldsymbol{B},\hat{\boldsymbol{B}}\rangle$是超可测空间.

如果集值映射 $\Gamma:\Omega\to\mathbf{B}$ 是 $\mathscr{F}$-$\hat{\mathbf{B}}$ 可测的，称 Γ 为**随机集**. 若令

$$P_\Gamma(A)=P\{\Gamma^{-1}(A)\},\qquad \forall A\in\hat{\mathbf{B}}.$$

$$P_\Gamma^{(i)}(A)=P\{\Gamma^{-1}[i_{\mathbf{B}}(A)]\},\qquad \forall A\in\mathbf{B}.$$

称 $P_\Gamma(\cdot):\hat{\mathbf{B}}\to[0,1]$为 Γ 在 $\hat{\mathbf{B}}$ 上的诱导分布. 称 $P_\Gamma^{(i)}(\cdot)$: $\mathbf{B}\to[0,1]$为 Γ 的(i)落影分布$(i=1,2)$.

定理4.3 诱导分布 P_Γ 是 $\hat{\mathbf{B}}$ 上的概率.

证明 显然有 $P_\Gamma(\mathbf{B})=1,0\leqslant P_\Gamma(A)\leqslant 1,\forall A\in\hat{\mathbf{B}}$.

设$\{A_n,n\geqslant 1\}\subseteq\hat{\mathbf{B}},A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j$,则

$$P_\Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=P\{\Gamma^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\}=P\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma^{-1}(A_n)\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P\{\Gamma^{-1}(A_n)\}=\sum_{n=1}^{\infty}P_\Gamma(A_n).$$

所以 P_Γ 是 $\hat{\mathbf{B}}$ 上的概率. 证毕.

容易验证,P_Γ 还具有下列性质:

(1) 若 $A_1,A_2\in\hat{\mathbf{B}}$,则 $P_\Gamma(A_1)\leqslant P_\Gamma(A_2)$.

(2) $\forall A\in\hat{\mathbf{B}}$,有 $P_\Gamma(A')=1-P_\Gamma(A)$.

定理4.4 落影分布 $P_\Gamma^{(1)}$ 具有下列性质.

(1) $P_\Gamma^{(1)}(X)=1$,且$0\leqslant P_\Gamma^{(1)}(A)\leqslant 1$, $\forall A\in\mathbf{B}$.

(2) 如果 $A,B\in\mathbf{B}$ 且 $A\subseteq B$,则 $P_\Gamma^{(1)}(A)\leqslant P_\Gamma^{(1)}(B)$.

(3) 如果$\{A_n,n\geqslant 1\}\subseteq\mathbf{B}$,则

当 $A_n\supseteq A_{n+1},n\geqslant 1$且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ 时,$P_\Gamma^{(1)}(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P_\Gamma^{(1)}(A_n)$;

当 $A_n\subseteq A_{n+1},n\geqslant 1$,且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ 时,$P_\Gamma^{(1)}(A)\geqslant \lim\limits_{n\to\infty}P_\Gamma^{(1)}(A_n)$,

特别,当 X 是有限集时,最后一个不等式取等号,因而是正规强半测度.

证明 (1)与(2)显然.

(3) 当 $A_n\supseteq A_{n+1}$且 $A_n\downarrow A$ 时,有

$$\begin{aligned}P_{\Gamma}^{(1)}(A) &= P_{\Gamma}^{(1)}(\lim_{n\to\infty} A_n) = P_{\Gamma}^{(1)}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \\ &= P\{\Gamma^{-1}[1_B(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)]\} \\ &= P\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma^{-1}[1_B(A_n)]\} \\ &= \lim_{n\to\infty} P\{\Gamma^{-1}[1_B(A_n)]\} \\ &= \lim_{n\to\infty} P_{\Gamma}^{(1)}(A_n).\end{aligned}$$

类似地,可证明另一不等式. 证毕.

如果$\{\{x\}|x\in X\}\subseteq \mathbf{B}$,记

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\Gamma}(x) &= P\{\Gamma^{-1}[2_B(\{x\})]\} = P\{\omega\in\Omega|\Gamma(\omega)\in 2_B(\{x\})\} \\ &= P\{\omega\in\Omega|x\in\Gamma(\omega)\}.\end{aligned}$$

特别,当 $\Gamma(\omega)=A\in\mathbf{B}$ 时,则$\underset{\sim}{\Gamma}(x)=\chi_A(x)$.

定义4.5　称$\underset{\sim}{\Gamma}$为由$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$上的随机集 Γ 得到的 F 集.

定理4.5　设 F 集 $\underset{\sim}{\Gamma}$ 的隶属函数为 $\underset{\sim}{\Gamma}(\cdot)$,则存在概率空间$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$与超可测空间$\langle X,\mathbf{B},\hat{\mathbf{B}}\rangle$以及随机集 $\Gamma:\Omega\to\mathbf{B}$,使得

$$\underset{\sim}{\Gamma}(x)=P\{\omega\in\Omega|x\in\Gamma(\omega)\},\qquad \forall\, x\in X.$$

证明　设 $\Omega=[0,1]$,$\mathscr{F}=\mathscr{B}_{[0,1]}$是$[0,1]$上的 Borel 集全体,$P$ 为 Lebesgue 测度在 $\mathscr{B}_{[0,1]}$上的限制,$\mathbf{B}=\mathscr{P}(X)$,$\hat{\mathbf{B}}=\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$. 记

$$\Gamma:[0,1]\to\mathscr{P}(X),$$
$$\Gamma(\alpha)=\Gamma_\alpha=\{x\in X|\underset{\sim}{\Gamma}(x)\geqslant\alpha\},\quad \forall\,\alpha\in[0,1].$$

则

$$P\{\alpha\in[0,1]|x\in\Gamma(\alpha)\}=P\{\alpha\in[0,1]|x\in\Gamma_\alpha\}=\underset{\sim}{\Gamma}(x).$$ 证毕.

由此可见,随机集落影分布给出了建立 F 集的隶属函数的一种统计方法.

§5 F 集值映射与 F 集空间的可测结构

本章最后几节讨论随机模糊集的基本内容.并建立相应的理论框架.随机模糊集是既考虑模糊性又具有随机性的一种数学模型.我们主要引入 A^X 型与 B^X 型随机模糊集的概念,并着重系统讨论 B^X 型随机模糊集的一些基本问题.

本节是为以后各节作准备,主要介绍一些以后要用到的概念、记号和引理.

为了方便,以后总假设 X 是非空集,$I=[0,1]$,X 上的 F 集全体记为 $I^X=\{h|h:X\to I\}$. Ω 为另一个非空集.称映射 $T:\Omega\to I^X$ 为 F 集值映射.

定义5.1 设 $T,T_n(n\geqslant 1)$都是 F 集值映射,界定:

$T_1=T_2\Leftrightarrow\forall\ \omega\in\Omega,T_1(\omega)=T_2(\omega)$

$T_1\leqslant T_2\Leftrightarrow\forall\ \omega\in\Omega,T_1(\omega)\leqslant T_2(\omega)$

T_1与 T_2相重$\Leftrightarrow\exists\ \omega\in\Omega$,使 $T_1(\omega)$与 $T_2(\omega)$相重

T_1与 T_2不相重$\Leftrightarrow\forall\ \omega\in\Omega,T_1(\omega)$与 $T_2(\omega)$不相重

$\{T_n,n\geqslant 1\}$相重$\Leftrightarrow\exists\ \omega\in\Omega$,使$\{T_n(\omega)\}$相重

$\{T_n,n\geqslant 1\}$不相重$\Leftrightarrow\forall\ \omega\in\Omega,\{T_n(\omega)\}$不相重.

如果 $*\in\{\wedge,\vee,\hat{+},\cdot,\oplus,\odot,+,-,\triangle\}$,界定$\forall\ \omega\in\Omega$,

$(T_1*T_2)(\omega)=T_1(\omega)*T_2(\omega)$.

$(T_1*T_2*\cdots*T_n*\cdots)(\omega)=T_1(\omega)*T_2(\omega)*\cdots*T_n(\omega)*\cdots$.

(当 $*$ 为直和“$+$”时,要求各项不相重).

$$T'(\omega)=(T(\omega))'.$$

$$(\overline{\lim_{n\to\infty}}T_n)(\omega)=\overline{\lim_{n\to\infty}}[T_n(\omega)].$$

$$(\underline{\lim_{n\to\infty}}T_n)(\omega)=\underline{\lim_{n\to\infty}}[T_n(\omega)]$$

如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}T_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}T_n$就界定$(\lim\limits_{n\to\infty}T_n)(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}[T_n(\omega)]$.

定义5.2　设$\{T_n,n\geqslant 1\}$为F集值映射序列. 如果$\forall\ n\geqslant 1,T_n\leqslant T_{n+1}$(相应地,$T_n\geqslant T_{n+1}$),则称$\{T_n,n\geqslant 1\}$为单调增(相应地,单调减)的. 单增、单减$F$集值映射序列统称为**单调$F$集值映射序列**.

显然,若$\{T_n,n\geqslant 1\}$单增,则$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}T_n$.

若$\{T_n,n\geqslant 1\}$单减,则$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty}T_n$.

由于F集值映射的上面各种关系和运算都归结为F集的相应关系和运算,因此,原则上F集的关系和运算所具有的性质都可以照搬,不再一一列出,以后直接应用而不再作申明.

$\forall\ \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathscr{P}(I^X)$以及$\mathscr{P}(I^X)$的任何子族$\{\boldsymbol{A}_k,k\in K\}$,记

$$\bigcup_{k\in K}\boldsymbol{A}_k=\{h\in I^X\mid\exists\ k\in K,h\in\boldsymbol{A}_k\},$$

$$\bigcap_{k\in K}\boldsymbol{A}_k=\{h\in I^X\mid\forall\ k\in K,h\in\boldsymbol{A}_k\},$$

$$\boldsymbol{A}'=\{h\in I^X\mid h\overline{\in}\boldsymbol{A}\},$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\{h\in\boldsymbol{A}\mid h\overline{\in}\boldsymbol{B}\}.$$

不言而喻,在$\mathscr{P}(I^X)$中上述运算封闭.

对于任何$x\in X$,令

$$C_x:I^X\to I,h\to C_x(h)=h(x).$$

而且对于任何$\lambda\in I$与$W\subseteq I$,记

$$C_x^{-1}(\lambda)=\{h\in I^X\mid h(x)=\lambda\},$$

$$C_x^{-1}(W)=\{h\in I^X\mid h(x)\in W\}$$

一般,任给$G\subseteq X$,令

$$C_G: I^X \to I^G, h \mapsto C_G(h) = \{h(x), x \in G\}.$$

而且对于任何 $\mathbf{d} \in I^G$ 与 $\mathbf{D} \in \mathscr{P}(I^G)$ 有

$$C_G^{-1}(\mathbf{d}) = \{h \in I^X \mid C_G(h) = \mathbf{d}\},$$

$$C_G^{-1}(\mathbf{D}) = \{h \in I^X \mid C_G(h) \in \mathbf{D}\}.$$

如果 $T: \Omega \to I^X$ 为 F 集值映射，则 $C_x \circ T: \Omega \to I$，即 $C_x \circ T \in I^\Omega$，$\forall\ x \in X$. 不难证明下列引理.

引理5.1 设 $T, T_n, n \geqslant 1$，均为 Ω 到 I^X 的 F 集值映射，则$\forall\ x \in X$ 有

(1) $C_x \circ (\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} T_n) = \bigvee\limits_{n} C_x \circ T_n$;

(2) $C_x \circ (\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} T_n) = \bigwedge\limits_{n} C_x \circ T_n$;

(3) $C_x \circ (\hat{\sum\limits_{n}}^{+} T_n) = \hat{\sum\limits_{n}}^{+} C_x \circ T_n$;

(4) $C_x \circ (\prod\limits_{n} T_n) = \prod\limits_{n} C_x \circ T_n$; 特别地，$C_x \circ (hT) = h(x) C_x \circ T. \ (h \in I^X)$;

(5) $C_x \circ (\bigoplus\limits_{n} T_n) = \bigoplus\limits_{n} C_x \circ T_n$;

(6) $C_x \circ (\bigodot\limits_{n} T_n) = \bigodot\limits_{n} C_x \circ T_n$;

(7) $C_x \circ (T_1 - T_2) = C_x \circ T_1 - C_x \circ T_2$;

(8) $C_x \circ (T_1 \triangle T_2) = C_x \circ T_1 \triangle C_x \circ T_2$;

(9) $C_x \circ T' = (C_x \circ T)'$;

(10) $T_1 = T_2 \Leftrightarrow \forall\ x \in X, C_x \circ T_1 = C_x \circ T_2$;

(11) $T_1 \leqslant T_2 \Leftrightarrow \forall\ x \in X, C_x \circ T_1 \leqslant C_x \circ T_2$.

引理5.2 若 $T, T_n, n \geqslant 1$ 为 Ω 到 I^X 的 F 集值映射，则

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} T_n = T \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} C_x \circ T_n = C_x \circ T, \forall\ x \in X$;

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} T_n = T \Leftrightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} C_x \circ T_n = C_x \circ T, \forall\ x \in X$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} C_x \circ T_n = C_x \circ T, \forall\ x \in X$.

引理5.3. 如果 $T_n, n\geqslant 1$ 为 Ω 到 I^X 的 F 集值映射，则

(1) $\{T_n, n\geqslant 1\}$ 不相重 $\Leftrightarrow \forall\ x\in X, \{C_x\circ T_n, n\geqslant 1\}$ 不相重.

(2) 若 $\{T_n, n\geqslant 1\}$ 不相重，则，$\forall\ x\in X, C_x\circ(\sum\limits_n T_n)=\sum\limits_n C_x\circ T_n$.

设 $N=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq X, I^n=\{(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mid \lambda_i\in I, i=1,2,\cdots,n\}$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 及 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\in I^n, \alpha_i\leqslant\beta_i, i=1,2,\cdots,n$. 记

$$J_N^{\leqslant}(\boldsymbol{\alpha})=\{h\in I^X\mid h(x_i)\leqslant\alpha_i, i=1,2,\cdots,n\},$$

$$J_N^{>}(\boldsymbol{\alpha})=\begin{cases}\{h\in I^X\mid h(x_i)>\alpha_i, i=1,2,\cdots,n\}, & \text{当 } \alpha_i<1, i=1,2,\cdots,n\\ \varnothing, & \text{否则.}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}J_N(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]&=J_N^{>}(\boldsymbol{\alpha})\cap J_N^{\leqslant}(\boldsymbol{\beta})\\&=\{h\in I^X\mid \alpha_i<h(x_i)\leqslant\beta_i, i=1,2,\cdots,n\}.\end{aligned}$$

不难证明下面引理.

引理5.3 (1) $J_N^{\leqslant}(\boldsymbol{\alpha})=\bigcap\limits_{i=1}^n C_{x_i}^{-1}[0,\alpha_i]=\bigcap\limits_{i=1}^n J_{\{x_i\}}^{\leqslant}(\alpha_i)=\bigcap\limits_{i=1}^n[J_{\{x_i\}}^{>}(\alpha_i)]'$;

(2) $J_N^{>}(\boldsymbol{\alpha})=\bigcap\limits_{i=1}^n C_{x_i}^{-1}(\alpha_i,1]=\bigcap\limits_{i=1}^n J_{\{x_i\}}^{>}(\alpha_i)=\bigcap\limits_{i=1}^n[J_{\{x_i\}}^{\leqslant}(\alpha_i)]'$;

(3) $j_N(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\bigcap\limits_{i=1}^n C_{x_i}^{-1}(\alpha_i,\beta_i]=\bigcap\limits_{i=1}^n J_{\{x_i\}}(\alpha_i,\beta_i]$;

(4) $J_{\{x\}}(\alpha,\beta]=J_{\{x\}}^{\leqslant}(\beta)-J_{\{x\}}^{\leqslant}(\alpha)=J_{\{x\}}^{>}(\alpha)-J_{\{x\}}^{>}(\beta)$, $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1)$;

(5) $J_{\{x\}}^{\leqslant}(\alpha)=(J_{\{x\}}^{>}(\alpha))'=(J_{\{x\}}(\alpha,1])'$, $(\alpha\in I)$.

又对于任何 $h\in I^X, A\in\mathscr{P}(X), \lambda\in I$ 记

$$J_X^{\leqslant}(h)=\{g\in I^X\mid g\leqslant h\},$$

$$J_X^{\geqslant}(h)=\{g\in I^X\mid g\geqslant h\},$$

$$J_\lambda^{\subseteq}(A)=\{g\in I^X\mid g_\lambda\subseteq A\},$$

$$J_{\lambda}^{\supseteq}(A)=\{g\in I^X \mid g_\lambda\supseteq A\}.$$

进一步,记

$$\mathscr{J}^{\leqslant}=\{J_N^{\leqslant}(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in I^n, N \text{ 为 } X \text{ 的 } n \text{ 元子集}, n\geqslant 1\},$$

$$\mathscr{J}^{>}=\{J_N^{>}(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in I^n, N \text{ 为 } X \text{ 的 } n \text{ 元子集}, n\geqslant 1\},$$

$$\mathscr{J}=\{J_N(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]\mid\boldsymbol{\alpha}\in I^n,\boldsymbol{\beta}\in I^n,\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{\beta}, N \text{ 为 } X \text{ 的 } n \text{ 元子集}, n\geqslant 1\}$$

$$\mathscr{J}_X^{\leqslant}=\{J_X^{\leqslant}(h)\mid h\in I^X\},$$

$$\mathscr{J}_X^{\geqslant}=\{J_X^{\geqslant}(h)\mid h\in I^X\},$$

$$\mathscr{J}_I^{\subseteq}=\{J_X^{\subseteq}(A)\mid A\in\mathscr{P}(X),\lambda\in I\},$$

$$\mathscr{J}_I^{\supseteq}=\{J_X^{\supseteq}(A)\mid A\in\mathscr{P}(X),\lambda\in I\}.$$

$\sigma(\mathscr{E})=\bigcap\{\mathscr{L}\mid\mathscr{L}\supseteq\mathscr{E},\mathscr{L}$ 为 σ 代数$\}$即 $\sigma(\mathscr{E})$为包含集族 $\mathscr{E}$ 的最小 σ 代数.

引理5.4 $\mathscr{J}^{\leqslant}\subseteq\mathscr{J}_X^{\leqslant}$,且当 X 为有限集时,$\mathscr{J}^{\leqslant}=\mathscr{J}_X^{\leqslant}$.

证明 因为 $\mathscr{J}^{\leqslant}$中的任何元素 $J_N^{\leqslant}(\boldsymbol{\alpha})$都可以写成 $J_X^{\leqslant}(h)$的形式,只要令

$$h(x)=\begin{cases}\alpha_i, & x=x_i\in N,\\ 1, & x\notin N.\end{cases}$$

所以 $\mathscr{J}^{\leqslant}\subseteq\mathscr{J}_X^{\leqslant}$. 而且当 X 为有限集时,$J_X^{\leqslant}(h)=\bigcap\limits_{x\in X}J_{\{x\}}^{\leqslant}(h\{x\})$,则 $J_X^{\leqslant}(h)\in\mathscr{J}^{\leqslant}$,于是又有 $\mathscr{J}_X^{\leqslant}\subseteq\mathscr{J}^{\leqslant}$. 所以 $\mathscr{J}^{\leqslant}=\mathscr{J}_X^{\leqslant}$. 证毕.

引理5.5
$$\sigma(\mathscr{J})=\sigma(\mathscr{J}^{\leqslant})=\sigma(\mathscr{J}^{\leqslant})=\sigma(\mathscr{J}^{\leqslant}\cup\mathscr{J}^{>})$$
$$=\sigma(\dot{\mathscr{J}}^{\leqslant})=\sigma(\dot{\mathscr{J}}^{>})=\sigma(\dot{\mathscr{J}}),$$

其中 $\dot{\mathscr{J}}^{\leqslant}=\{\mathscr{J}_{\{x\}}^{\leqslant}(\alpha)\mid x\in X,\alpha\in I\}$,$\dot{\mathscr{J}}^{>}=\{J_{\{x\}}^{>}(\alpha)\mid x\in X,\alpha\in I\}$,

$$\dot{\mathscr{J}}=\{J_{\{x\}}(\alpha,\beta]\mid x\in X,0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1\}.$$

证明 $\forall\ J_N^{\leqslant}(\boldsymbol{\alpha})\in\mathscr{J}^{\leqslant}$,由引理5.3(1)知

$$J_N^{\leqslant}(\boldsymbol{\alpha})=\bigcap_{i=1}^{n}[J_{\{x_i\}}^{>}(\alpha_i)]'\in\sigma(\mathscr{J}^{>})$$

则 $\mathscr{J}^{\leqslant}\subseteq\sigma(\mathscr{J}^{>})$,从而 $\sigma(\mathscr{J}^{\leqslant})\subseteq\sigma(\mathscr{J}^{>})$. 同理可证,$\sigma(\mathscr{J}^{>})\subseteq$

$\sigma(\mathscr{J}^{\leq})$，所以 $\sigma(\mathscr{J}^{\leq})=\sigma(\mathscr{J}^{>})$. 由此可得 $\mathscr{J}^{\leq}\cup\mathscr{J}^{>}\subseteq\sigma(\mathscr{J}^{\leq})$. 从而 $\sigma(\mathscr{J}^{\leq}\cup\mathscr{J}^{>})\subseteq\sigma(\mathscr{J}^{\leq})$. 显然又有 $\sigma(\mathscr{J}^{\leq})\subseteq\sigma(\mathscr{J}^{\leq}\cup\mathscr{J}^{>})$. 于是得 $\sigma(\mathscr{J}^{\leq})=\sigma(\mathscr{J}^{\leq}\cup\mathscr{J}^{>})$.

又 $\forall\ J_X(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\bigcap_{i=1}^{n}J_{\{x_i\}}(\alpha_i,\beta_i]=\bigcap_{i=1}^{n}[J_{\{x_i\}}^{\leq}(\beta_i)-J_{\{x_i\}}^{\leq}(\alpha_i)]\in\sigma(\mathscr{J}^{\leq})$，则 $\sigma(\mathscr{J})\subseteq\sigma(\mathscr{J}^{\leq})$，又 $\forall\ J_X^{\leq}(\boldsymbol{\alpha})=\bigcap_{i=1}^{n}[J_{\{x_i\}}(\alpha,1]]'\in\sigma(\mathscr{J})$. 从而，得证 $\sigma(\mathscr{J}^{\leq})=\sigma(\mathscr{J})$.

同理可证，$\sigma(\mathscr{J}^{\leq})=\sigma(\dot{\mathscr{J}}^{\leq})$，$\sigma(\mathscr{J}^{>})=\sigma(\dot{\mathscr{J}}^{>})$，$\sigma(\mathscr{J})=\sigma(\dot{\mathscr{J}})$.

综合上述，即得所欲证. 证毕.

引理5.6　$\sigma(\mathscr{J}_X^{\leq}\cup\mathscr{J}_X^{\geq})=\sigma(\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\subseteq}\cup\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\supseteq})$.

证明　对于任何 $J_X^{\leq}(h)\in\mathscr{J}_X^{\leq}$，因为

$$g\in J_X^{\leq}(h)\Leftrightarrow g\leq h\Leftrightarrow\forall\ \lambda\in Q\cap I,\dot{g}_\lambda\subseteq\dot{h}_\lambda\Leftrightarrow g\in\bigcap_{\lambda\in Q\cap I}J_{\dot{X}}^{\subseteq}(\dot{h}_\lambda).$$

则 $J_X^{\leq}(h)=\bigcap_{\lambda\in Q\cap I}J_{\dot{X}}^{\subseteq}(\dot{h}_\lambda)\in\sigma(\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\subseteq}\cup\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\supseteq})$. 从而，$\mathscr{J}_X^{\leq}\subseteq\sigma(\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\subseteq}\cup\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\supseteq})$. 同理可证，$\mathscr{J}_X^{\geq}\subseteq\sigma(\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\subseteq}\cup\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\supseteq})$. 于是，$\sigma(\mathscr{J}_X^{\leq}\cup\mathscr{J}_X^{\geq})\subseteq\sigma(\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\subseteq}\cup\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\supseteq})$.

又 $\forall\ J_{\dot{X}}^{\subseteq}(A)\in\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\subseteq}$，$J_{\dot{X}}^{\supseteq}(A)\in\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\supseteq}$. 令 $h^{(1)}=\chi_A\vee\lambda A'$，$h^{(2)}=\lambda A$. 因为

$$g\in J_{\dot{X}}^{\subseteq}(A)\Leftrightarrow g_\lambda\subseteq A\Leftrightarrow\forall\ \alpha\in I，当\ \alpha<\lambda\ 时，g_\alpha\subseteq X，当\ \alpha\geq\lambda\ 时，$$

$$\dot{g}_\alpha\subseteq A\Leftrightarrow\forall\ \alpha\in I,\dot{g}_\alpha\subseteq\dot{h}_\alpha^{(1)}\Leftrightarrow g\leq h^{(1)}\Leftrightarrow g\in J_X^{\leq}(h^{(1)}).$$

则 $J_{\dot{X}}^{\subseteq}(A)=J_X^{\leq}(h^{(1)})\in\sigma(\mathscr{J}_X^{\leq}\cup\mathscr{J}_X^{\geq})$. 从而，$\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\subseteq}\subseteq\sigma(\mathscr{J}_X^{\leq}\cup\mathscr{J}_X^{\geq})$. 同理可证，$J_{\dot{X}}^{\supseteq}(A)=J_X^{\geq}(h^{(2)})\in\sigma(\mathscr{J}_X^{\leq}\cup\mathscr{J}_X^{\geq})$. 从而，$\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\supseteq}\subseteq\sigma(\mathscr{J}_X^{\leq}\cup\mathscr{J}_X^{\geq})$. 于是又有 $\sigma(\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\subseteq}\cup\mathscr{J}_{\dot{I}}^{\supseteq})\subseteq\sigma(\mathscr{J}_X^{\leq}\cup\mathscr{J}_X^{\geq})$. 综合上述，引理得证. 证毕.

引理5.7　如果记 $\mathscr{A}^X=\sigma(\mathscr{J}_X^{\leq}\cup\mathscr{J}_X^{\geq})$，$\mathscr{B}^X=\sigma(\mathscr{J}^{\leq})$，则 $\mathscr{B}^X\subseteq\mathscr{A}^X$，且当 X 为有限或可数集时，$\mathscr{B}^X=\mathscr{A}^X$.

证明 由引理5.4知，$\mathscr{J}^{\leqslant}\subseteq\mathscr{J}_X^{\leqslant}\subseteq\mathscr{J}_X^{\leqslant}\cup\mathscr{J}_X^{\geqslant}$，则 $\mathscr{B}^X\subseteq\mathscr{A}^X$.

当 $X=\{x_1\cdots,x_n,\cdots\}$时，则$\forall\ h\in I^X$，有

$$J_X^{\leqslant}(h)=\{g\in I^X\mid g(x_i)\leqslant h(x_i),x_i\in X\}=\bigcap_{i=1}^{\infty}J_{\{x_i\}}^{\leqslant}(h(x_i)).$$

故 $J_X^{\leqslant}(h)\in\mathscr{J}_X^{\leqslant}$，从而 $\mathscr{J}_X^{\leqslant}\subseteq\mathscr{B}^X$.

又$\forall\ h\in I^X$，令 $h_0=\{x\in X\mid h(x)>0\}\subseteq X$，而且对于任何 $x_0\in h_0$，存在$\{\lambda_n^{(i)},n\geqslant 1\}\subseteq I$，$0<\lambda_n^{(i)}<\lambda_{n+1}^{(i)}\ \forall\ n\geqslant 1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n^{(i)}=h(x_i)$. 即 $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{(i)}=h(x_i)$. 于是

$$\begin{aligned}J_X^{\geqslant}(h)&=\{g\in I^X\mid g(x_i)\geqslant h(x_i),x_i\in X\}\\&=\{g\in I^X\mid g(x_i)\geqslant h(x_i),x_i\in h_0\}\\&=\bigcap_{x_i\in h_0}\{g\in I^X\mid g(x_i)\geqslant h(x_i)\}\\&=\bigcap_{x_i\in h_0}\{g\in I^X\mid g(x_i)\geqslant\bigvee_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{(i)}\}\\&=\bigcap_{x_i\in h_0}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{g\in X^I\mid g(x_i)>\lambda_n^{(i)}\}\\&=\bigcap_{x_i\in h_0}\bigcap_{n=1}^{\infty}J_{\{x_i\}}^{>}(\lambda_n^{(i)}).\end{aligned}$$

由 $J_{\{x_i\}}^{>}(\lambda_n^{(i)})\in\mathscr{J}^{>}$，则 $J_X^{\geqslant}(h)\in\mathscr{B}^X$，从而 $\mathscr{J}_X^{\geqslant}\subseteq\mathscr{B}^X$.

综合上述，$\mathscr{J}_X^{\leqslant}\cup\mathscr{J}_X^{\geqslant}\subseteq\mathscr{B}$，则 $\mathscr{A}^X\subseteq\mathscr{B}^X$. 于是 $\mathscr{B}^X=\mathscr{A}^X$. 证毕.

定义5.3 称$\langle I^X,\mathscr{A}^X\rangle$为 $\mathscr{A}^X$ **型可测空间**，$\langle I^X,\mathscr{B}^X\rangle$为 $\mathscr{B}^X$ **型可测空间**.

§6　随机 F 集的定义及其性质

定义6.1　设$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$是概率空间，$F$ 集值映射

$$T:\Omega\to I^X,\qquad \omega\to T(\omega).$$

(1)　如果T是$\mathscr{F}$-$\mathscr{A}^X$可测，即$\forall\ \boldsymbol{A}\in\mathscr{A}^X$有$T^{-1}(\boldsymbol{A})=\{\omega\in\Omega\,|\,T(\omega)\in\boldsymbol{A}\}\in\mathscr{F}$. 则称$T$为 A^X **型随机** F **集**(简称为 A^XRF 集).

(2)　如果T是$\mathscr{F}-\mathscr{B}^X$可测，即$\forall\ \boldsymbol{A}\in\mathscr{B}^X$，有$T^{-1}(\boldsymbol{A})\in\mathscr{F}$称$T$为 B^X **型随机** F **集**(简称为 B^XRF 集)

分别以$\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$与$\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$记 A^XRF 集与 B^XRF 集全体.

定理6.1　$\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，特别，当 X 为有限或可数集时，$\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)=\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$.

证明　如果$T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$. 由引理5.7知，$\mathscr{B}^X\subseteq\mathscr{A}^X$，则

$$\forall\ \boldsymbol{A}\in\mathscr{B}^X\Rightarrow\boldsymbol{A}\in\mathscr{A}^X\Rightarrow T^{-1}(\boldsymbol{A})\in\mathscr{F}$$

所以$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 从而，$\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，再由引理5.7后半部分立刻得证本定理后半部分. 证毕.

定理6.2　下列三条相互等价：

(1)　$T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$.

(2)　$\forall\ \boldsymbol{D}\in\mathscr{J}_{\underline{X}}^{<}\cup\mathscr{J}_{\underline{X}}^{>}$，有$T^{-1}(\boldsymbol{D})\in\mathscr{F}$.

(3)　$\forall\ \boldsymbol{B}\in\mathscr{J}_{\underline{I}}^{\subsetneq}\cup\mathscr{J}_{\underline{I}}^{\supsetneq}$，有$T^{-1}(\boldsymbol{B})\in\mathscr{F}$.

证明　(1)⇒(2)，(1)⇒(3)　显然.

(2)⇒(1)　令

$$\mathscr{K}=\{\boldsymbol{A}\in\mathscr{P}(I^X)\,|\,T^{-1}(\boldsymbol{A})\in\mathscr{F}\}.$$

由(2)知$\mathscr{K}\supseteq\mathscr{J}_{\underline{X}}^{<}\cup\mathscr{J}_{\underline{X}}^{>}$. 不难验证，$\mathscr{K}$是 I^X 上的 σ 代数，故$\mathscr{K}\supseteq\sigma(\mathscr{J}_{\underline{X}}^{\leqslant}\cup\mathscr{J}_{\underline{X}}^{\geqslant})=\mathscr{A}^X$. 因此，$\forall\ \boldsymbol{A}\in\mathscr{A}^X$有$T^{-1}(\boldsymbol{A})\in\mathscr{F}$，即$T\in$

$\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$.

(3)⇒(1) 雷同于(2)⇒(1)的证法. 证毕.

定理6.3 设 F 集值映射 $T:\Omega\to I^X$，令

$$\hat{\mathscr{P}}(X)=\sigma\{1_{\mathscr{P}(X)}(A),2_{\mathscr{P}(X)}(A)\mid A\in\mathscr{P}(X)\},$$

$$T_\alpha(\omega)=(T(\omega))_\alpha,T_{\underset{\cdot}{\alpha}}(\omega)=(T(\omega))_{\underset{\cdot}{\alpha}},\forall\ \omega\in\Omega,\alpha\in I.$$

(1) 如果$\forall\ \alpha\in I,T_\alpha:\Omega\to\mathscr{P}(X)$是随机集，即$\forall\ A\in\hat{\mathscr{P}}(X)$，有 $T_\alpha^{-1}(A)\in\mathscr{F}$. 则 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$.

(2) 如果 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$，则$\forall\ \alpha\in I,T_{\underset{\cdot}{\alpha}}:\Omega\to\mathscr{P}(X)$为(1)底可测；$T_\alpha:\Omega\to\mathscr{P}(X)$为(2)底可测.

证明 (1) 如果$\forall\ \alpha\in I,T_\alpha$ 为随机集，任取 $h\in I^X$，则

$$\bigcap_{\alpha\in Q\cap I}\{\omega\in\Omega\mid T_\alpha(\omega)\leqslant h_\alpha\}=\{\omega\in\Omega\mid\forall\ \alpha\in Q\cap I,T_\alpha(\omega)\leqslant h_\alpha\}$$
$$=\{\omega\in\Omega\mid T(\omega)\leqslant h\}$$
$$=\{\omega\in\Omega\mid T(\omega)\in J_X^{\leqslant}(h)\}=T^{-1}(J_X^{\leqslant}(h)).$$

于是，$T^{-1}(J_X^{\leqslant}(h))\in\mathscr{F}$. 同理可证，$T^{-1}(J_X^{\geqslant}(h))\in\mathscr{F}$. 从而，对于任何 $D\in\mathscr{J}_X^{\leqslant}\cup\mathscr{J}_X^{\geqslant}$，$T^{-1}(D)\in\mathscr{F}$. 再由定理6.2知，$T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$.

(2) 如果 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$，$\forall\ \alpha\in I$，若 $\alpha=1$，则 $T_{\underset{\cdot}{\alpha}}\equiv\varnothing$，显然(1)底可测. 若 $\alpha\in[0,1)$，则对于任何 $A\in\mathscr{P}(X)$，有

$$T_{\underset{\cdot}{\alpha}}^{-1}(1_{\mathscr{P}(X)}(A))=\{\omega\in\Omega\mid T_{\underset{\cdot}{\alpha}}(\omega)\subseteq A\}$$
$$=\{\omega\in\Omega\mid T(\omega)\in J_{\underset{\cdot}{\alpha}}^{\subseteq}(A)\}$$
$$=T^{-1}(J_{\underset{\cdot}{\alpha}}^{\subseteq}(A)).$$

由定理6.2知，$T^{-1}(J_{\underset{\cdot}{\alpha}}^{\subseteq}(A))\in\mathscr{F}$. 从而 $T_{\underset{\cdot}{\alpha}}$为(1)底可测.

同理可证$\forall\ \alpha\in I,T_\alpha$ 为(2)底可测.

应用定理6.3(1)的类似证法，立即可得下述推论.

推论 设 T 为 Ω 到 I^X 的 F 集值映射，如果$\forall\ \alpha\in I,T_{\underset{\cdot}{\alpha}}(\omega)$为随

机集，即$\forall\ A\in\overset{\wedge}{\mathscr{P}}(X)$，有$T_{a}^{-1}(A)\in\mathscr{F}$，则$T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^{X})$.

定理6.4　设$\forall\ \alpha\in I,\Gamma^{(\alpha)}:\Omega\to\mathscr{P}(X)$是随机集，而且$\forall\ \omega\in\Omega$，$\bigcap\limits_{\beta<\alpha}\Gamma^{(\beta)}(\omega)=\Gamma^{(\alpha)}(\omega),T(\omega)=\bigvee\limits_{\alpha\in I}\alpha\Gamma^{(\alpha)}(\omega)$，则$T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^{X})$，而且$T_{\alpha}=\Gamma^{(\alpha)}$.

证明　$\forall\ \omega\in\Omega$显然有$T_{\alpha}(\omega)=\Gamma^{(\alpha)}(\omega)$. 从而$T_{\alpha}=\Gamma^{(\alpha)}$. 于是，$\forall\ \alpha\in I,T_{\alpha}:\Omega\to\mathscr{P}(X)$为随机集. 由定理6.3，立即得$T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^{X})$. 证毕.

由定理6.3的推论立即得下述推论.

推论　设$\forall\ \alpha\in I,\Gamma^{(\alpha)}:\Omega\to\mathscr{P}(X)$是随机集，而且$\forall\ \omega\in\Omega$，$\bigcup\limits_{\beta>\alpha}\Gamma^{(\beta)}=\Gamma^{(\alpha)},T(\omega)=\bigvee\limits_{\alpha\in I}\alpha\Gamma^{(\alpha)}$，则$T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^{X})$，而且$T_{\alpha}=\Gamma^{(\alpha)}$.

定理6.5　$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^{X})$的充要条件是$\forall\ J^{\circ}\in\mathscr{J}^{\leqslant},T^{-1}(J^{\circ})\in\mathscr{F}$.

证明　类似于定理6.2的证明.

定理6.6　$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^{X})$的充要条件是对于$X$的任何有限非空子集$N,C_{N}\circ T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^{N})$.

证明　必要性. 设$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^{X})$. 对于任何$N=\{x_{1},x_{2},\cdots,x_{n}\}\subseteq X$与$(\alpha_{1},\alpha_{2},\cdots,\alpha_{n})\in I^{n}$，有

$$\begin{aligned}&\{\omega\in\Omega\mid[T(\omega)](x_{i})\leqslant\alpha_{i},i=1,2,\cdots,n\}\\&\qquad=T^{-1}(J_{N}^{\leqslant}(\alpha_{1},\alpha_{2},\cdots,\alpha_{n}))\qquad(1)\end{aligned}$$

由引理5.4知，$\mathscr{B}^{N}=\sigma(\mathscr{J}_{N}^{\leqslant})$即$\forall\ N_{\circ}\neq\varnothing,N_{\circ}\subseteq N,J^{\circ}=J_{N_{\circ}}^{\leqslant}(\cdot)$都可以写成$\mathscr{J}_{N}^{\leqslant}$中元素的形式，即

$$J^{\circ}=\{h\in I^{X}\mid h(x_{i})\leqslant\alpha_{i},x_{i}\in N\}=\{h\in I^{N}\mid h(x_{i})\leqslant\alpha_{i},x_{i}\in N\}.$$

因此

$$\begin{aligned}(C_{N}\circ T)^{-1}(J^{\circ})&=\{\omega\in\Omega\mid(C_{N}\circ T)(\omega)\in J^{\circ}\}\\&=\{\omega\in\Omega\mid[C_{N}\circ T)(\omega)](x_{i})\leqslant\alpha_{i},x_{i}\in N\}\end{aligned}$$

$$=\{\omega\in\Omega \mid C_N(T(\omega))(x_i)\leqslant\alpha_i, x_i\in N\}$$
$$=\{\omega\in\Omega \mid [T(\omega)](x_i)\leqslant\alpha_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

由(1)式知，$(C_N\circ T)^{-1}(J^\circ)\in\mathscr{F}$，再由定理6.5(取 $X=N$ 的情形)知，$C_N\circ T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^N)$.

充分性. 如果对于任何 $N=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq X$ 有 $C_N\circ T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^N)$，则对于任何 $J^\circ\in\mathscr{J}_N^{\not\leqslant}\subseteq\mathscr{B}^N$，有

$$\{\omega\in\Omega \mid C_N{}^\circ(T(\omega))\in J^\circ\}=(C_N{}^\circ T)^{-1}(J^\circ)\in\mathscr{F} \qquad (2)$$

(因为 $\mathscr{B}^N=\sigma(\mathscr{J}_N^{\not\leqslant})$). 于是，对于任何 $J_N^{\not\leqslant}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathscr{J}^{\angle}\subseteq\mathscr{B}^X$，有

$$T^{-1}(J_N^{\not\leqslant}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))=\{\omega\in\Omega \mid T(\omega)\in J_N^{\not\leqslant}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\}$$
$$=\{\omega\in\Omega \mid [T(\omega)](x_i)\leqq\alpha_i, i=1,\cdots,n\}$$
$$=\{\omega\in\Omega \mid C_N[T(\omega)](x_i)\leqq\alpha_i, i=1,2,\cdots,n\}.$$

而且存在 $J^\circ\in\mathscr{J}_N^{\not\leqslant}$，使得

$$\{\omega\in\Omega \mid C_N[T(\omega)](x_i)\leqq\alpha_i, x_i\in N\}=\{\omega\in\Omega \mid C_N[T(\omega)]\in J^\circ\}.$$

由(2)式得 $T^{-1}(J_N^{\not\leqslant}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))\in\mathscr{F}$，所以由定理6.5知，$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，证毕.

定理6.7 $T\in\mathscr{P}(\mathscr{B}^X)$的充要条件是$\forall\ x\in X$，

$$C_x\circ T:\Omega\to I,$$
$$\omega\mapsto(C_x\circ T)(\omega)=C_x(T(\omega))$$

是 F 事件，即 $C_x\circ T\in\zeta(\mathscr{F})$.

证明 必要性. 设 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 则对于任何 $x\in X,\lambda\in I$，

$$(C_x\circ T)^{-1}([0,\lambda])=T^{-1}(C_x{}^{-1}[0,\lambda])=T^{-1}(J_{\{x\}}^{\not\leqslant}(\lambda))\in\mathscr{F},$$

故 $C_x\circ T\in\zeta(\mathscr{F})$.

充分性. 设$\forall\ x\in T, C_x\circ T\in\zeta(\mathscr{F})$. 则$\forall\ N=\{x_1,\cdots,x_n\}\subseteq X$ 与 $J_x^{\not\leqslant}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\in\mathscr{J}^{\angle}$，有

$$T^{-1}(J_N^{\not\leqslant}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))$$

$$=T^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n}J_{\not\leq\{x_i\}}(\alpha_i))$$

$$=\bigcap_{i=1}^{n}T^{-1}(J_{\not\leq\{x_i\}}(\alpha_i))=\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega\in\Omega\,|\,T(\omega)\in J_{\not\leq\{x_i\}}(\alpha_i)\}'$$

$$=\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega\in\Omega\,|\,C_{x_i}(T(\omega))\leqslant\alpha_i\}=\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega\in\,|\,(C_{x_i}\circ T)(\omega)\leqslant\alpha_i\}.$$

由于各$\{\omega\in\Omega\,|\,(C_{x_i}\circ T)(\omega)\leqslant\alpha_i\}\in\mathscr{F}$,所以 $T^{-1}(J_{\not\leq N}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))\in\mathscr{F}$. 于是,由定理6.5知,$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 证毕.

定义6.2 设 X 为非空集,$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$为概率空间,如果映射 $\Pi:X\times\Omega\to I$,满足条件:$\forall\ x\in X,\Pi(x,\cdot)$是 Ω 到 I 的 $\mathscr{F}$ 可测函数,即 $\Pi(x,\cdot)\in\zeta(\mathscr{F})$,称 Π 是 X 上的**概率集**.

概率集概念是由 *K. Hirota* 最先提出的. 概率集 Π 实际上是 X 到 Ω 的 F 关系,且$\forall\ x\in X,\Pi(x,\cdot)$是 F 事件. 下面的定理6.8构通了 B^X 型 随机 F 集与概率集这两个概念之间的等价关系.

定理6.8 设映射 $\Pi:X\times\Omega\to I$ 与 F 集值映射 $T:\Omega\to I^X$ 满足条件 $\Pi(x,\omega)=(C_x\circ T)(\omega),\forall\ (x,\omega)\in X\times\Omega$,则 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$的充要条件是 Π 是 X 上的概率集.

证明 由定理6.7立即得

$$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)\Leftrightarrow\forall\ x\in X,\Pi(x,\cdot)=(C_x\circ T)(\cdot)\in\zeta(\mathscr{F})$$

$\Leftrightarrow\Pi$ 是 X 上的概率集. 证毕.

推论 如果 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$,则

(1) 对于 $N=\{x_1,\cdots,x_n\}\subseteq X,C_N\circ T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^N)$;

(2) $\forall\ x\in X,C_x\circ T:\Omega\to I$ 是 F 事件;

(3) $\forall\ x\in X$,令 $\Pi(x,\cdot)=(C_X\circ T)(\cdot)$,则 Π 是 X 上的概率集.

证明 由 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$与定理6.1可知,$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 由定理6.6得证(1). 由定理6.7得证(2). 再由定理6.8得证(3). 证毕.

定理6.9 (1) $\forall\ h\in I^X$. 若 $T(\omega)\equiv h,\forall\ \omega\in\Omega$,则 $T\in$

$\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$.

(2) 若 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$，则 $T'\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$.

证明 (1) $\forall\ h^\circ\in I^X$，则

当 $h\leqslant h^\circ$时，$T^{-1}[J_X^{\leqslant}(h^\circ)]=\{\omega\in\Omega\,|\,T(\omega)\leqslant h^\circ\}=\Omega\in\mathscr{F}$；

当 $h\nleqslant h^\circ$时，$T^{-1}[J_X^{\leqslant}(h^\circ)]=\{\omega\in\Omega\,|\,T(\omega)\leqslant h^\circ\}=\varnothing\in\mathscr{F}$.

于是，$T^{-1}[J_X^{\leqslant}(h^\circ)]\in\mathscr{F}$. 同理可证，$T^{-1}(J_X^{\geqslant}(h^\circ)\in\mathscr{F}$. 如此$\forall\ \boldsymbol{D}\in\mathscr{J}_X^{\geqslant}\cup\mathscr{J}_X^{\leqslant}$ 有 $T^{-1}(\boldsymbol{D})\in\mathscr{F}$. 由定理6.2知，$T(\cdot)\equiv h\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$.

(2) $\forall\ T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$，则$\forall\ h\in I^X$，

$$
\begin{aligned}
(T')^{-1}[J_X^{\leqslant}(h)]&=\{\omega\in\Omega\,|\,T'(\omega)\leqslant h\}\\
&=\{\omega\in\Omega\,|\,T(\omega)\geqslant h'\}\\
&=T^{-1}[J_X^{\geqslant}(h')]\in\mathscr{F}.
\end{aligned}
$$

同理，$(T')^{-1}[J_X^{\geqslant}(h)]=T^{-1}[J_X^{\leqslant}(h')]\in\mathscr{F}$. 由定理6.2得证 $T'\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$. 证毕.

定理6.10 (1) $\forall\ h\in I^X$，若 $T(\cdot)\equiv h$，则 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$.

(2) 若 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，则 $T'\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$.

(3) $\forall\ *\in\{\vee,\wedge,\hat{+},\cdot,\oplus,\odot,\sum\}$，$\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$对于有限 $*$ 与可列 $*$ 运算封闭.

(4) 若 $T_1,T_2\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，则 $T_1-T_2,T_1\triangle T_2\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$.

(5) 若$\{T_n,n\geqslant1\}$为 $\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$中的单调序列，则$\lim\limits_{n\to\infty}T_n\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$.

证明 (1) 由于 $\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，以及定理6.9(1)立即得证.

(2) $\forall\ T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)\Rightarrow C_x\circ T\in\zeta(\Omega)\Rightarrow C_x\circ T'=(C_x\circ T)'\in\zeta(\mathscr{F})\Rightarrow T'\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$.

(3) 由引理5.1与定理6.7，其方法类似于(2). 只证可列并的情形，其余类似.

$\forall\ \{T_n,n\geqslant 1\}\subseteq \mathscr{F}(\mathscr{B}^X)\Rightarrow \forall\ n\geqslant 1, C_x\circ T_n\in\zeta(\mathscr{F}),(\forall\ x\in X).$

$$\Rightarrow \bigvee_{n=1}^{\infty} C_x\circ T_n\in\zeta(\mathscr{F}),\quad(\forall\ x\in X).$$

$$\Rightarrow \forall\ x\in X, C_x\circ(\bigvee_{n=1}^{\infty} T_n)\in\zeta(\mathscr{F})$$

$$\Rightarrow \bigvee_{n=1}^{\infty} T_n\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X).$$

(4)　与(5)证明方法,类似于(3). 证毕.

推论　如果 X 为有限或可数集,则定理6.10的(3),(4),(5)中的运算在 $\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$ 中封闭.

由定理6.9与定理6.10可以看出,$\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$ 中的运算远比 $\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$ 中的丰富得多. 鉴于此,以后我们把主要精力放在 $\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$ 的讨论,而且一般在不致混淆时,径把 $\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$ 中的元素称为随机 F 集.

§7　随机 F 集的诱导分布与矩

定义7.1　设 $T_1\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$, $T_2\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$,界定

$$P_{T_1}(A)\triangleq P\{\omega\in\Omega\mid T_1(\omega)\in A\},\qquad \forall\ A\in\mathscr{A}^X.$$

$$P_{T_2}(A)\triangleq P\{\omega\in\Omega\mid T_2(\omega)\in A\},\qquad \forall\ A\in\mathscr{B}^X.$$

则称 $P_{T_1}(\cdot)$ 为 T_1 在 $\langle I^X,\mathscr{A}^X\rangle$ 上的诱导分布,$P_{T_2}(\cdot)$ 为 T_2 在 $\langle I^X,\mathscr{B}^X\rangle$ 上的诱导分布.

定理7.1　设 $T_1\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$, $T_2\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$,则 $P_{T_1}(\cdot)$ 是 $\langle I^X,\mathscr{A}^X\rangle$ 上的概率,$P_{T_2}(\cdot)$ 是 $\langle I^X,\mathscr{B}^X\rangle$ 上的概率.

证明　显然,$P_{T_i}(\varnothing)=0$, $P_{T_i}(I^X)=1$, $i=1,2$.

$\forall\ \{A_n,n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{A}^X$(或 $\mathscr{B}^X$), $A_k\cap A_j=\varnothing$, $k\neq j$,则

$$P_{T_i}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=P\{\omega\in\Omega\mid T_i(\omega)\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\}$$

$$=P\{\omega\in\Omega\mid\exists\ n\geqslant 1,T_i(\omega)\in \boldsymbol{A}_n\}$$

$$=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega\in\Omega\mid T_i(\omega)\in \boldsymbol{A}_n\})$$

因$\forall\ k,j\geqslant 1,k\neq j,\{\omega\in\Omega\mid T_i(\omega)\in \boldsymbol{A}_K\}\cap\{\omega\in\Omega\mid T_i(\omega)\in \boldsymbol{A}_j\}=\varnothing$，则

$$P_{T_i}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P\{\omega\in\Omega\mid T_i(\omega)\in \boldsymbol{A}_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}P_{T_i}(\boldsymbol{A}_n).$$

$(i=1$或$2)$. 所以 $P_{T_1}(\cdot)$是$\langle I^X,\mathscr{A}^X\rangle$上的概率，$P_{T_2}$是$\langle I^X,\mathscr{B}^X\rangle$上的概率. 证毕.

推论 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$，$P_T$ 为 T 在$\langle I^X,\mathscr{A}^X\rangle$上的诱导分布，则 P_T 在 $\mathscr{B}^X$ 上的限制是概率.

证明 因为$T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，则 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 又 $\mathscr{B}^X\subseteq\mathscr{A}^X$. 故 P_T 在 $\mathscr{B}^X$ 上的限制即 P_T 在$\langle I^X,\mathscr{B}^X\rangle$上的诱导分布，由定理7.1知，$P_T$ 在 $\mathscr{B}^X$ 上的限制是概率. 证毕.

定义7.2 设 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^x)$，对于 X 的任何有限子集 $N=\{x_1,\cdots,x_n\}$，$n\geqslant 1$，令

$F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\triangleq F_T[J_N^{\leqslant}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)]$，$\quad\forall\ (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in I^n$. 称非负函数族

$\{F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mid(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in I^n,N$ 为 X 的 n 元子集，$n\geqslant 1\}$

为 B^XRF **集** T **的分布函数族**.

定理7.2 $F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$具有以下性质.

$(D1)$ $F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$是关于每个变元的单调不减且右连续的函数.

$(D2)$ $F_T^{(N)}(1,1,\cdots,1)=1$,

$F_T^{(N)}(1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=F_T^{N-\{x_1\}}(\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,

………………

$$F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1},1)=F_T^{N-\{x_n\}}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}).$$

(D3)　对于 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in I^n,\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\in I^n,\alpha_i<\beta_i,i=1,2,\cdots,n$ 令

$$\triangle_{\alpha_i\beta_i}^{x_i}F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\triangleq F_T^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\lambda_n)-F_T^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\lambda_n),$$

$$\triangle_{\alpha_i\beta_i}^{x_i}\triangle_{\alpha_j\beta_j}^{x_j}F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\triangleq\triangle_{\alpha_i\beta_i}^{x_i}F_T^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\beta_j,\cdots,x_n)-\triangle_{\alpha_i\beta_i}^{x_i}F_T^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\lambda_n),$$

$$\triangle_{\boldsymbol{\alpha\beta}}^{N}F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\triangleq\triangle_{\alpha_1\beta_1}^{x_1}\triangle_{\alpha_2\beta_2}^{x_2}\cdots\triangle_{\alpha_n\beta_n}^{x_n}F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

则

(i)　$\triangle_{\boldsymbol{\alpha\beta}}^{N}F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\triangle_{\alpha_{i_1}\beta_{i_1}}^{x_{i_1}}\triangle_{\alpha_{i_2}\beta_{i_2}}^{x_{i_2}}\triangle_{\alpha_{i_n}\beta_{i_n}}^{x_{i_n}}F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,

其中 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任一固定的全排列.

(ii)　$F_T(J_N(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}])=\triangle_{\boldsymbol{\alpha\beta}}^{N}F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$

证明　由概率 $P_T(\cdot)$ 的单调不减性与连续性立即得证(D1). 再由 $F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 的定义,(D2)显然成立. 下面证明(D3).

(i)　不妨设 $i<j$,则

$$\begin{aligned}&\triangle_{\alpha_i\beta_i}^{x_i}\triangle_{\alpha_j\beta_j}^{x_j}F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\&=F_T^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\beta_j,\cdots,\lambda_n)-F_T^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\beta_j,\cdots,\lambda_n)\\&-F_T^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\beta_i\cdots,\alpha_j,\cdots,\lambda_n)+F_T^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\lambda_n)\\&=\triangle_{\alpha_j\beta_j}^{x_j}\triangle_{\alpha_i\beta_i}^{x_i}F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n].\end{aligned}$$

应用上述的推证方法可以证明

$$\triangle_{\boldsymbol{\alpha\beta}}^{N}F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\triangle_{\alpha_{i_1}\beta_{i_1}}^{x_{i_1}}\cdots\triangle_{\alpha_{i_n}\beta_{i_n}}^{x_{i_n}}F_T^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

(ii)　因为 $F_T[J_N(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}])=F_T(\bigcap_{i=1}^{n}J_{\{x_i\}}(\alpha_i,\beta_i])$. 经过计算,可以得到

$$F_T(\bigcap_{i=1}^{n} J_{\{x_i\}}(\alpha_i,\beta_i])=\triangle_{\alpha_1\beta_1}^{x_1}\cdots\triangle_{\alpha_n\beta_n}^{x_n}F_T^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

于是 $F_T(J_N(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}])=\triangle_{\alpha_1\beta_1}^{x_1}\cdots\triangle_{\alpha_n\beta_n}^{x_n}F_T^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. 证毕.

引理 令

$$\mathscr{S}(x)=\{J_{\{x\}}^{\leqslant}(\alpha),J_{\{x\}}(\alpha,\beta]\mid\alpha,\beta\in I\},\qquad x\in X,$$

$$\mathscr{S}=\{\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_{x_i}\mid\boldsymbol{A}_{x_i}\in\mathscr{S}(x_i),N=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq X,n\geqslant 1\},$$

$$\mathscr{L}=\{\bigcup_{k=1}^{m}\boldsymbol{A}_k\mid\boldsymbol{A}_k\in\mathscr{S},k=1,2,\cdots,m,\text{且 }\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j=\varnothing,i\neq j,m\geqslant 1\}.$$

则 $\mathscr{L}$ 是包含 $\{\mathscr{S}(x)\mid x\in X\}$ 的最小代数.

证明 显然, $\mathscr{L}\supseteq\{\mathscr{S}(x)\mid x\in X\}$, 而且 $\mathscr{L}$ 对于不相交有限并(直和)与有限交封闭. 不难证明, 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathscr{S}$, $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$, 则必存在 $\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{B}_k\in\mathscr{S}$, $\boldsymbol{B}_k\subseteq\boldsymbol{A}_k$, $k=1,2,\cdots,m$, 而且 $\boldsymbol{A}_i\cap\boldsymbol{A}_j=\varnothing$, $\boldsymbol{B}_i\cap\boldsymbol{B}_j=\varnothing$, $i\neq j$, 使得 $\boldsymbol{A}=\bigcup_{k=1}^{m}\boldsymbol{A}_k$, $\boldsymbol{B}=\bigcup_{k=1}^{m}\boldsymbol{B}_k$. 因此 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\bigcup_{k=1}^{m}(\boldsymbol{A}_k-\boldsymbol{B}_k)$. 而且每个 $\boldsymbol{A}_k-\boldsymbol{B}_k$ 又可表为 $\mathscr{S}$ 的有限个元素的直和, 故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\in\mathscr{L}$. 又对于任何 $x\in X$, $I^X=J_{\{x\}}^{\leqslant}(1)\in\mathscr{L}$, 故 $\mathscr{L}$ 是一个代数. 证毕.

定理7.3 如果非负函数族

$\{F^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mid(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in I^n$, N 为 X 的 n 元子集, $n\geqslant 1\}$ 具有定理7.2中的性质 $(D1)$—$(D3)$, 则在 $\mathscr{B}^X$ 上存在唯一的概率 $F(\cdot)$, 使得对于任何 $J_N^{\leqslant}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathscr{J}^{\leqslant}$ 有

$$F(J_N^{\leqslant}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n))=F^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

证明 对于任何 $x\in X$, 界定

$$F(J_{\{x\}}^{\leqslant}(\alpha))\triangleq F^{\{x\}}(\alpha),\qquad\forall\ \alpha\in I.$$

$$F(J_{\{x\}}(\alpha,\beta])\triangleq F^{\{x\}}(\beta)-F^{\{x\}}(\alpha),\qquad\forall\ 0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1.$$

设 $\bigcap_{i=1}^{n}A_{x_i}\in\mathscr{S}$. 如果 $A_{x_i}=J_{\{x\}}^{\leqslant}(\alpha_i)$, 则界定

$$F(\bigcap_{i=1}^{n}A_{x_i})\triangleq F^{(N)}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

其中 $N=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$; 如果 $A_{x_{i_k}}=J_{\{x_{i_k}\}}(\alpha_{i_k},\beta_{i_k}]$, $0\leqslant\alpha_{i_k}<\beta_{i_k}\leqslant 1$, k

$=1,2,\cdots,r,(r\leqslant n)$. 其余 $n-r$ 个 $A_{x_i}=J_{\{x_i\}}^{\leqslant}(\lambda_i)$，则界定

$$F(\bigcap_{i=1}^{n} A_{x_i}) \triangleq \triangle_{\alpha_{i_1}\beta_{i_1}}^{x_{i_1}} \cdots \triangle_{\alpha_{i_r}\beta_{i_r}}^{x_{i_r}} F^{(N)}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

进一步，对于 $\mathscr{L}$ 中的任何元素 $A=\bigcup_{k=1}^{m} A_k, A_k\in\mathscr{S}, A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$，界定

$$F(A)\triangleq\sum_{k=1}^{m}(A_k).$$

又　　$F(I^X)=F^{(N)}(1,1,\cdots,1)=1$

于是，上面界定的 $F(\cdot)$ 是代数 $\mathscr{L}$ 上的概率.

容易验证，$\sigma(\mathscr{L})=\mathscr{B}^X$. 故由经典测度论中关于测度的扩张定理，$F(\cdot)$ 可唯一地扩张成 $\mathscr{B}^X$ 上的概率，而且对于任何 $J_N^{\leqslant}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathscr{J}^{\leqslant}$，有

$$F(J_N^{\leqslant}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n))=F^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

证毕.

定理7.4　设非负函数族

$\{F^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mid(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in I^n, N$ 为 X 的 n 元子集，$n\geqslant1\}$ 具有定理7.2中的性质(D1)—(D3)，则存在概率空间 $\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$ 以及 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，使得 T 的分布函数族就是所给出的函数族.

证明　取 $\Omega=I^X,\mathscr{F}=\mathscr{B}^X$，$P$ 是按照定理7.3由 $\{F^{(N)}(\cdot)\mid N$ 为 X 的 n 元子集，$n\geqslant1\}$ 产生的概率. 这样就得到一个概率空间 $\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$. 再定义映射

$$T:\Omega\to I^X,\omega\to T(\omega)=\omega.$$

显然，T 是 $\mathscr{F}-\mathscr{B}^X$ 可测映射. 因而是 B^XRF 集. 而且对于 X 的任何 n 元子集 N 与 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in I^n, n\geqslant1$，有

$$\begin{aligned}F_T^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)&=P(J_N^{\leqslant}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n))\\&=F^{(N)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).\end{aligned}$$

证毕.

定义7.3　设 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$.

(1)　称 $E(T)(\in I^X)$ 是 T **的期望**，它的隶属函数

$$E(T)(x)\triangleq\int_\Omega C_x[T(\omega)]dP \qquad \forall x\in X.$$

(2)　称 $D(T)(\in I^X)$ 是 T **的方差**，它的隶属函数

$$D(T)(x)\triangleq\int_\Omega C_x[T(\omega)\triangle E(T)]^2dP \qquad \forall x\in X.$$

注　因为 $\forall x\in X, C_x\circ T\in\zeta(\mathscr{F})$. 故 $\underset{\sim}{P}(C_x\circ T)=\int_\Omega C_x[T(\omega)]dP$. 从而，$E(T)(x)=\underset{\sim}{P}(C_x\circ T)$ 或 $C_x\circ E(T)=\underset{\sim}{P}(C_x\circ T)$. 如果把 $(C_x\circ T)(\cdot)$ 看作 Ω 到 $[0,1]$ 的随机变量，则 $C_x\circ E(T)=E(C_x\circ T(\cdot))$. 这是两种形异实同的表示方法，视研究对象为 F 事件或者是随机变量而定. 本章大多采用后者(个别时候为了方便也用前者的说法).

定理7.5　如果 $T(\omega)=h, P—a.e, h\in I^X$，则 $E(T)=h, D(T)=0$ (其中 $0(x)\equiv 0, \forall x\in X$).

证明是简单的，从略.

定理7.6　如果 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，则 $D(T)=E(T^2)-[E(T)]^2$.

证明　因为 $T^2\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 故 $\forall x\in X$,

$$\begin{aligned}D(T)(x)&=\int_\Omega C_x[T(\omega)\triangle E(T)]^2dP\\&=\int_\Omega[(T(\omega))(x)-E(T)(x)]^2dP\\&=\int_\Omega C_x[T^2(\omega)]dP-[E(T)(x)]^2\\&=[E(T)^2-(E(T))^2](x)\end{aligned}$$

所以　　$D(T)=E(T^2)-[E(T)]^2$.　　证毕.

定理7.7　设 $\Gamma:\Omega\to\mathscr{P}(X)$ 是随机集，令 $T=\chi_\Gamma$. 则 T 是 A^XRF 集，而且

$$E(T)(x)=P\{\omega\in\Omega\mid x\in\Gamma(\omega)\},$$

$$D(T)(x)=P\{\omega\in\Omega\mid x\in\Gamma(\omega)\}[1-P\{\omega\in\Omega\mid X\in\Gamma(\omega)\}].$$

证明 由于$\forall\ \alpha\in[0,1]$，$T_\alpha=\Gamma$ 是随机集，由定理6.4知，$T\in\mathscr{F}(\mathscr{A}^X)$，从而，$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 而且

$$E(T)(x)=\int_\Omega C_x[T(\omega)]dP=\int_{\{C_x[T(\omega)]=1\}}dP$$

$$=\int_{\{\omega\in\Omega\mid x\in\Gamma(\omega)\}}dP=P\{\omega\in\Omega\mid x\in\Gamma(\omega)\}.$$

同理， $E(T^2)(x)=\int_\Omega C_x[T^2(\omega)]dP=P\{\omega\in\Omega\mid x\in\Gamma(\omega)\}.$

所以 $D(T)(x)=P\{\omega\in\Omega\mid x\in\Gamma(\omega)][1-P\{\omega\in\Omega\mid x\in\Gamma(\omega)\}].$

证毕.

定理7.8 设 $h\in I^X$，$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，则

$$E(hT)=hE(T),D(hT)=h^2D(T).$$

证明 因为 $hT\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，且$\forall\ x\in X$，

$$C_x\circ(hT)(\omega)=C_x[h\cdot T(\omega)]=h(x)\cdot[T(\omega)](x).$$

则

$$E(hT)(x)=\int_\Omega C_x\circ(hT)(\omega)dP=\int_\Omega h(x)\cdot[T(\omega)](x)dP$$

$$=h(x)\cdot E(T)(x)=[hE(T)](x).$$

于是，$E(hT)=hE(T)$. 同理，$E[(hT)^2]=h^2E(T^2)$. 所以

$$D(hT)=E[(hT)^2]-[E(hT)]^2=h^2D(T).$$ 证毕.

定理7.9 设 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，则$\forall\ x\in X$，

$$E(T)(x)=\int_0^1\lambda dF_T^{(x)}(\lambda).$$

$$D(T)(x)=\int_0^1\lambda^2dF_T^{(x)}(\lambda)-[\int_0^1\lambda dF_T^{(x)}(\lambda)]^2.$$

证明 因为$\forall\ x\in X$，

$$E(T)(x)=\int_\Omega C_x[T(\omega)]dP=\int_\Omega(C_x\circ T)(\omega)dP.$$

作变量替换 $\lambda=(C_x\circ T)(\omega)$及

$$F_T^{(x)}(\lambda)=P\{T^{-1}(J_{(x)}^{\leqslant}(\lambda))\}=P\{(C_x\circ T)^{-1}(-\infty,\lambda]\}.$$

再由积分变换定理，即得

$$E(T)(x)=\int_0^1 \lambda dF_T^{(x)}(\lambda).$$

另一等式，由 $D(T)=E(T^2)-[E(T)]^2$ 即可证明.　　证毕.

定义7.4　设 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B})$. $B^+(T)$, $B^-(T)$ 是 X 上的 F 关系，其中

$$B^+(T)(x_1,x_2)=\{\underset{\sim}{P}(C_{x_1}[T(\omega)]\cdot C_{x_2}[T(\omega)])-E(T)(x_1)\cdot E(T)(x_2)\}\vee 0,\qquad \forall\ (x_1,x_2)\in X\times X.$$

$$B^-(T)(x_1,x_2)=\{E(T)(x_1)\cdot E(T)(x_2)-\underset{\sim}{P}[C_{x_1}[T(\omega)]\cdot C_{x_2}[T(\omega)]]\}\vee 0,\qquad \forall\ (x_1,x_2)\in X\times X.$$

则称 $B^+(T)$, $B^-(T)$ 与 $B(T)=B^+(T)+B^-(T)$ 分别为 T 的**正相关矩、负相关矩与绝对相关矩**. 进一步，令

$$R^{\pm}(T)(x_1,x_2)=B^{\pm}(T)(x_1,x_2)/[B(T)(x_1,x_1)]^{\frac{1}{2}}\cdot[B(T)(x_2,x_2)]^{\frac{1}{2}},\quad \forall\ (x_1,x_2)\in X\times X.$$

$$R(T)(x_1,x_2)=B(T)(x_1,x_2)/[B(T)(x_1,x_1)]^{\frac{1}{2}}\cdot[B(T)(x_2,x_2)]^{\frac{1}{2}},\quad \forall\ (x_1,x_2)\in X\times X.$$

则称 $R^+(T)$, $R^-(T)$ 与 $R(T)$ 分别为 T 的**正相关函数，负相关函数与绝对相关函数**.

定理7.10　(1)　$B^+(T)$, $B^-(T)$ 与 $B(T)$ 均为 X 上的 F 对称关系.

(2)　$\forall\ x\in X$, $B^-(T)(x,x)=0$，且 $\forall\ y\in X$, $B(T)(x,y)\leqslant[B(T)(x,x)\cdot B(T)(y,y)]^{\frac{1}{2}}$.

(3)　$B^+(T)\wedge B^-(T)=0$, $B^+(T)\vee B^-(T)=B(T)$.

(4)　$R^+(T)$ 与 $R(T)$ 是 X 上的 F 相似关系.

证明是直接的，请读者自证.

设 X 表示一个大系统，它所处的状态既受随机因素的影响，

又难以精确地描述，即 X 是一个随机模糊系统. 因此，可以用 $B^X RF$ 集 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$ 描述整个系统的状态. 而 $E(T)$ 则表示该系统的平均状态，$D(T)$ 表示该系统的平均波动大小的 F 集，可以作为衡量系统 X 稳定程度的指标. $B^+(T)$，$B^-(T)$，$B(T)$ 以及 $R^+(T)$，$R^-(T)$，$R(T)$ 则表示系统 X 内部各元素之间的相关关系，$B^+(T)$，$R^+(T)$ 表示正相关关系，$B^-(T)$，$R^-(T)$ 表示负相关关系，可以用以分析系统各元素之间的反馈关系，相互依赖、相互作用和相互制约关系.

定义7.5 设 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，$k$ 为任给的自然数，称 F 集 $v_k(T)\in I^X$ 为 T 的 k **阶原点矩**，其隶属函数为

$$v_k(T)(x)=\int_\Omega C_x[T^k(\omega)]dP,\qquad \forall\ x\in X.$$

称 F 集 $\mu_k^+(T)$，$\mu_k^-(T)$，$\mu_k(T)\in I^X$ 分别为 T 的 k **阶正中心矩**，k **阶负中心矩**与 k **阶绝对中心矩**。其中 $\forall\ x\in X$，

$$\mu_k^+(T)(x)=\int_\Omega C_x[T(\omega)-E(T)]^k dP\vee 0,$$

$$\mu_k^-(T)(x)=(-\int_\Omega C_x[T(\omega)-E(T)]^k dP)\vee 0,$$

$$\mu_k(T)(x)=\int_\Omega C_x[T(\omega)\triangle E(T)]^k dp.$$

由定义7.5不难证明下述定理.

定理7.11 (1) $v_1(T)=E(T)$，$\mu_2(T)=D(T)$.

(2) $\mu_k(T)=\mu_k^+(T)\vee\mu_k^-(T)$，$\mu_k^+(T)\wedge\mu_k^-(T)=0$. 特别当 k 为偶数时，$\mu_k^+(T)=\mu_k(T)$，$\mu_k^-(T)=0$.

§8 随机 F 集的独立性与极限定理

定义8.1 设 $\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$ 是概率空间，$T_1,T_2,\cdots,T_k\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 对于任何 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_k\in\mathscr{B}^X$，记

$$F_{T_1T_2\cdots T_k}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_k)=P\{\bigcap_{i=1}^{k}T_i^{-1}(\boldsymbol{B}_i)\}.$$

且称 $F_{T_1T_2\cdots T_k}(\cdot,\cdot,\cdots,\cdot)$ 为 $T_1,T_2\cdots,T_k$ 的**联合诱导分布**

又对于 X 的任何非空子集 $N_1,N_2,\cdots,N_k$ 与 $\alpha_i\in I^{n_i},i=1,2,\cdots,k$.

记 $F_{T_1T_2\cdots T_k}^{N_1N_2\cdots N_k}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=F_{T_1T_2\cdots T_k}(J_{N_1}(\alpha_1),J_{N_2}(\alpha_2),\cdots,J_{N_k}(\alpha_k))$.

并称

$\{F_{T_1T_2\cdots T_k}^{N_1N_2\cdots N_k}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)\mid\alpha_i\in I^{n_i},N_i$ 为 X 的 n_i 元子集,$n_i\geqslant1,i=1,2,\cdots,k\}$ 为 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 的**联合分布函数族**.

定义8.2 设$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$是概率空间,$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 记

$$\sigma(T)\triangleq T^{-1}(\mathscr{B}^X)=\{T^{-1}(B)\mid B\in\mathscr{B}^X\}\subseteq\mathscr{F}.$$

则 $\sigma(T)$ 为 RF **集** T **产生的** σ **代数**.

容易验证,$\sigma(T)$是使 T 为 $\mathscr{F}-\mathscr{B}^X$ 可测的最小 σ 代数.

定义8.3 设$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$是概率空间,$T_1,T_2,\cdots,T_k\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 称 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 相互独立$\Leftrightarrow\sigma(T_1),\sigma(T_2),\cdots,\sigma(T_k)$为相互独立的事件类. 即$\forall A_i\in\sigma(T_i),i=1,2,\cdots,n$,有 $P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)=\prod\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

推广之,设$\{T_n,n\geqslant1\}\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$,称$\{T_n,n\geqslant1\}$相互独立$\Leftrightarrow\{\sigma(T_n),n\geqslant1\}$为相互独立的事件类.

定理8.1 设 $T_1,T_2,\cdots,T_k\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$,则下列各命题相互等价.

(1) $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 相互独立.

(2) $\forall\ \boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_k\in\mathscr{B}^X$ 有

$$F_{T_1T_2\cdots T_n}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_k)=\prod_{i=1}^{k}F_{T_i}(\boldsymbol{B}_i)$$

(3) $\forall\ N_1,N_2,\cdots,N_k\subseteq X,\alpha_i\in I^{n_i},i=1,2,\cdots,k$,有

$$F_{T_1T_2\cdots T_k}^{N_1N_2\cdots N_k}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=\prod_{i=1}^{k}F_{T_i}^{N_i}(\alpha_i).$$

证明　(1)　$\Rightarrow$(2)，由 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 的相互独立性知

$$F_{T_1T_2\cdots T_k}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_k)=P\{\bigcap_{i=1}^{k}T_i^{-1}(\boldsymbol{B}_i)\}$$

$$=\prod_{i=1}^{k}P\{T_i^{-1}(\boldsymbol{B}_i)\}=\prod_{i=1}^{k}F_{T_i}(\boldsymbol{B}_i).$$

(2)　$\Rightarrow$(3)　显然.

(3)　$\Rightarrow$(1)　令 $T_i^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant})=\{T_i^{-1}[J_N^{\leqslant}(\boldsymbol{\alpha})]\mid J_N^{\leqslant}(\boldsymbol{\alpha})\in\mathscr{J}^{\leqslant}\}$. 由(3)知，$\forall\ J_{N_i}^{\leqslant}(\alpha_i)\in\mathscr{B}^X,i=1,2,\cdots,k$. 有

$$P\{\bigcap_{i=1}^{k}T_i^{-1}(J_{N_i}^{\leqslant}(\boldsymbol{\alpha}_i))\}=F_{T_1T_2\cdots T_k}^{N_1N_2\cdots N_k}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$$

$$=\prod_{i=1}^{k}F_{T_i}^{N_i}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\prod_{i=1}^{k}P\{T_i^{-1}(J_{N_i}^{\leqslant}(\alpha_i))\}.$$

于是，$T_1^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant}),T_2^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant}),\cdots,T_k^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant})$相互独立. 又由于 $\mathscr{B}^X=\sigma(\mathscr{J}^{\leqslant})$，则$\forall\ i=1,2,\cdots,k,T_i^{-1}(\mathscr{B}^X)=T_i^{-1}[\sigma(\mathscr{J}^{\leqslant})]=\sigma(T_i^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant}))$. 即 $\sigma(T_i)=\sigma(T_i^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant}))$. 且不难看出，$T_i^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant})$为 Π 系. 令

$$\mathscr{A}=\{A\in\sigma(T_1)\mid A,T_2^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant}),\cdots,T_k^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant})\text{相互独立}\}.$$

显然，$\mathscr{A}\supseteq T_1^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant})$. 且 $\mathscr{A}$ 为 λ 系. 事实上，$\forall\ B_i\in T_2^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant}),i=2,\cdots,k,\Omega,B_2,\cdots,B_n$ 相互独立；若$\{A_1,A_2\},B_2,\cdots,B_k$ 相互独立，当 $A_2\subseteq A_1$时，有

$$P\{(A_1-A_2)B_2\cdots B_k\}=P\{A_1B_2\cdots B_k)-(A_2B_2\cdots B_k)\}$$

$$=P(A_1B_2\cdots B_k)-P(A_2B_2\cdots B_k)$$

$$=P(A_1)P(B_2)\cdots P(B_k)-P(A_2)P(B_2)\cdots P(B_k)$$

$$=P(A_1-A_2)P(B_2)\cdots P(B_k).$$

于是就证明了 $A_1,A_2\in\mathscr{A},A_2\subseteq A_1\Rightarrow A_2-A\in\mathscr{A}$.

又若$\{A_n,n\geqslant1\}\subseteq\mathscr{A},A_n\subseteq A_{n+1}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，则

$$P(AB_2\cdots B_k)=\lim_{n\to\infty}P(A_nB_2\cdots B_k)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)P(B_2)\cdots P(B_k)$$
$$=P(A)P(B_2)\cdots P(B_k).$$

所以 $A\in\mathscr{A}$. 因此,$\mathscr{A}$ 为 λ 系. 从而,$\mathscr{A}\supseteq\sigma(T_1)$. 即已证明 $\sigma(T_1)$, $T_2^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant}),\cdots,T_k^{-1}(\mathscr{J}^{\leqslant})$ 相互独立. 反复应用上面的推证方法,即可证明 $\sigma(T_1),\sigma(T_2),\cdots,\sigma(T_k)$ 相互独立. 所以 $T_1,T_2\cdots,T_k$ 相互独立. 证毕.

定理8.2 设 $\{T_n,n\geqslant1\}\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 则 $\{T_n,n\geqslant1\}$ 相互独立的充要条件是 $\forall\ k\geqslant2,T_1,T_2,\cdots,T_k$ 相互独立.

证明 $\{T_n,n\geqslant1\}$ 相互独立 $\Leftrightarrow\sigma(T_1),\sigma(T_2),\cdots,\sigma(T_k),\cdots$ 相互独立 $\Leftrightarrow\forall\ k\geqslant2,\sigma(T_1),\sigma(T_2),\cdots,\sigma(T_k)$ 相互独立. $\Leftrightarrow\forall\ k\geqslant2,T_1,T_2,\cdots,T_k$ 相互独立. 证毕.

定理8.3 设 $\{T_n,n\geqslant1\}\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 如果 $\{T_n,n\geqslant1\}$ 相互独立,则 $\forall\ x\in X,\{C_x\circ T_n(\cdot),n\geqslant1\}$ 相互独立.

证明 $\forall\ a_1,\cdots,a_k\in I,k\geqslant2$,有

$$P\{C_x\circ T_1\leqslant a_1,\cdots,C_x\circ T_k\leqslant a_k\}=P\{\bigcap_{i=1}^{k}T_i^{-1}(J_{\{x\}}^{\leqslant}(a_i))\}$$
$$=\prod_{i=1}^{k}P\{T_i^{-1}(J_{\{x\}}^{\leqslant}(a_i))\}=\prod_{i=1}^{k}P\{C_x\circ T_i\leqslant a_i\}.$$

由此便知,对于任何自然数 $k\geqslant2,\{C_x\circ T_1(\cdot),\cdots,C_x\circ T_k(\cdot)\}$ 相互独立,从而,$\{C_x\circ T_n(\cdot),n\geqslant1\}$ 相互独立. 证毕.

定理8.4 设 $T_1,\cdots,T_k\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$,则

(1) $$E(\bigodot_{i=1}^{k}T_i)\leqslant E(\prod_{i=1}^{k}T_i)\leqslant E(\bigwedge_{i=1}^{k}T_i)\leqslant\bigwedge_{i=1}^{n}E(T_i).$$

$$E(\bigoplus_{i=1}^{k}T_i)\geqslant E(\sum_{i=1}^{n}{}^{\hat{+}}T_i)\geqslant E(\bigvee_{i=1}^{k}T_i)\geqslant\bigvee_{i=1}^{n}E(T_i).$$

(2) 如果 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 不相重,有

$$E(\sum_{i=1}^{n}T_i)=\sum_{i=1}^{n}E(T_i).$$

(3)　如果 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 不相重，且两两独立，有

$$D(\sum_{i=1}^{n}T_i)=\sum_{i=1}^{n}D(T_i).$$

证明　(1)　由于 $\forall\ x\in X$，有

$$C_x\circ(\bigodot_{i=1}^{k}T_i)\leqslant C_x\circ(\prod_{i=1}^{k}Ti)\leqslant C_x\circ(\bigwedge_{i=1}^{k}T_i)$$

则得 $E(\bigodot_{i=1}^{k}T_i)(x)\leqslant E(\prod_{i=1}^{k}T_i)(x)\leqslant E(\bigwedge_{i=1}^{k}T_i)(x)\leqslant\bigwedge_{i=1}^{k}E(T_i)(x)$. 于是，第一组不等式成立. 同理可证另一组不等式.

(2)　如果 $T_1,\cdots,T_k$ 不相重，则 $\forall\ x\in X,C_x\circ T_1,\cdots,C_x\circ T_k$ 不相重，且 $C_x\circ(\sum_{i=1}^{k}T_i)=\sum_{i=1}^{k}C_x\circ T_i$. 于是，得

$$E(\sum_{i=1}^{k}T_i)(x)=\int_{\Omega}C_x\circ(\sum_{i=1}^{n}T_i)(\omega)dP=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{k}(C_x\circ T_i)(\omega)dP$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\int_{\Omega}(C_x\circ T_i)(\omega)dP=\sum_{i=1}^{k}E(T_i)(x).$$

从而，$E(\sum_{i=1}^{k}T_i)=\sum_{i=1}^{k}E(T_i)$.

(3)　由于 $T_1,\cdots,T_k$ 不相重且两两独立可知，$\forall\ x\in X,C_x\circ T_1,\cdots,C_x\circ T_k$ 不相重且随机变量 $C_x\circ T_1(\cdot),\cdots,C_x\circ T_k(\cdot)$ 两两独立. 从而，随机变量 $\sum_{i=1}^{k}C_x\circ T_i(\cdot)$ 的方差

$$D(\sum_{i=1}^{k}C_x\circ T_i(\cdot))=\sum_{i=1}^{k}C_x\circ E[T_i\triangle E(T_i)]^2.$$

于是

$$D(\sum_{i=1}^{k}T_i)(x)=\int_{\Omega}C_x\circ(\sum_{i=1}^{k}T_i(\omega)\triangle\sum_{i=1}^{k}E(T_i))^2$$

$$=D(\sum_{i=1}^{k}C_x\circ T_i(\cdot))$$

$$=\sum_{i=1}^{k}C_x\circ E(T_i\triangle E(T_i))^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}D(T_i).$$

证毕.

定义8.4 设$\{T_j,j\in J\}\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$,称$\{T_j,j\in J\}$**同分布**是指$\forall\ j_1,j_2\in J,j_1\neq j_2$,有$F_{T_{j_1}}(\mathbf{A})=F_{T_{j_2}}(\mathbf{A}),\forall\ \mathbf{A}\in\mathscr{B}^X$,

定理8.5 设$\{T_j,j\in J\}\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$.如果$RF$集族$\{T_j,j\in J\}$同分布,则$\forall\ x\in X$,随机变量族$\{C_x\circ T_j(\cdot),j\in J\}$同分布.

证明 只需证明$\forall\ x\in X,j_1\neq j_2,j_1,j_2\in J$,有$F_{T_{j_1}}^{(x)}(\cdot)=F_{T_{j_2}}^{(x)}(\cdot)$.事实上,$\forall\ a\in I$,有

$$F_{T_{j_1}}^{(x)}(a)=P\{T_{j_1}^{-1}(J_{(x)}^{\leqslant}(a))\}=P\{T_{j_2}^{-1}(J_{(x)}^{\leqslant}(a))\}$$
$$=F_{T_{j_2}}^{(x)}(a).$$

证毕.

由定理8.3与定理8.5立即得

推论 如果B^XRF集序列$\{T_n,n\geqslant 1\}$相互独立(或两两独立)且同分布,则$\forall\ x\in X,\{C_x\circ T_n(\cdot),n\geqslant 1\}$为相互独立(或两两独立)的随机机变量序列.

定理8.6 设$\{T_n,n\geqslant 1\}$为相互独立的B^XRF集序列,则$\forall\ x\in X,C_x\circ[\overline{T}_n\triangle E(\overline{T}_n)]\to 0,P-a.e.$

其中$\overline{T}_n(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(\omega)}{n},\forall\ \omega\in\Omega$.

证明 由于$\{T_n,n\geqslant 1\}$相互独立,则$\forall\ x\in X,\{C_x\circ T_n(\cdot),n\geqslant 1\}$为相互独立的随机变量序列,又$\{C_x\circ T_n,n\geqslant 1\}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$.由定理2.11的推论1知

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{C_x\circ T_i}{n}\right)\triangle \underset{\sim}{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{C_x\circ T_i}{n}\right)\to 0\quad P\text{-}a.e.$$

其中

$$\underset{\sim}{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{C_x\circ T_i}{n}\right)=\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\frac{C_x\circ T_i(\omega)}{n}dP=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\int_\Omega C_x\circ T_i(\omega)dP$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot E(T_i)(x)=C_x\circ(E(\overline{T}_n)).$$

于是

$$C_x\circ[\overline{T}_n\triangle E(\overline{T}_n)]=((C_x\circ\overline{T}_n)\triangle(C_x\circ E(\overline{T}_n))$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{C_x\circ T_i}{n}\right)\triangle\underset{\sim}{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{C_x\circ T_i}{n}\right)\to 0,\quad P\text{-}a.e.\text{ 证毕.}$$

定理8.7 设$\{T_n,n\geqslant 1\}$为相互独立且同分布的B^XRF集序列，则$\forall\ x\in X,C_x\circ\overline{T}_n\to C_x\circ E(T_1)$，　$P-a.e.$

证明 由定理8.5的推论知，$\forall\ x\in X,\{C_x\circ T_n(\cdot),n\geqslant 1\}$为相互独立同分布的随机变量序列，则$E(\overline{T}_n)=E(T_1)$. 再由定理8.6知

$$C_x\circ(\overline{T}_n\triangle E(\overline{T}_n))=C_x\circ(\overline{T}_n\triangle E(T_1))\to 0,\quad P\text{-}a.e.$$

即得 $C_x\circ\overline{T}_n\triangle C_x\circ E(T_1)\to 0$,

P-$a.e.$ 亦即 $C_x\circ\overline{T}_n\to C_x\circ E(T_1),P-a.e.$ 证毕.

类似地不难证明下述定理.

定理8.8 设$\{T_n,n\geqslant 1\}$为B^XRF集序列. 如果$\forall\ x\in X,\{C_x\circ T_n,n\geqslant 1\}$为两两独立的$F$事件序列，则$C_x\circ(\overline{T}_n\triangle E(\overline{T}_n))\xrightarrow{P}0$.

定理8.9 设$\{T_n,n\geqslant 1\}$为B^XRF集序列. 如果$\forall\ x\in X,\{C_x\circ T_n,n\geqslant 1\}$为两两独立的$F$事件序列，且$\forall\ n\geqslant 1,E(T_n)=E(T_1)$，则$C_x\circ\overline{T}_n\xrightarrow{P}E(T_1)(x)$.

定理8.10 设$\{T_n,n\geqslant 1\}$为B^XRF集序列，则$\forall\ x\in X,C_x\circ(\overline{T}_n\triangle E(\overline{T}_n))\xrightarrow{P}0$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}D(\overline{T}_n)=0$.

证明 根据定理2.8立即得

$$\lim_{n\to\infty}D(\overline{T}_n)=0\Leftrightarrow\qquad\forall\ x\in X,$$

$$\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{P}([C_x\circ\overline{T}_n\triangle\underset{\sim}{P}(C_x\circ\overline{T}_n)]^2)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega[C_x\circ\overline{T}_n-\int_\Omega C_x\circ\overline{T}_n dP]^2 dP$$

$$=\lim_{n\to\infty}E([\overline{T}_n\triangle E(\overline{T}_n)]^2)(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}D(\overline{T}_n)(x)=0$$

$$\Leftrightarrow\forall\ x\in X, C_x\circ\overline{T}_n\triangle\underset{\sim}{P}(C_x\circ\overline{T}_n)\xrightarrow{P}0$$

$$\Leftrightarrow\forall\ x\in X, C_x\circ[\overline{T}_n\triangle E(\overline{T}_n)]\xrightarrow{P}0.$$

证毕.

定理8.11 设$\{T_n,n\geqslant1\}\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 令 $S_1=\overline{\lim_{n\to\infty}}T_n$, $S_2=\lim_{N\to\infty}(\sum_{n=N}^{\infty}{}^{+}T_n)$, $S_3=\lim_{n\to\infty}(\bigoplus_{n=N}^{\infty}T_n)$. 任给 $x\in X$,

(1) 如果$\sum_{n=1}^{\infty}E(T_n)(x)<+\infty$,则 $E(S_1)(x)=E(S_2)(x)=E(S_3)(x)=0$.

(2) 如果$\sum_{n=1}^{\infty}E(T_n)(x)=+\infty$且$\{C_x\circ T_n,n\geqslant1\}$为相互独立的 F 事件序列,则 $E(S_2)(x)=E(S_3)(x)=1$.

证明 因为 $C_x\circ E(T_n)=E(T_n)(x)=\underset{\sim}{P}(C_x\circ T_n)$,同理 $E(S_i)(x)=\underset{\sim}{P}(C_x\circ S_i)$, $i=1,2,3$,且$\{C_x\circ T_n,n\geqslant1\}\subseteq\zeta(\mathscr{F})$. 故由定理2.4立即得证本定理. 证毕.

定理8.12 设$\{T_n,n\geqslant1\}$为 $B^X RF$ 集的单调序列,且$\lim_{n\to\infty}T_n=T$. 如果$\forall\ x\in X$, $\{C_x\circ T_n,n\geqslant1\}$为相互独立的 F 事件序列,则 $C_x\circ T(\cdot)=E(T)(x)$, $P-a.e.$

证明 由定理条件知,$\{C_x\circ T_n,n\geqslant1\}$为相互独立的 F 事件的单调序列,且$\lim_{n\to\infty}C_x\circ T_n=C_x\circ T$. 再由定理2.6,即得

$C_x \circ T(\cdot) = \underset{\sim}{P}(C_x \circ T) = E(T)(x), P-a.e.$ 证毕.

定理8.13 设$\{T_n, n \geqslant 1\} \subseteq \mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$,令 $T_n^* = \bigvee_{i=n}^{\infty} T_i, T_{*n} = \bigwedge_{i=n}^{\infty} T_i$,$T^* = \lim_{n\to\infty} T_n^*, T_* = \lim_{n\to\infty} T_{*n}$. 任给 $x \in X$,

(1) 如果$\{C_x \circ T_n^*, n \geqslant 1\}$为相互独立的 F 事件序列,则 $C_x \circ T^*(\cdot) = E(T^*)(x), P-a.e.$

(2) 如果$\{C_x \circ T_{*n}, n \geqslant 1\}$为相互独立的 F 事件序列,则 $C_x \circ T_*(\cdot) = E(T_*)(x), P-a.e.$

证明 由于$\{T_n^*, n \geqslant 1\}$,$\{T_{*n}, n \geqslant 1\}$为单调序列. 再由定理8.12立即得证. 证毕.

§9 随机 F 集的条件数字期望与 F 鞅

定义9.1 设$\langle \Omega, \mathscr{F}, P\rangle$是概率空间,$P(B) > 0, T \in \mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 则事件 B 发生的条件下,$B^X RF$ 集 T 的条件数学期望为 X 上的 F 集,记作 $E(T|B)$,其隶属函数为

$$E(T|B)(x) = \int_\Omega (C_x \circ T) P(d\omega | B),$$

其中 $P(\cdot|B)$为 B 发生条件下的条件概率.

因为当 $A \subseteq B$ 时,

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}.$$

所以定义9.1中的 $E(T|B)(x)$又可写成

$$E(T|B)(x) = \frac{1}{P(B)} \int_B C_x \circ T dP.$$

不难看出,$B^X RF$ 集的条件数学期望 $E(T|B)$具有如下性质.

性质1 当 $B=\Omega$ 时， $E(T|B)=E(T)$.

性质2 当 $A\in\mathscr{F}$， $T(\omega)=\begin{cases}1_X, \omega\in A\\ 0_X, \omega\overline{\in} A\end{cases}$ 时，则

$$E(T|B)=P(A|B).$$

性质3 当 $T(\omega)=h, \forall\ \omega\in\Omega$ 时，则 $E(T|B)=h$.

性质4 $\forall\ h\in I^X$，有 $E(hT|B)=hE(T|B)$.

性质5 若 $T_1, T_2\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$ 且 $T_1\leqslant T_2$，则 $E(T_1|B)\leqslant E(T_2|B)$.

性质6 若 $T_1, T_2\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，则 $E(T_1\wedge T_2|B)\leqslant E(T_1|B)\wedge E(T_2|B)$，$E(T_1\vee T_2|B)\geqslant E(T_1|B)\vee E(T_2|B)$.

上述性质请读者自证.

下面把 B^XRF 集的条件数学期望进行推广.

设 $\{B_n, n\geqslant 1\}$ 是 Ω 的可测分划，即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\Omega$，$B_iB_j=\varnothing$，$i\neq j$. 且 $B_n\in\mathscr{F}$，$n\geqslant 1$. 令 $\mathscr{G}=\sigma(\{B_n, n\geqslant 1\})$ 是包含 $\{B_n, n\geqslant 1\}$ 的最小 σ 代数. 现在给出 B^XRF 集 T 在 $\mathscr{G}$(条件)下的条件数学期望的两种定义.

定义9.2 (构造性定义)，设 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. 已给 F 的子 σ 代数 $\mathscr{G}=\sigma(\{B_n, n\geqslant 1\})$(条件)下，$T$ 的条件数学期望为 $\mathscr{G}(\mathscr{B}^X)$ 中的一个 B^XRF 集，记作 $E(T|\mathscr{G})$，且 $\forall\ x\in X$，$P-a.e$(唯一确定)意义下满足

$$\begin{aligned}C_x\circ E(T|\mathscr{G}) &= \sum_{n=1}^{\infty}E(T|B_n)(x)\chi_{B_n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{P(B_n)}\int_{B_n}C_x\circ T dP\right)\chi_{B_n},\end{aligned}$$

其中 $\mathscr{G}(\mathscr{B}^X)$ 表示 Ω 到 I^X 的 $\mathscr{G}-\mathscr{B}^X$ 可测的随机 F 集全体.

由此定义知，$\forall\ x\in X$，$C_x\circ E(T|\mathscr{G})\in\zeta(\mathscr{G})$.

定义9.3 (描述性定义). 设 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$ 已给 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数 $\mathscr{G}=\sigma(\{B_n, n\geqslant 1\})$(条件)下，$T$ 的条件数学期望 $E(T|\mathscr{G})$ 为

$\mathscr{G}(\mathscr{B}^X)$中的一个 B^XRF 集，$\forall\ x\in X, B\in\mathscr{G}$，有

$$\int_B C_x \circ T dP = \int_B C_x \circ E(T|\mathscr{G}) dP_{\mathscr{G}},$$

其中 $P_{\mathscr{G}}$为 P 在 $\mathscr{G}$ 上的限制.

由定义中的积分式可知，$E(T|\mathscr{G})$也是关于 $P_{\mathscr{G}}$-$a.e$ 唯一确定的.

上面两个定义是等价的（见定理9.1），并且注意到定义9.2与定义9.3中是"已给 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数 $\mathscr{G}$（条件）下，T 的条件数学期望"而不是"已给可测分割$\{B_n, n\geq 1\}$条件下，T 的条件数学期望"，这是因为 $E(T|\mathscr{G})$不只可以定义出已给事件 B_n 条件下 T 的条件期望，而且还可以定义出$\forall\ B\in\mathscr{G}$ 时的 T 的条件数学期望 $E(T|B)(P(B)>0)$. 这蕴涵在下面的定理中.

定理9.1 "定义9.2"等价于"定义9.3".

证明 "定义9.2"⇒"定义9.3".

如果 $B\in\mathscr{G}$，则 B 可以表成$\{B_n, n\geq 1\}$的部分元之并（直和），令 $B=\sum' B_n$，则由定义9.1知

$$\begin{aligned}
P(B)E(T|B)(x) &= \int_B C_x \circ T dP \\
&= \sum{}' \int_{B_n} C_x \circ T dP \\
&= \sum{}' P(B_n)E(T|B_n)(x) \\
&= \sum{}' E(T|B_n)(x) \int_{B_n} dP \\
&= \int_B \Big[\sum{}' E(T|B_n)(x) \chi_{B_n}(\omega)\Big] dP \\
&= \int_B \Big[\sum_{n=1}^{\infty} E(T|B_n)(x) \chi_{B_n}(\omega)\Big] dP
\end{aligned}$$

$$=\int_B C_x \circ E(T|\mathscr{G})dP$$

$$=\int_B C_x \circ E(T|\mathscr{G})dP_{\mathscr{G}}.$$

则

$$\int_B C_x \circ TdP = P(B)E(T|B)(x) = \int_B C_x \circ E(T|\mathscr{G})dP_{\mathscr{G}}.$$

“定义9.3”⇒“定义9.2” 即是验证当 $\omega\in B_n$ 且 $P(B_n)>0$时，由定义9.3知，$C_x \circ E(T|\mathscr{G})$满足

$$[C_x \circ E(T|\mathscr{G})](\omega)=E(T|B_n)(x).$$

事实上，当 $\omega\in B_n$ 时，$C_x \circ E(T|\mathscr{G})(\omega)$取常数值. 否则的话，$C_x \circ E(T|\mathscr{G})(\omega)$在 B_n 上至少取两个不同的值，于是 B_n 中必有非空的 $\mathscr{G}$ 可测真子集，这与 $\mathscr{G}=\sigma(\{B_n,n\geqslant 1\})$相矛盾. 所以由定义9.3，知

$$\int_{B_n} C_x \circ TdP =\int_{B_n} C_x \circ E(T|\mathscr{G})dP_{\mathscr{G}}$$

$$=P(B_n)(C_x \circ E(T|\mathscr{G})).$$

从而，当 $\omega\in B_n$ 时，有

$$C_x \circ E(T|\mathscr{G})(\omega) = \frac{1}{P(B_n)}\int_{B_n} C_x \circ TdP = E(T|B_n)(x)$$

于是，

$$C_x \circ E(T|\mathscr{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} E(T|B_n)(x)\chi_{B_n}.$$

证毕.

现在进一步给出 $B^X RF$ 集 T 条件数学期望的一般性定义.

定义9.4(一般情形)设$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$是概率空间，$T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的任意一个子 σ 代数. $P_{\mathscr{G}}$ 为 P 在 $\mathscr{G}$ 上的限制. $B^X RF$ 集 T 关于 $\mathscr{G}$ 的条件数学期望 $E(T|\mathscr{G})$是$\mathscr{G}(\mathscr{B}^X)$中的一个随机 F 集且，

$\forall\, x \in X$ 与 $B \in \mathscr{G}$ 满足

$$\int_B C_x \circ T dP = \int_B C_x \circ E(T|\mathscr{G}) dP_{\mathscr{G}}.$$

注　在以后的论述中,凡对两个随机 F 集 $T_1, T_2, P\text{-}a.e$ 或 $P_{\mathscr{G}}\text{-}a.e$成立的命题都系指$\forall\, x \in X$,对于 $C_x \circ T_1, C_x \circ T_2, P\text{-}a.e$ 或 $P_{\mathscr{G}}\text{-}a.e$成立. 例如 $T_1 = T_2, P-a.e$ 系指$\forall\, x \in X, C_x \circ T_1 = C_x \circ T_2, P-a.e.$ 为叙简便不再一一申明.

下面讨论 $B^X RF$ 集的条件数学期望的性质.

定理9.2　如果 $T \in \mathscr{G}(\mathscr{B}^X)$,则 $E(T|\mathscr{G}) = \mathscr{G}, P_{\mathscr{G}}-$**a.e**,特别地,$\mathbf{E(T|\mathscr{G}) = T, P\text{-}a.e.}$

证明　由定义9.4立即可得$\forall\, \mathbf{x \in X}$,有 $C_x \circ T = C_x \circ E(T|\mathscr{G})$, $P_{\mathscr{G}}-a.e.$ 由前注知 $E(T|\mathscr{G}) = T, P_{\mathscr{G}}-a.e.$ 证毕.

定理9.3　对于任何 $x \in X$,有

(1)　$C_x \circ E(T|\mathscr{G}) = E(C_x \circ T|\mathscr{G}), P_{\mathscr{G}}-a.e.$

特别地,当 $\mathscr{G} = \mathscr{F}$ 时,$C_x \circ E(T) = E(C_x \circ T(\cdot))$,　$P-a.e.$

(2)　$E(C_x \circ E(T|\mathscr{G})) = C_x \circ E(T).$

证明　(1)由定义9.4,　$\forall\, x \in X$ 与$\forall\, B \in \mathscr{G}$,有

$$\int_B C_x \circ E(T|\mathscr{G}) dP_{\mathscr{G}} = \int_B C_x \circ T dP = \int_B E(C_x \circ T|\mathscr{G}) dP_{\mathscr{G}}.$$

由此即得所欲证.

(2)　在定义9.4中取 $B = \Omega$,即得

$$\begin{aligned} E(C_x \circ E(T|\mathscr{G})) &= \int_\Omega C_x \circ E(T|\mathscr{G}) dP_{\mathscr{G}} \\ &= \int_\Omega C_x \circ T dP \\ &= C_x \circ E(T). \end{aligned}$$

证毕.

定理9.4 设 $T\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，$h\in I^X$，则 $E(hT|\mathscr{G})=hE(T|\mathscr{G})$.

证明 由定理9.3以及随机变量条件期望的性质知，$\forall\ x\in X$，有

$$\begin{aligned}C_x\circ E(hT|\mathscr{G}) &= E(C_x\circ(hT)|\mathscr{G}) \qquad P_{\mathscr{G}}-a.e\\ &= E(h(x)(C_x\circ T)|\mathscr{G}) \qquad P_{\mathscr{G}}-a.e\\ &= h(x)E(C_x\circ T|\mathscr{G}) \qquad P_{\mathscr{G}}-a.e\\ &= h(x)(C_x\circ E(T|\mathscr{G})) \qquad P_{\mathscr{G}}-a.e\\ &= C_x\circ(hE(T|\mathscr{G})) \qquad P_{\mathscr{G}}-a.e.\end{aligned}$$

此即

$$E(hT|\mathscr{G})=hE(T|\mathscr{G}).\ P_{\mathscr{G}}-a.e.$$

证毕.

定理9.5 如果 $T_1,T_2\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，且 $T_1\leqslant T_2$，则

$$E(T_1|\mathscr{G})\leqslant E(T_2|\mathscr{G}),\qquad P_{\mathscr{G}}-a.e.$$

进一步，有

$$E(T_1\wedge T_2|\mathscr{G})\leqslant E(T_1|\mathscr{G})\wedge E(T_2|\mathscr{G}),\qquad P_{\mathscr{G}}-a.e,$$

$$E(T_1\vee T_2|\mathscr{G})\geqslant E(T_1|\mathscr{G})\vee E(T_2|\mathscr{G}),\qquad P_{\mathscr{G}}-a.e$$

证明是简单的，从略.

定理9.6 设 $\{B_n,n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{F}$，$B_iB_j=\varnothing$，$i\neq j$. $\{\alpha_n,n\geqslant 1\}\subseteq I$，令

$$\chi_{B_n}(\omega)=\begin{cases}1_X, & \omega\in B_n,\\ 0_X, & \omega\overline{\in}B_n.\end{cases}\text{则}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\chi_{B_n}\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$$

且

$$E(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\chi_{B_n}|\mathscr{G})=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nE(\chi_{B_n}|\mathscr{G}),P_{\mathscr{G}}-a.e.$$

证明 因为$\forall\ x\in X$，

$$C_x\circ(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\chi_{B_n})=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(C_x\circ\chi_{B_n}),$$

其中

$$C_x \circ \chi_{B_n}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in B_n, \\ 0, & \omega \overline{\in} B_n. \end{cases}$$ 则知 $C_x \circ (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{B_n}) \in \zeta(\mathscr{F})$.

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{B_n} \in \mathscr{F}(\mathscr{B}^X).$$

又对于任何 $B \in \mathscr{G}$ 与任何 $x \in X$,有下列等式 $P_{\mathscr{G}}$—$a.e$ 成立.

$$\begin{aligned}
\int_B C_x \circ E(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{B_n} | \mathscr{G}) dP_{\mathscr{G}} &= \int_B C_x \circ (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{B_n}) dP \\
&= \int_B (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n C_x \circ \chi_{B_n}) dP \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_B C_x \circ \chi_{B_n} dP \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_B C_x \circ E(\chi_{B_n} | \mathscr{G}) dP_{\mathscr{G}} \\
&= \int_B \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (C_x \circ E(\chi_{B_n} | \mathscr{G})) dP_{\mathscr{G}} \\
&= \int_B C_x \circ (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E(\chi_{B_n} | \mathscr{G}) dP_{\mathscr{G}}.
\end{aligned}$$

从而得到$\forall\ x \in X$,有

$$C_x \circ E(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{B_n} | \mathscr{G}) = C_x \circ (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E(\chi_{B_n} | \mathscr{G}). \quad P_{\mathscr{G}} - a.e.$$

即

$$E(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{B_n} | \mathscr{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E(\chi_{B_n} | \mathscr{G}). \quad P_{\mathscr{G}} - a.e.$$

证毕.

定理9.7 设 $T \in \mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$. $\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数. 则 $E(T|\mathscr{G})$

在 $\mathscr{G}$ 的每个非零概原子[1] B 上为一固定的 F 集,且等于 $E(T|B)$.

证明 如果 $E(T|\mathscr{G})(\cdot)$ 在 B 上不为一固定的 F 集,则存在 $x\in X$,使 $C_x\circ E(T|\mathscr{G})(\cdot)$ 在 B 上不为常数.于是存在实数 a 与 b 使得 $B\cap\{\omega\in\Omega|C_x\circ E(T|\mathscr{G})(\omega)=a\}$ 与 $B\cap\{\omega\in\Omega|C_x\circ E(T|\mathscr{G})(\omega)=b\}$ 非空且可测,这与 B 为 $\mathscr{G}$ 的原子相矛盾.故 $E(T|\mathscr{G})$ 在 B 上为一固定的 F 集.于是

$$\int_B C_x\circ E(T|\mathscr{G})dP_{\mathscr{G}}=C_x\circ E(T|\mathscr{G})\int_B dP_{\mathscr{G}}=C_x\circ E(T|\mathscr{G})P(B).$$

又

$$\int_B C_x\circ E(T|\mathscr{G})dP_{\mathscr{G}}=\int_B C_x\circ TdP.$$

因此有

$$C_x\circ E(T|\mathscr{G})=\frac{1}{P(B)}\int_B C_x\circ TdP=E(T|B)(x)=C_x\circ E(T|B).$$

由 x 的任意性,即得

$$E(T|\mathscr{G})(\omega)=E(T|B)\qquad(\omega\in B).$$ 证毕.

定理9.8 设 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 是 $\mathscr{F}$ 的两个子 σ 代数,且 $\mathscr{G}_1\subseteq\mathscr{G}_2$.如果 $E(T|\mathscr{G}_2)\in\mathscr{G}_1(\mathscr{B}^X)$,则 $E(T|\mathscr{G}_1)=E(T|\mathscr{G}_2)\quad P_{\mathscr{G}_1}-a.e.$

证明 $\forall B\in\mathscr{G}_1$ 与 $\forall x\in X$,有

$$\begin{aligned}\int_B C_x\circ E(T|\mathscr{G}_1)dP_{\mathscr{G}_1}&=\int_B C_x\circ TdP\\&=\int_B C_x\circ E(T|\mathscr{G}_2)dP_{\mathscr{G}_2}\\&=\int_B C_x\circ E(T|\mathscr{G}_2)dP_{\mathscr{G}_1}.\end{aligned}$$

由 B 的任意性,得 $\forall x\in X$

[1] B 是 $\mathscr{G}$ 的原子是指除它自身以及空集 $\varnothing$ 外,B 不再含任何 $\mathscr{G}$ 可测子集;非零概原子 B 是指 B 是原子且 $P(B)>0$.

$$C_x \circ E(T|\mathscr{G}_1) = C_x \circ E(T|\mathscr{G}_2) \qquad P_{\mathscr{G}_1} - a.e.$$

即 $E(T|\mathscr{G}_1)=E(T|\mathscr{G}_2), P_{\mathscr{G}_1}-a.e.$ 证毕.

定理9.9 设$\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$为$\mathscr{F}$的两个子$\sigma$代数,且$\mathscr{G}_1\subseteq\mathscr{G}_2$则

$$E[E(T|\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}_2]=E(T|\mathscr{G}_1), \quad P_{\mathscr{G}_2}-a.e.$$

进一步,如果 $E(T|\mathscr{G}_2)\in\mathscr{G}_1(\mathscr{B}^X)$则

$$E[E(T|\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1]=E(T|\mathscr{G}_1), \quad P_{\mathscr{G}_1}-a.e.$$

证明 因为 $E(T|\mathscr{G}_1)\in\mathscr{G}_1(\mathscr{B}^X)\subseteq\mathscr{G}_2(\mathscr{B}^X)$. 再由定理9.2,得

$$E[E(T|\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}_2]=E(T|\mathscr{G}_1). \quad P_{\mathscr{G}_2}-a.e.$$

同样由定理9.2,则得

$$E[E(T|\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1]=E(T|\mathscr{G}_2), \quad P_{\mathscr{G}_1}-a.e.$$

再由定理9.8知,$E(T|\mathscr{G}_2)=E(T|\mathscr{G}_1), \quad P_{\mathscr{G}_1}-a.e.$

从而有

$$E[E(T|\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1]=E(T|\mathscr{G}_1), P_{\mathscr{G}_1}-a.e.$$ 证毕.

定理9.10 设$\{T_n, n\geqslant 1\}$为 B^XRF 集的单调序列,即 $T_n\in\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$, $T_n\leqslant T_{n+1}$或者 $T_{n+1}\leqslant T_n$, $\forall\ n\geqslant 1$. $\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的子σ代数. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} T_n=T, P-a.e$,则$\lim\limits_{n\to\infty} E(T_n|\mathscr{G})=E(T|\mathscr{G}), P_{\mathscr{G}}-a.e.$

证明 首先证明 $T_n\uparrow T, P-a.e$ 时的情形. 因为$\forall\ n\geqslant 1, T_n\leqslant T_{n+1}, P-a.e.$ 则$\forall\ x\in X$,有 $C_x\circ T_n\leqslant C_x\circ T_{n+1}, P-a.e.$ 又 $T_n\uparrow T, P-a.e$,即 $C_x\circ T_n\uparrow C_x\circ T, P-a.e.$ 于是,$\forall\ B\in\mathscr{G}$,两次应用积分的单调收敛定理,有

$$\begin{aligned}\int_B C_x\circ \lim_{n\to\infty} E(T_n|\mathscr{G})dP_{\mathscr{G}} &= \int_B \lim_{n\to\infty} C_x\circ E(T_n|\mathscr{G})dP_{\mathscr{G}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_B C_x\circ E(T_n|\mathscr{G})dP_{\mathscr{G}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_B C_x\circ T_n dP\end{aligned}$$

$$=\int_B C_x \circ TdP.$$

再由定义9.4,知$\lim\limits_{n\to\infty}(T_n|\mathscr{G})=E(T|\mathscr{G})$, $P_{\mathscr{G}}-a.e.$

对于$T_n\downarrow T$的情形,只需注意到$\forall\ x\in X$,

$$C_x\circ E(T'|\mathscr{G})=C_x\circ(E(T|\mathscr{G}))',\qquad P_{\mathscr{G}}-a.e.$$

以及$T_n\uparrow T$时的结论即可.

事实上,对于任何$B\in\mathscr{G}$,有

$$\int_B C_x\circ E(T'|\mathscr{G})dp_{\mathscr{G}}=\int_B C_x\circ T'dP=\int_B(C_x\circ T)'dP$$

$$=\int_B(1-C_x\circ T)dP=\int_B dP-\int_B C_x\circ TdP$$

$$=\int_B dP-\int_B C_x\circ E(T|\mathscr{G})dP_{\mathscr{G}}$$

$$=\int_B(1-C_x\circ E(T|\mathscr{G}))dP_{\mathscr{G}}$$

$$=\int_B[C_x\circ E(T|\mathscr{G})]'dP_{\mathscr{G}}$$

$$=\int_B[C_x\circ[E(T|\mathscr{G})]'dP_{\mathscr{G}}.$$

由此便知,$\forall\ x\in X, C_x\circ E(T'|\mathscr{G})=C_x\circ(E(T(\mathscr{G}))'$, $P_{\mathscr{G}}-a.e.$
即 $E(T'|\mathscr{G})=(E(T|\mathscr{G}))'$,$P_{\mathscr{G}}-a.e.$再由$T_n'\uparrow T'$即得下列等式$P_{\mathscr{G}}$—$a.e$成立.

$$E(T|\mathscr{G})=(E(T'|\mathscr{G}))'=(\lim_{n\to\infty}E(T_n'(\mathscr{G}))'$$

$$=[\lim_{n\to\infty}(E(T_n|\mathscr{G}))']'$$

$$=[\lim_{n\to\infty}E(T_n|\mathscr{G})]''$$

$$=\lim_{n\to\infty}E(T_n|\mathscr{G}).$$

证毕.

推论 设$\{T_n,n\geq 1\}$为$B^X RF$集的单调序列,且$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$,$P-$

$a.e$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} E(T_n)=E(T)$.

定理9.11　设 $\{T_n,n\geqslant 1\}\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{B}^X)$，则

$$E(\underline{\lim_{n\to\infty}} T_n|\mathscr{G})\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} E(T_n|\mathscr{G}),\qquad P_{\mathscr{G}}-a.e.$$

$$E(\overline{\lim_{n\to\infty}} T_n|\mathscr{G})\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} E(T_n|\mathscr{G}),\qquad P_{\mathscr{G}}-a.e.$$

证明　因为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} T_n=\bigvee\limits_{N=1}^{\infty}\bigwedge\limits_{n=N}^{\infty} T_n$，因此，由定理9.10知

$$E(\underline{\lim_{n\to\infty}} T_n|\mathscr{G})=\lim_{N\to\infty} E(\bigwedge_{n=N}^{\infty} T_n|\mathscr{G})$$

$$\leqslant\lim_{N\to\infty}\bigwedge_{n=N}^{\infty} E(T_n|\mathscr{G})=\underline{\lim_{n\to\infty}} E(T_n|\mathscr{G}),\quad P_{\mathscr{G}}-a.e.$$

同理可证另一个不等式.　　证毕.

定理9.12　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n=T$，$P-a.e$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} E(T_n|\mathscr{G})=E(T|\mathscr{G})$，$P_{\mathscr{G}}-a.e.$

证明　注意到 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} T_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} T_n=T$，　$P-a.e.$ 以及定理9.11立即得所欲证.　证毕.

设 $\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$ 是完备化的概率空间，$\{T_u,u\in U\}$ 是定义在 $\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$ 上的 B^XRF 集族，参数集 U 为 R 中任意非空子集，$\{\mathscr{F}_u,u\in U\}$ 为一族 $\mathscr{F}$ 的由 P 完备化的子 σ 代数.

定义9.5　称 B^XRF 集族 $\{T_u,u\in U\}$ 为随机 F 集值函数，简称为 B^XRF 集值函数. 当 U 为可数集时，$\{T_u,u\in U\}$ 称为 B^X 型随机 F 集序列，简称为 B^XRF 集序列. 当 U 为区间时，称 $\{T_u,u\in U\}$ 为 B^XRF 过程.

定义9.6　设 $\{\mathscr{F}_u,u\in U\}$ 为 $\mathscr{F}$ 的完备化子 σ 代数族，$\{T_u,u\in U\}$ 为 B^XRF 集值函数. 如果 $\forall\ u,v\in U,u<v$，有 $\mathscr{F}_u\subseteq\mathscr{F}_v$，并且 $T_u\in\mathscr{F}_u(\mathscr{B}^X)$，$u\in U$，则称 $\{T_u,u\in U\}$ 为 $\{\mathscr{F}_u,u\in U\}$ **适应的**. 我们把 B^XRF 适应过程简记作 $\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$.

定义9.7 称$\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为 B^X **型** F **上(下)鞅**,是指当 $u<v,u,v\in U$ 时,有

$$E(T_v|\mathscr{F}_u)\leqslant(\geqslant)T_u, \qquad P-a.e.$$

称$\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为 B^X **型** F **鞅**.是指当 $u<v,u,v\in U$ 时,有

$$E(T_v|\mathscr{F}_u)=T_u. \qquad P-a.e.$$

在不致混淆时,我们把 B^XF 上鞅、下鞅、鞅简称为上鞅、下鞅、鞅.

定理9.13. $\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为上鞅(下鞅或鞅)当且仅当$\forall x\in X$,$\{C_x\circ T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为上鞅(下鞅、鞅).

证明 $\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为上鞅

$\Leftrightarrow\forall u,v\in U,u<v$,有 $E(T_v|\mathscr{F}_u)\leqslant T_u,P-a.e$

$\Leftrightarrow\forall x\in X,u,v\in U,u<v$,有 $C_x\circ E(T_v|\mathscr{F}_u)\leqslant C_x\circ T_u,P-a.e$

$\Leftrightarrow\forall x\in X,u,v\in U$,有 $E(C_x\circ T_v|\mathscr{F}_u)\leqslant C_x\circ T_u,P-a.e$

$\Leftrightarrow\forall x\in X,\{C_x\circ T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$ 为上鞅.

同理可证,下鞅及鞅时的情形.证毕.

定理9.14 $\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为上鞅(下鞅、鞅)当且仅当$\forall u,v\in U,u<v$ 及$\forall x\in X$,有$\forall B_u\in\mathscr{F}_u$,

$$\int_{B_u}C_x\circ E(T_v|\mathscr{F}_u)dP_{\mathscr{F}_u}\leqslant(\geqslant、=)\int_{B_u}C_xT_u dP.$$

证明是直接的,从略.

定理9.15 (1) 如果$\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为上(下)鞅,则 $E(T_u)$为 u 的单调不增(单调不减)F 集值函数.

(2) 如果$\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为鞅.则 $E(T_u)$为一固定的 F 集.

证明 (1) 如果$\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为上鞅,则$\forall u,v\in U,u<v$ 时,有

$$E(T_v|\mathscr{F}_u)\leqslant T_u. \qquad P-a.e.$$

即　对于任何 $x\in X$，有

$$C_x \circ E(T_v|\mathscr{F}_u) \leqslant C_x \circ T_u, \qquad P - a.e.$$

从而，由 $B^X RF$ 集期望与条件期望的定义，即得

$$\begin{aligned} C_x \circ E(T_v) &= \int_\Omega C_x \circ T_v dP = \int_\Omega C_x \circ E(T_v|\mathscr{F}_u) dP_{\mathscr{F}_u} \\ &\leqslant \int_\Omega C_x \circ T_u dP_{\mathscr{F}_u} = \int_\Omega C_x \circ T_u dP \\ &= C_x \circ E(T_u). \end{aligned}$$

则由 x 的任意性即得，当 $u,v\in U,u<v$ 时，有 $E(T_v)\angle E(T_u)$ 即 $E(T_u)$ 为 u 的单调不增的 F 集值函数.

类似可证 $\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$ 是下鞅时的情形.

(2)　综合(1)上、下鞅的结果，即得所欲证. 证毕.

定理9.16　$\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$ 是鞅，且 $u,v\in U,u<v,T_v\in\mathscr{F}_u(\mathscr{B}^X),P-a.e$ 的充要条件是 $\forall\ u\in U,T_u=T$（固定 $B^X RF$ 集）$P-a.e.$

证明　必要性. 由定理9.14，$\forall\ u,v\in v,u<v$ 与 $\forall\ x\in X$ 有 $\forall\ B\in\mathscr{F}_u$，

$$\int_B C_x \circ E(T_v|\mathscr{F}_u) dP_{\mathscr{F}_u} = \int_B C_x \circ T_u dP_{\mathscr{F}_u}$$

又由条件期望的定义，有

$$\int_B C_x \circ E(T_v|\mathscr{F}_u) dP_{\mathscr{F}_u} = \int_B C_x \circ T_v dP_{\mathscr{F}_v}$$

则 $\int_B C_x \circ T_u dP_{\mathscr{F}_u} = \int_B C_x \circ T_v dP_{\mathscr{F}_v}$. 又由已知 $T_v\in\mathscr{F}_u(\mathscr{B}^X)$，则上式可写成

$$\int_B C_x \circ T_u dP_{\mathscr{F}_u} = \int_B C_x \circ T_v dP_{\mathscr{F}_u}.$$

从而得 $C_x \circ T_u = C_x \circ T_v, P-a.e.$ 再由 x 的任意性即得，$T_u=T_v, P-a.e.$ 即 T_u 为一固定的 $B^X RF$ 集.

充分性. 如果$\forall\ u\in U, T_u=T, P-a.e.$ 由定理9.2有 $u<v$,

$$E(T_v|\mathscr{F}_u)=T_v=T=T_u,\qquad P-a.e.$$

即$\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为鞅. 再由已知条件知, $u,v\in U, u<v, T_v\in\mathscr{F}_u(\mathscr{B}^X), P-a,e$ 证毕.

定理9.17 若$\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$, $\{S_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为上鞅, 则$\{T_u\wedge S_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$也为上鞅.

若$\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$, $\{S_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为下鞅, 则$\{T_u\vee S_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$也为下鞅.

证明 只给出上鞅情形的证明, 下鞅情形类似可证.

如果$\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$, $\{S_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$为上鞅, 则当 $u,v\in U, u<v$ 时,

$$E(T_v|\mathscr{F}_u)\leqslant T_u, P\text{-}a,e \text{ 及 } E(S_v|\mathscr{F}_u)\leqslant S_u,\qquad P\text{-}a,e.$$

又因 $T_v\wedge S_v\in\mathscr{F}_u(\mathscr{B}^X)$, 故

$$\begin{aligned}E(T_v\wedge S_v|\mathscr{F}_u)&\leqslant E(T_v|\mathscr{F}_u)\wedge E(S_v|\mathscr{F}_u)\\&\leqslant T_u\wedge S_u,\qquad P-a.e.\end{aligned}$$

则$\{T_u\wedge S_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$仍为上鞅. 证毕.

定理9.18如果$\{T_u,\mathscr{F}_u,u\in U\}$按 u 的增排列为鞅, 按 u 的减排列也为鞅, 则对任意 $u,v\in U, u\neq v$, 恒有 $T_u=T_v, P-a.e.$

证明 由已给条件与定理9.13知, $\forall\ u,v\in U, u\neq v$, 恒有$\forall\ x\in X$, $\quad C_x\circ T_u=C_x\circ T_v,\qquad P-a.e.$

又由 x 的任意性, 得到 $T_u=T_v,\qquad P-a.e.$ 证毕.

定理9.19 (B^X 型 F 鞅的收敛定理)

设$\{T_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$为 B^X 型 F 鞅或 F 下鞅, 则当 $n\to\infty$时, T_n 几乎处处收敛于 B^XRF 集, 记为 T, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$, $\quad P-a.e.$

证明 由定理9.13知, $\forall\ x\in X$, $\{C_x\circ T_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$为鞅或下鞅, 再据(分明)鞅或下鞅列的收敛定理(参见王寿仁编著《概率论

基础和随机过程》(现代数学基础丛书),科学出版社,定理5. 2. 1)知,$C_x \circ T_n$ 几乎处处收敛,即有

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} C_x \circ T_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} C_x \circ T_n, \qquad P - a.e.$$

其极限为随机变量列$\{C_x \circ T_n(\cdot)\}$的上、下极限,也就是 F 集列$\{C_x \circ T_n\}$的$\{C_x \circ T_n\}$的上、下极限. 故有

$$\forall x \in X, \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m=n}^{\infty} C_x \circ T_m = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{m=n}^{\infty} C_x \circ T_m, \qquad P - a.e.$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X, C_x \circ (\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m=n}^{\infty} T_m) = C_x \circ (\bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{m=n}^{\infty} T_m), \quad P - a.e.$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m=n}^{\infty} T_m = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{m=n}^{\infty} T_m, \qquad P - a.e.$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ 存在,且

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m=n}^{\infty} T_m = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{m=n}^{\infty} T_m, \quad P - a.e.$$

若把上等式右端记为 T,则$\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T, P - a.e.$ 证毕.

第六章 模糊数与模糊值函数

本章介绍模糊数与模糊值函数的基本知识. 为了阅读方便起见,还相应介绍了区间数与区间值函数的有关知识. 主要内容有:区间数、模糊数的定义与运算,模糊数度量空间与模糊数列的收敛性,模糊值可测函数与模糊值 Lebesgue 积分以及模糊值随机变量.

§1 区间数

为了学习模糊数的需要,作为预备知识,首先在本节介绍区间数的一些基本概念.

定义 1.1 设 $R=(-\infty,+\infty)$为实数空间,称 R 上的有限闭区间 $a=[a^-,a^+]$为**区间数**,区间数全体记作 $I(R)$.

特别,对于任何 $a\in R$,有 $a=[a,a]\in I(R)$. 因此 $R\subset I(R)$.

定义 1.2 设 $a=[a^-,a^+]$,$b=[b^-,b^+]\in I(R)$. (1)如果 $a^-\leqslant b^-$,$a^+\leqslant b^+$,称 a 小于或等于 b,或者 b 大于或等于 a,记作 $a\leqslant b$ 或 $b\geqslant a$.

(2)设 $f:R\times R\rightarrow R$ 为 R 上的一个二元运算,界定 $I(R)$上相应

的二元运算 f 为

$$f(a,b)=\{f(x,y)\mid x\in a,y\in b\},\ \forall\ a,b\in I(R).$$

如果记 $f=*$ 且 $f(x,y)=x*y$,则规定

$$a*b=\{x*y\mid x\in a,y\in b\}.$$

由上面的定义不难证明下列各命题.

命题 1.1　对于任何 $a,b\in I(R),k\in R$,有

$$a\vee b=[a^-\vee b^-,a^+\vee b^+];$$

$$a\wedge b=[a^-\wedge b^-,a^+\wedge b^+];$$

$$a+b=[a^-+b^-,a^++b^+];$$

$$a-b=[a^--b^+,a^+-b^-];$$

$$a\cdot b=[a^-\cdot b^-\wedge a^-\cdot b^+\wedge a^+\cdot b^-\wedge a^+\cdot b^+,\ a^-\cdot b^-\vee a^-\cdot b^+\vee a^+\cdot b^-\vee a^+\cdot b^+];$$

$$k\cdot a=\begin{cases}[k\cdot a^-,k\cdot a^+], & k>0,\\ 0, & k=0,\\ [k\cdot a^+,k\cdot a^-], & k<0;\end{cases}$$

$$-a\triangleq(-1)\cdot a=[-a^+,-a^-];$$

$$\frac{a}{b}=\left[\frac{a^-}{b^-}\wedge\frac{a^-}{b^+}\wedge\frac{a^+}{b^-}\wedge\frac{a^+}{b^+},\frac{a^-}{b^-}\vee\frac{a^-}{b^+}\vee\frac{a^+}{b^-}\vee\frac{a^+}{b^+}\right],\qquad 0\overline{\in}b;$$

$$b^{-1}\triangleq\frac{1}{b}=\left[\frac{1}{b^-}\wedge\frac{1}{b^+},\frac{1}{b^-}\vee\frac{1}{b^+}\right],\qquad 0\overline{\in}b.$$

命题 1.2　$\langle I(R),\leqslant,\vee,\wedge\rangle$是一个分配格.

命题 1.3　$\langle I(R),+\rangle$是一个交换半群,其零元素为 0.

$\langle I(R),\cdot\rangle$是一个交换半群,其幺元素为 1.

命题 1.4　设 $a,b\in I(R)$,则

(1)　$-(-a)=a$;

(2)　$a\leqslant b$ 当且仅当 $-b\leqslant -a$;

(3)　$a=-a$ 当且仅当 $a^-=-a^+$;

(4) $-(a \vee b)=(-a) \wedge (-b), -(a \wedge b)=(-a) \vee (-b)$;

(5) $a-b=a+(-b)$;

(6) $a-0=a, 0-a=-a$;

(7) $a-a=0$ 当且仅当 $a \in R$.

命题 1.5 对于任何 $a,b,c \in I(R)$,有

(1) $(a \vee b)+c=(a+c) \vee (b+c)$;

$(a \wedge b)+c=(a+c) \wedge (b+c)$;

(2) $(a \vee b)-c=(a-c) \vee (b-c)$,

$(a \wedge b)-c=(a-c) \wedge (b-c)$,

$c-(a \vee b)=(c-a) \wedge (c-b)$,

$c-(a \wedge b)=(c-a) \vee (c-b)$;

(3) $(a-b)-c=a-(b+c)$.

命题 1.6 设 $a,b \in I(R), j,k \in R$,则

(1) $1 \cdot a=a, 0 \cdot a=0$;

(2) $(jk) \cdot a=j \cdot (k \cdot a)$;

(3) $k \cdot (a \vee b)=\operatorname{sgn}(k) \cdot (|k| \cdot a \vee |k| \cdot b)$,

$k \cdot (a \wedge b)=\operatorname{sgn}(k) \cdot (|k| \cdot a \wedge |k| \cdot b)$,

其中

$$\operatorname{sng}(k)=\begin{cases} 1, & k>0, \\ 0, & k=0, \\ -1, & k<0; \end{cases}$$

(4) $k \cdot (a+b)=k \cdot a+k \cdot b$;

(5) $\frac{a}{b}=a \cdot b^{-1}$, $\qquad 0 \bar{\in} b$.

§2　F 数的定义

定义 2.1　设 $\alpha\in\mathscr{F}(R)$满足下列条件：

(1)　正规性：$\ker\alpha\neq\Phi$；

(2)　闭凸性：$\forall\ \lambda\in(0,1]$，$\alpha_\lambda=[\alpha_\lambda^-,\alpha_\lambda^+]\in I(R)$.

称 α 为 R 上的**模糊数**简称为 F 数. R 上的 F 数全体记作 $F(R)$.

特别，记 $\dot{I}(R)=\{\dot{a}\,|\,a\in I(R),\dot{a}=\chi_a$ 为区间 $a=[a^-,a^+]$的特征函数$\}$，显然有 $\dot{I}(R)\subset F(R)$.

下面我们讨论 F 数的一些等价的表达方式.

定理 2.1　设 $\alpha\in\mathscr{F}(R)$，则 $\alpha\in F(R)$的充要条件是：

(1)　存在 $\alpha_1^-,\alpha_1^+\in R$，$\alpha_1^-\leqslant\alpha_1^+$，使得 $\ker\alpha=[\alpha_1^-,\alpha_1^+]$；当 $x<\alpha_1^-$ 时，$\alpha(x)$为单调不减且右连续，当 $x>\alpha_1^+$ 时，$\alpha(x)$为单调不增且左连续；

(2)　$\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$.

证明　充分性. 只需证明$\forall\ \lambda\in(0,1]$，$\alpha_\lambda\in I(R)$.

令 $\alpha_\lambda^-=\inf\{x\,|\,x\in\alpha_\lambda\}$，$\alpha_\lambda^+=\sup\{x\,|\,x\in\alpha_\lambda\}$. 由条件(2)知，$-\infty<\alpha_\lambda^-\leqslant\alpha_\lambda^+<+\infty$. 对于任何 $x\in\alpha_\lambda$，有 $\alpha(x)\geqslant\lambda$. 由 $\alpha_\lambda^-,\alpha_\lambda^+$ 的定义知，$x\in[\alpha_\lambda^-,\alpha_\lambda^+]$，则 $\alpha_\lambda\subseteq[\alpha_\lambda^-,\alpha_\lambda^+]$. 又若 $x\overline{\in}\alpha_\lambda$，则 $\alpha(x)<\lambda$. 由条件(1)知，$x\leqslant\alpha_\lambda^-$ 或 $x\geqslant\alpha_\lambda^+$. 于是，$x\overline{\in}(\alpha_\lambda^-,\alpha_\lambda^+)$，故$(\alpha_\lambda^-,\alpha_\lambda^+)\subseteq\alpha_\lambda$.

如果进一步证明 $\alpha_\lambda^-\in\alpha_\lambda$，$\alpha_\lambda^+\in\alpha_\lambda$，则 $\alpha_\lambda=[\alpha_\lambda^-,\alpha_\lambda^+]\in I(R)$.

事实上，如果$(\alpha_\lambda^-,\alpha_\lambda^+)=\Phi$，则 $\alpha_\lambda^-=\alpha_\lambda^+=\alpha_\lambda\in I(R)$. 如果$(\alpha^-,\alpha_\lambda^+)\neq\Phi$，由于$\forall\ x\in(\alpha_\lambda^-,\alpha_\lambda^+)$有 $\alpha(x)\geqslant\lambda$，由条件(1)知

$$\alpha(\alpha_\lambda^-)=\lim_{x\to\alpha_\lambda^-+0}\alpha(x)\geqslant\lambda.$$

则 $a_\lambda^- \in a_\lambda$. 同理可证 $a_\lambda^+ \in a_\lambda$.

由 F 数的定义知, $a \in F(R)$.

必要性. (1)由于 $\mathrm{Ker}a \neq \Phi$, 且 $\mathrm{Ker}a = a_1 = [a_1^-, a_1^+] \in I(R)$.

如果 $x < y < a_1^-$, 但 $a(x) > a(y)$, 则存在 $\lambda \in (0,1)$, 使得 $a(x) > \lambda > a(y)$. 于是, 有 $x \in a_\lambda = [a_\lambda^-, a_\lambda^+]$, 但 $y \overline{\in} [a_\lambda^-, a_\lambda^+]$, 因此又有 $y < x$. 这与 $x < y$ 的假设相矛盾. 故必有 $a(x) \leqslant a(y)$.

又若 $\lim\limits_{y \to x+0} a(y) = a(x+0) \neq a(x)$, 则 $a(x) < a(x+0)$. 于是, 存在 $\lambda \in (0,1)$, 使得 $a(x) < \lambda < a(x+0)$. 一方面, $x \overline{\in} a_\lambda$, 则 $x < a_\lambda^-$; 另一方面, 当 $\varepsilon \to +0$ 时, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ 且 $x + \varepsilon < a_1^-$, 则 $a(x+\varepsilon) \geqslant a(x+0) > \lambda$, 于是 $x + \varepsilon > a_\lambda^-$, 故 $x \geqslant a_\lambda^-$. 矛盾. 所以 $a(x+0) = a(x)$.

综合上述, 当 $x < a_1^-$ 时, $a(x)$ 单调不减且右连续.

同理可证, 当 $x > a_1^+$ 时, $a(x)$ 单调不增且左连续.

(2)如果 $\lim\limits_{x \to -\infty} a(x) = k > 0$, 则当 $\lambda \in (0, k)$ 时, $a_\lambda \overline{\in} I(R)$ 故 $\lim\limits_{x \to -\infty} a(x) = 0$. 同理可证, $\lim\limits_{x \to +\infty} a(x) = 0$. 证毕.

推论 1 设 $a \in F(R)$, 则

$$a(x) = \begin{cases} \bigvee\limits_{a_\lambda^- \leqslant x} a(a_\lambda^-), & x \in \mathrm{supp}a \cap (-\infty, a_1^-), \\ 1, & x \in [a_1^-, a_1^+], \\ \bigvee\limits_{a_\lambda^+ \geqslant x} a(a_\lambda^+), & x \in \mathrm{supp}a \cap (a_1^+, +\infty), \\ 0, & x \overline{\in} \mathrm{supp}a. \end{cases}$$

证明 如果 $\mathrm{supp}a = [a_1^-, a_1^+]$. 显然成立.

如果 $\mathrm{supp}a \neq [a_1^-, a_1^+]$, 当 $a_\lambda^- \leqslant x < a_1^-$ 时, 由定理 2.1 知, $a(x) \geqslant a(x_\lambda^-)$. 于是, 当 $x \in \mathrm{supp}a \cap (-\infty, a_1^-)$ 时, 有

$$a(x) \geqslant \bigvee_{a_\lambda^- \leqslant x} a(a_\lambda^-).$$

又若 $\alpha(x)>\bigvee_{\alpha_\lambda^-\leqslant x}\alpha(\alpha_\lambda^-)$，则存在 $\lambda_0\in(0,1)$，使得

$$\alpha(x)>\lambda_0>\bigvee_{\alpha_\lambda^-\leqslant x}\alpha(\alpha_\lambda^-).$$

则 $\alpha_{\lambda_0}^-\leqslant x$. 因此，$\lambda_0\leqslant\alpha(\alpha_{\lambda_0}^-)\leqslant\bigvee_{\alpha_\lambda^-\leqslant x}\alpha(\alpha_\lambda^-)$. 发生矛盾. 所以

$$\alpha(x)=\bigvee_{\alpha_\lambda^-\leqslant x}\alpha(\alpha_\lambda^-).$$

同理可证，当 $x\in\mathrm{supp}\alpha\cap(\alpha_1^+,+\infty)$ 时，$\alpha(x)=\bigvee_{\alpha_\lambda^-\geqslant x}\alpha(\alpha_\lambda^-)$. 显然，当 $x\in[\alpha_1^-,\alpha_1^+]$ 时，$\alpha(x)=1$，当 $x\overline{\in}\mathrm{supp}\alpha$ 时，$\alpha(x)=0$. 证毕.

显然有下面的推论.

推论 2 设 $\alpha\in F(R)$，$0<\lambda_1<\lambda_2<1$，则 $\alpha_{\lambda_1}^-\leqslant\alpha_{\lambda_2}^-\leqslant\alpha_{\lambda_2}^+\leqslant\alpha_{\lambda_1}^+$.

令

$^*F=\{{}^*\alpha\mid{}^*\alpha(x)$ 是 R 上的单调不减且右连续函数，

$$\lim_{x\to-\infty}{}^*\alpha(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty}{}^*\alpha(x)=1\},$$

$F^*=\{\alpha^*\mid\alpha^*(x)$ 是 R 上的单调不增且左连续函数，

$$\lim_{x\to-\infty}\alpha^*(x)=1,\ \lim_{x\to+\infty}\alpha^*(x)=0\}$$

$F=\{({}^*\alpha,\alpha^*)\mid{}^*\alpha\in{}^*F,\alpha^*\in F^*$ 且存在 $x\in R$，使得 ${}^*\alpha(x)=\alpha^*(x)=1\}$.

定理 2.2 $F(R)=\{\alpha={}^*\alpha\wedge\alpha^*\mid({}^*\alpha,\alpha^*)\in F\}$，其中

$$({}^*\alpha\wedge\alpha^*)(x)={}^*\alpha(x)\wedge\alpha^*(x),\forall\, x\in R.$$

证明 如果 $\alpha={}^*\alpha\wedge\alpha^*$，$({}^*\alpha,\alpha^*)\in F$. 由 F 数的定义知，$Ker\alpha\neq\Phi$，令 $ker\alpha=[\alpha_1^-,\alpha_1^+]$，其中 $\alpha_1^-=\inf\{x\mid{}^*\alpha(x)=1\}$，$\alpha_1^+=\sup\{x\mid\alpha^*(x)=1\}$（显然 $-\infty<\alpha_1^-\leqslant\alpha_1^+<+\infty$）. 由 $^*F$ 与 F^* 的定义知，α 满足定理 2.1 的条件，所以 $\alpha\in F(R)$.

反之，如果 $\alpha\in F(R)$，令

$${}^*\alpha(x)=\begin{cases}\alpha(x), & x<\alpha_1^-,\\ 1, & x\geqslant\alpha_1^-,\end{cases}$$

$$\alpha^*(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a_1^+,\\ \alpha(x), & x>a_1^+.\end{cases}$$

由定理 2.1 知，${}^*\alpha\in{}^*F$，$\alpha^*\in F^*$，而且 ${}^*\alpha(a_1^-)=\alpha^*(a_1^+)=1$，则 $({}^*\alpha,\alpha^*)\in F$ 且 $\alpha={}^*\alpha\wedge\alpha^*$. 证毕.

设映射 $h:(0,1]\to I(R)$ 满足条件：若 $0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant 1$，则 $h(\lambda_2)\subseteq h(\lambda_1)$，称 h 为**区间数套**. 区间数套全体记作 H. 并记

$$G=\{h\in H\mid\forall\ \lambda\in(0,1]\text{ 有 }\bigcap_{\delta<\lambda}h(\delta)=h(\lambda)\}.$$

定理 2.3 (1) $F(R)=\{\alpha=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}(\lambda\wedge\chi_{h(\lambda)})\mid h\in H$ 且 $\alpha_\lambda=\bigcap_{\delta<\lambda}h(\delta)\}$.

(2) $F(R)=\{\alpha=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}(\lambda\wedge\chi_{h(\lambda)})\mid h\in G$ 且 $\alpha_\lambda=h_{(\lambda)}\}$.

证明 (1) 若 $\alpha\in F(R)$，令 $h:(0,1]\to I(R)$ 满足条件：$\forall\ \lambda\in(0,1]$，$\alpha_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq h(\lambda)\subseteq\alpha_\lambda$. 由分解定理知，对于任何 $x\in R$，有

$$\alpha(x)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}[\lambda\wedge\chi_{h(\lambda)}(x)]=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}(\lambda\wedge\chi_{h(\lambda)})(x)$$

且 $\alpha_\lambda=\bigcap_{\delta<\lambda}h(\delta)$.

反之，若 $\alpha=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}(\lambda\wedge\chi_{h(\lambda)})$，$h\in H$ 且 $\alpha_\lambda=\bigcap_{\delta<\lambda}h(\delta)$. 容易验证，$\mathrm{Ker}\alpha\neq\Phi$ 且 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$\alpha_\lambda\in I(R)$. 所以 $\alpha\in F(R)$.

(2) 类似于(1)的证明. 证毕.

§ 3 F 数的序结构与运算

定义 3.1 设 $\alpha,\beta\in F(R)$.

(1) 如果对于任何 $\lambda\in(0,1]$，有 $\alpha_\lambda\leqslant\beta_\lambda$，称 α 小于或等于 β 或者 β 大于或等于 α，记作 $\alpha\leqslant\beta$ 或者 $\beta\geqslant\alpha$.

(2) 设 $*\in\{\vee,\wedge,+,-,\cdot,\div\}$，规定

$$(\alpha * \beta)(z) = \bigvee_{x*y=z} [\alpha(x) \wedge \beta(y)], \qquad \forall z \in R.$$

定理 3.1 (1) $\langle F(R), \leqslant \rangle$是偏序集.

(2) 设 $\alpha, \beta \in F(R)$. 则 $\alpha \leqslant \beta$ 的充要条件是对于任何 $x \in R$, ${}^*\alpha(x) \geqslant {}^*\beta(x), \alpha^*(x) \leqslant \beta^*(x)$.

(3) 设 $* \in \{\vee, \wedge, +, -, \cdot\}$,则对于任何 $\alpha, \beta \in F(R)$,有 $\alpha * \beta \in F(R)$且$(\alpha * \beta)_\lambda = \alpha_\lambda * \beta_\lambda, \forall \lambda \in (0,1]$.

证明 (1),(2)显然.

(3) 令 $f^*: R \times R \to R, \quad (x,y) \mapsto f^*(x,y) = x * y$.

由 Zadeh 的扩张原理,对于任何 $A \times B \in \mathscr{F}(R \times R)$,有

$$(A * B)(z) = \bigvee_{x*y=z} [A(x) \wedge B(y)], \qquad \forall z \in R.$$

特别,对于任何 $\alpha, \beta \in F(R) \subset \mathscr{F}(R)$,便得到定义 3.1 的形式:

$$(\alpha * \beta)(z) = \bigvee_{x*y=z} [\alpha(x) \wedge \beta(y)], \qquad \forall z \in R.$$

根据第三章定理 1.1(扩张定理 I)有

$$(\alpha * \beta)(z) = \bigvee_{\lambda \in (0,1]} [\lambda \wedge \chi_{\alpha_\lambda * \beta_\lambda}](z), \qquad \forall z \in R.$$

而且$\forall \lambda \in (0,1], (\alpha * \beta)_\lambda = \bigcap_{\delta < \lambda} (\alpha_\delta * \beta_\delta) = \alpha_\lambda * \beta_\lambda \in I(R)$. 再由定理 2.3 知,$\alpha * \beta \in F(R)$. 证毕.

推论 设 $\alpha, \beta \in F(R)$. 如果 $0 \overline{\in} \mathrm{supp}\beta$,则$\frac{\alpha}{\beta} \triangleq \alpha \div \beta \in F(R)$,且 $\forall \lambda \in (0,1], \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_\lambda = \frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}$.

证明 如果 $0 \overline{\in} \mathrm{supp}\beta$,则$\frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} \in I(R)$,类似于定理 3.1(3)的证明,立即得$\frac{\alpha}{\beta} \in F(R)$. 证毕.

由命题 1.2 与命题 1.3 以及定理 3.1 不难证明下述定理.

定理 3.2 (1) $\langle F(R), \leqslant, \vee, \wedge \rangle$是分配格.

(2) $\langle F(R), + \rangle$与$\langle F(R), \cdot \rangle$分别是交换半群且 $\dot{0} + \alpha = \alpha$,

$\dot{1} \cdot \alpha = \alpha, \forall\ \alpha \in F(R)$.

定义 3.2 设 $\alpha \in F(R), k \in R$, 界定

$$k \cdot \alpha = \dot{k} \cdot \alpha,\ -\alpha = (-1) \cdot \alpha.$$

且称 $-\alpha$ 为 α 的相反 F 数.

利用区间数运算的性质，以及定理 3.1 不难证明下列定理.

定理 3.2 设 $\alpha, \beta, \in F(R)$. 则

(1) $-(-\alpha) = \alpha$;

(2) $(-\alpha)(x) = \alpha(-x), \forall\ x \in R$,

$(-\alpha)_\lambda = -\alpha_\lambda, \forall\ \lambda \in (0,1]$;

(3) $\alpha \leqslant \beta$ 当且仅当 $-\beta \leqslant -\alpha$;

(4) $(\alpha - \alpha)(x) = (\alpha - \alpha)(-x), \forall\ x \in R$,

$\alpha - \alpha = \dot{0}$ 当且仅当 $\mathrm{Supp}\alpha \in R$;

(5) $-(\alpha \vee \beta) = (-\alpha) \wedge (-\beta), -(\alpha \wedge \beta) = (-\alpha) \vee (-\beta)$;

(6) $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$;

(7) $\alpha - \dot{0} = \alpha, \dot{0} - \alpha = -\alpha$;

(8) $\alpha = -\alpha$ 当且仅当 $\forall\ x \in R,\quad \alpha(x) = \alpha(-x)$.

定理 3.3 设 $\alpha, \beta, \gamma \in F(R)$.

(1) $(\alpha \vee \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) \vee (\beta + \gamma)$,

$(\alpha \wedge \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) \wedge (\beta + \gamma)$;

(2) $(\alpha \vee \beta) - \gamma = (\alpha - \gamma) \vee (\beta - \gamma)$,

$(\alpha \wedge \beta) - \gamma = (\alpha - \gamma) \wedge (\beta - \gamma)$,

$\gamma - (\alpha \vee \beta) = (\gamma - \alpha) \wedge (\gamma - \beta)$,

$\gamma - (\alpha \wedge \beta) = (\gamma - \alpha) \vee (\gamma - \beta)$;

(3) $(\alpha - \beta) - \gamma = \alpha - (\beta + \gamma)$,

$(\alpha - \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) - \beta = \alpha + (\gamma - \beta)$.

定理 3.4　设 $\alpha,\beta\in F(R)$，$j,k\in R$.

(1)　$1\cdot\alpha=\alpha$，$0\cdot\alpha=\dot{0}$；

(2)　如果 $k\neq 0$，则 $(k\cdot\alpha)(x)=\alpha\left(\frac{x}{k}\right)$，　$\forall\, x\in R$；

(3)　$(jk)\cdot\alpha=j\cdot(k\cdot\alpha)$；

(4)　$k\cdot(\alpha\vee\beta)=\mathrm{sgn}(k)\cdot(|k|\cdot\alpha\vee|k|\cdot\beta)$，

　　$k\cdot(\alpha\wedge\beta)=\mathrm{sgn}(k)\cdot(|k|\cdot\alpha\wedge|k|\cdot\beta)$；

(5)　$k\cdot(\alpha+\beta)=k\cdot\alpha+k\cdot\beta$；

(6)如果 $0\,\overline{\in}\,\mathrm{supp}\beta$，记 $\beta^{-1}=\dot{1}\div\beta$，则 $\beta^{-1}\in F(R)$ 且 $\frac{\alpha}{\beta}\triangleq\alpha\div\beta=\alpha\cdot\beta^{-1}$.

注 1. 如果 j,k 同为非正数或同为非负数，即 $jk\geqslant 0$，则

$$(j+k)\cdot\alpha=j\cdot\alpha+k\cdot\alpha,\qquad \forall\,\alpha\in F(R)$$

如果 $jk<0$，上面等式一般不成立，例如当 $j=1,k=-1,\alpha=\chi_{[0,1]}$ 时，上式左端等于 $\dot{0}$，而上式右端等于 $\chi_{[-1,1]}$.

注 2. 如果 $0\in\mathrm{supp}\beta$，则 $\frac{1}{\beta}\,\overline{\in}\,F(R)$，因为显然 $\beta\neq\dot{0}$，$\beta(0)>0$，则 $\beta(+0)\vee\beta(-0)>0$. 于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)(x)=\frac{1}{\beta(+0)}>0$ 或者 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)(x)=\frac{1}{\beta(-0)}>0$，所以 $\frac{1}{\beta}\,\overline{\in}\,F(R)$.

§4　F 数度量空间与 F 数列的收敛性

设 $\alpha,\beta\in F(R)$. 记

$${}^*D_{\alpha\beta}=\{\varepsilon>0\,|\,{}^*\beta(x-\varepsilon)-\varepsilon\leqslant{}^*\alpha(x)\leqslant{}^*\beta(x+\varepsilon)+\varepsilon,\quad\forall\,x\in R\},$$

$$D^*_{\alpha\beta}=\{\varepsilon>0\,|\,\beta^*(x+\varepsilon)-\varepsilon\leqslant\alpha^*(x)\leqslant\beta^*(x-\varepsilon)+\varepsilon,\quad\forall\,x\in R\},$$

$$d(\alpha,\beta)=\inf({}^*D_{\alpha\beta}\cap D^*_{\alpha\beta}).$$

引理 4.1 对于任何 $\alpha,\beta\in F(R)$,有

(1) ${}^*D_{\alpha\beta}={}^*D_{\beta\alpha}, D_{\alpha\beta}^*=D_{\beta\alpha}^*$;

(2) ${}^*D_{\alpha\beta}\cap D_{\alpha\beta}^*\supseteq\{\varepsilon\mid\varepsilon>d(\alpha,\beta)\}$.

证明是简单的,从略.

引理 4.2 (1) $0\leqslant d(\alpha,\beta)\leqslant 1,\forall\ \alpha,\beta\in F(R)$.

(2) 如果 $d(\alpha,\beta)<\varepsilon$,则对于任何 $x\in R$,

$${}^*\beta(x-\varepsilon)-\varepsilon<{}^*\alpha(x)<{}^*\beta(x+\varepsilon)+\varepsilon,$$

$$\beta^*(x+\varepsilon)-\varepsilon<\alpha^*(x)<\beta^*(x-\varepsilon)+\varepsilon.$$

(3) $d(\alpha,\beta)=0$ 当且仅当 $\alpha=\beta$.

证明 (1)显然.(2) 如果 $d(\alpha,\beta)<\varepsilon$,由引理 4.1(2) ${}^*D_{\alpha\beta}\cap D_{\alpha\beta}^*\supseteq(d(\alpha,\beta),\varepsilon)$,任取 $\varepsilon_0\in(d(\alpha,\beta),\varepsilon)$,则

$${}^*\beta(x-\varepsilon_0)-\varepsilon_0\leqslant{}^*\alpha(x)\leqslant{}^*\beta(x+\varepsilon_0)+\varepsilon_0,$$

$$\beta^*(x+\varepsilon_0)-\varepsilon_0\leqslant\alpha^*(x)\leqslant\beta^*(x-\varepsilon_0)+\varepsilon_0.$$

所以

$${}^*\beta(x-\varepsilon)-\varepsilon<{}^*\alpha(x)<{}^*\beta(x+\varepsilon)+\varepsilon,$$

$$\beta^*(x+\varepsilon)-\varepsilon<\alpha^*(x)<\beta^*(x-\varepsilon)+\varepsilon.$$

(3) 如果 $\alpha=\beta$,显然 $d(\alpha,\beta)=0$.反之,如果 $d(\alpha,\beta)=0$,则对于任何 $\varepsilon>0$,都有

$${}^*\alpha(x)<{}^*\beta(x+\varepsilon)+\varepsilon<{}^*\alpha(x+2\varepsilon)+2\varepsilon.$$

根据 ${}^*\alpha(\cdot),{}^*\beta(\cdot)$ 的右连续性,当 $\varepsilon\to+0$ 时,立即得 ${}^*\alpha={}^*\beta$.同理可证,$\alpha^*=\beta^*$,所以 $\alpha=\beta$.证毕.

定理 4.1 $d(\cdot,\cdot)$ 是 $F(R)$ 上的距离函数,即满足

(1) $d(\alpha,\beta)\geqslant 0,\forall\ \alpha,\beta\in F(R)$,当且仅当 $\alpha=\beta$ 时,$d(\alpha,\beta)=0$;

(2) $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha),\forall\ \alpha,\beta\in F(R)$;

(3) $\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in F(R),d(\alpha,\gamma)\leqslant d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)$.

证明　(1),(2)　由引理 4.1 与引理 4.2 立即得证.

(3)　如果 $d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)<\varepsilon$,则存在 $\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$,使得 $d(\alpha,\beta)<\varepsilon_1,d(\beta,\gamma)<\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_2<\varepsilon$. 由引理 4.1(2),有

$$^*\beta(x-\varepsilon_1)-\varepsilon_1<{}^*\alpha(x)<{}^*\beta(x+\varepsilon_1)+\varepsilon_1,$$

$$\beta^*(x+\varepsilon_1)-\varepsilon_1<\alpha^*(x)<\beta^*(x-\varepsilon_1)+\varepsilon_1.$$

$$\gamma(x-\varepsilon_1-\varepsilon_2)-\varepsilon_2<{}^*\beta(x-\varepsilon_1),{}^*\beta(x+\varepsilon_1)<{}^*\gamma(x+\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\varepsilon_2$$

$$\gamma(x+\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\varepsilon_2<\beta^*(x+\varepsilon_1),\beta^*(x-\varepsilon_1)<\gamma^*(x-\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\varepsilon_2.$$

则

$$^*\gamma(x-\varepsilon_1-\varepsilon_2)-\varepsilon_1-\varepsilon_2<{}^*\alpha(x)<{}^*\gamma(x+\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

$$\gamma^*(x+\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\varepsilon_1-\varepsilon_2<\alpha^*(x)<\gamma^*(x-\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

于是

$$d(\alpha,\gamma)\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2<\varepsilon.$$

因此

$$\{\varepsilon|d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)<\varepsilon\}\subseteq\{\varepsilon|d(\alpha,\gamma)<\varepsilon\},$$

所以

$$d(\alpha,\gamma)\leqslant d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma).$$

证毕.

定义 4.1　称度量空间 $\langle F(R),d\rangle$ 为 F **数度量空间**

定理 4.2　如果对于任何 $\alpha\in F(R)$,记

$$0_d(\alpha,\varepsilon)\triangleq\{\beta|\beta\in F(R),d(\alpha,\beta)<\varepsilon\},$$

且称为 α 的 ε(开)邻域,则当 $\varepsilon>1$ 时恒有 $0_d(\alpha,\varepsilon)=F(R)$.

证明　由引理 4.2(1)立即得证.

定理 4.3　$\langle F(R),d\rangle$是可分空间,即 $F(R)$有可数子集$F^0(R)$为 $F(R)$的稠密子集.

证明　以 Q_0 表示[0,1]中全体有理数,令

$F^0(R)=\{\alpha\in F(R)|\alpha(\cdot)$的值域 $\alpha(R)$为 Q_0 的有限子集且

$\alpha(\cdot)$只在有理点不连续}. 不难验证 $F^0(R)$为可数集.

对于任何 $\alpha \in F(R)$和正整数 n,存在正有理数 r,使得

$$(r + \alpha_1^-) \wedge (r - \alpha_1^-) > \frac{1}{n}, {}^*\alpha(-r) \vee \alpha^*(r) \leqslant \frac{1}{n}.$$

再将区间$[-r,r]m$ 等分,其分点为$-r = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = r$,使得 $x_k - x_{k-1} = \frac{2r}{m} \leqslant \frac{1}{n}$令

$${}^*\alpha_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < -r, \\ \frac{{}^*n_k}{n}, & \text{当 } x_{k-1} \leqslant x < x_k \leqslant \alpha_1, \\ 1, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$\alpha_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x > r, \\ \frac{n_k^*}{n}, & \text{当 } \alpha_1^+ \leqslant x_{k-1} < x \leqslant x_k, \\ 1, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中${}^*n_k, n_k^*$ 为正整数且 $\frac{{}^*n_k}{n} \in \left[{}^*\alpha(x_{k-1}), {}^*\alpha(x_{k-1}) + \frac{1}{n}\right)$, $\frac{n_k^*}{n} \in \left[\alpha^*(x_k), \alpha^*(x_k) + \frac{1}{n}\right)$,不难验证,$\alpha_n = {}^*\alpha_n \wedge \alpha_n^* \in F^0(R)$,而且

$${}^*\alpha_n\left(x - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \leqslant {}^*\alpha(x) \leqslant {}^*\alpha_n\left(x + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}.$$

$$\alpha_n^*\left(x + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \leqslant \alpha^*(x) \leqslant \alpha_n^*\left(x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}.$$

则 $d(\alpha_n, \alpha) \leqslant \frac{1}{n}$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty} d(\alpha_n, \alpha) = 0$ 即 $F^0(R)$为 $F(R)$的稠密子集. 故$\langle F(R), d\rangle$是可分空间. 证毕.

定理 4.4 $\langle F(R), d\rangle$是完备空间.

证明 设$\{\alpha_n\}$是$\langle F(R), d\rangle$中任意给定的一个基本点列,欲证存在 $\alpha \in F(R)$,适合$\lim\limits_{n\to\infty} d(\alpha_n, \alpha) = 0$.

任给 $\varepsilon > 0$,存在正整数 $N = N(\varepsilon)$,使当 $m, n \geqslant N$ 时,有

$d(\alpha_m,\alpha_n)<\frac{\varepsilon}{2}$. 由引理 4.1, $\forall\ x\in R$, 有

$$^*\alpha_n\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}<{}^*\alpha_m(x)<{}^*\alpha_n\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\alpha_n^*\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}<\alpha_m^*(x)<\alpha_n^*\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

易见, $\{{}^*\alpha_m(x)\}$ 与 $\{\alpha_m^*(x)\}$ 为有界数列, 则存在收敛的子列 $\{{}^*\alpha_{m_i}(x)\}$ 与 $\{\alpha_{m_j}^*(x)\}$ 记 ${}^0\alpha(x)=\lim\limits_{i\to\infty}{}^*\alpha_{m_i}(x)$, $\alpha^0(x)=\lim\limits_{j\to\infty}\alpha_{m_j}^*(x)$, 则

$$^*\alpha_n\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant{}^0\alpha(x)\leqslant{}^*\alpha_n\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\alpha_n^*\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\alpha^0(x)\leqslant\alpha_n^*\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

记 ${}^*\alpha(x)=\inf\{{}^0\alpha(x')\mid x'>x\}$, $\alpha^*(x)=\inf\{\alpha^0(x')\mid x'<x\}$. 不难验证 ${}^*\alpha\in{}^*F$, $\alpha^*\in F^*$. 下面证明

$$\{x\in R\mid {}^*\alpha(x)\wedge\alpha^*(x)=1\}\neq\Phi.$$

对于 $\lambda\in(0,1]$, 记

$$\alpha_\lambda^-=\inf\{x\mid x\in R,{}^*\alpha(x)\geqslant\lambda\},$$

$$\alpha_\lambda^+=\sup\{x\mid x\in R,\alpha^*(x)\geqslant\lambda\},$$

$$(\alpha_n)_\lambda^-=\inf\{x\mid x\in R,{}^*\alpha_n(x)\geqslant\lambda\},$$

$$(\alpha_n)_\lambda^+=\sup\{x\mid x\in R,\alpha_n^*(x)\geqslant\lambda\}.$$

一方面

$$^*\alpha(\alpha_1^-)\leqslant{}^*\alpha_n\left(\alpha_1^-+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow\quad {}^*\alpha_n\left(\alpha_1^-+\frac{\varepsilon}{2}\right)\geqslant{}^*\alpha(\alpha_1^-)-\frac{\varepsilon}{2}=1-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \alpha_1^-+\frac{\varepsilon}{2}\geqslant(\alpha_n)_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^-$$

$$\Rightarrow\quad \alpha_1^-\geqslant\bigwedge_{N\geqslant1}\bigvee_{n\geqslant N}(\alpha_n)_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^- -\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1^- \geqslant \lim_{\varepsilon \to +0} \bigwedge_{N \geqslant 1} \bigvee_{n \geqslant N} (\alpha_n)_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^- \tag{1}$$

另一方面

$$^*\alpha_n\left(\alpha_{1-\frac{3\varepsilon}{2}}^- - \varepsilon\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant {}^*\alpha\left(\alpha_{1-\frac{3\varepsilon}{2}}^- - \frac{\varepsilon}{2}\right) < 1 - \frac{3\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad ^*\alpha_n\left(\alpha_{1-\frac{3\varepsilon}{2}}^- - \varepsilon\right) < 1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{1-\frac{3\varepsilon}{2}}^- - \varepsilon < (\alpha_n)_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^-$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{1-\frac{3\varepsilon}{2}}^- \leqslant \bigvee_{N \geqslant 1} \bigwedge_{n \geqslant N} (\alpha_n)_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^- + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1^- = \lim_{\varepsilon \to +0} \alpha_{1-\frac{3\varepsilon}{2}}^- \leqslant \lim_{\varepsilon \to +0} \bigvee_{N \geqslant 1} \bigwedge_{n \geqslant N} (\alpha_n)_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^- \tag{2}$$

再由

$$\bigvee_{N \geqslant 1} \bigwedge_{n \geqslant N} (\alpha_n)_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^- \leqslant \lim_{n \to \infty} (\alpha_n)_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^- \leqslant \bigwedge_{N \geqslant 1} \bigvee_{n \geqslant N} (\alpha_n)_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^-$$

与(1)、(2)式，得

$$\alpha_1^- = \lim_{\lambda \to 1-0} \left[\lim_{n \to \infty} (\alpha_n)_\lambda^-\right].$$

同理可证

$$\alpha_1^+ = \lim_{\lambda \to 1-0} \left[\lim_{n \to \infty} (\alpha_n)_\lambda^+\right].$$

再因$(\alpha_n)_\lambda^- \leqslant (\alpha_n)_\lambda^+$ 则得 $\alpha_1^- \leqslant \alpha_1^+$. 于是

$$\{x \in R \mid {}^*\alpha(x) \wedge \alpha^*(x) = 1\} = [\alpha_1^-, \alpha_1^+] \neq \Phi.$$

所以 $\alpha = {}^*\alpha \wedge \alpha^* \in F(R)$. 而且对于任何 $x \in R$，有

$$^*\alpha_n(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant {}^0\alpha(x) \leqslant {}^*\alpha(x) \leqslant {}^0\alpha\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) < {}^*\alpha_n(x+\varepsilon) + \varepsilon,$$

$$\alpha_n^*(x+\varepsilon) - \varepsilon \leqslant \alpha^0(x) \leqslant \alpha^*(x) \leqslant \alpha^0\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \alpha_n^*(x-\varepsilon) + \varepsilon.$$

则 $d(\alpha_n, \alpha) \leqslant \varepsilon$. 最后再由 ε 的任意性得 $\lim_{n \to \infty} d(\alpha_n, \alpha) = 0$. 证毕.

注　由定理 4.2 知$\langle F(R), d\rangle$是有界的. 但不是完全有界的，再由定理 4.4 知，$\langle F(R), d\rangle$不是列紧的度量空间.

事实上，如果 $\alpha_n = n$，$n = 1, 2, \cdots$，则对于任何相异的正整数 k, l

有 $d(\alpha_k,\alpha_l)=d(\dot{k},\dot{l})=1$. 因此，序列$\{\alpha_n\}$中不存在收敛的基本子列，即是说$\langle F(R),d\rangle$不是完全有界的.

下面我们继续讨论$\langle F(R),d\rangle$的结构.

设 $\alpha,\beta\in F(R)$，Q 表示全体有理数，ε 为非负实数，令

$$^*d(\alpha,\beta,\varepsilon)=\bigvee_{x\in Q}\{[^*\alpha(x)-{}^*\beta(x+\varepsilon)]\vee[^*\beta(x)-{}^*\alpha(x+\varepsilon)]\},$$

$$d^*(\alpha,\beta,\varepsilon)=\bigvee_{x\in Q}\{[\alpha^*(x)-\beta^*(x-\varepsilon)]\vee[\beta^*(x)-\alpha^*(x-\varepsilon)]\},$$

$$\alpha(\alpha,\beta,\varepsilon)={}^*d(\alpha,\beta,\varepsilon)\vee d^*(\alpha,\beta,\varepsilon).$$

$$D_{\alpha\beta}^-=\{\varepsilon\in(0,1]\mid\alpha_{\lambda-\varepsilon}^--\varepsilon\leqslant\beta_\lambda^-,\beta_{\lambda-\varepsilon}^--\varepsilon\leqslant\alpha_\lambda^-,\forall\ \lambda\in(\varepsilon,1]\},$$

$$D_{\alpha\beta}^+=\{\varepsilon\in(0,1]\mid\alpha_\lambda^+\leqslant\beta_{\lambda-\varepsilon}^++\varepsilon,\beta_\lambda^+\leqslant\alpha_{\lambda-\varepsilon}^-+\varepsilon.\forall\ \lambda\in(\varepsilon,1],$$

$$d'(\alpha,\beta)=inf(D_{\alpha\beta}^-\cap D_{\alpha\beta}^+).$$

$$d^-(\alpha,\beta,\varepsilon)=\bigvee_{\lambda\in(\varepsilon,1]\cap Q}\{[(\alpha_{\lambda-\varepsilon}^--\beta_\lambda^-)\vee(\beta_{\lambda-\varepsilon}^--\alpha_\lambda^-)]\wedge1\},$$

$$d^+(\alpha,\beta,\varepsilon)=\bigvee_{\lambda\in(\varepsilon,1]\cap Q}\{[(\alpha_\lambda^+-\beta_{\lambda-\varepsilon}^+)\vee(\beta_\lambda^+-\alpha_{\lambda-\varepsilon}^+)]\wedge1\},$$

$$d'(\alpha,\beta,\varepsilon)=d^-(\alpha,\beta,\varepsilon)\vee d^+(\alpha,\beta,\varepsilon).$$

定理 4.5　(1)　$d(\alpha,\beta,\varepsilon)\leqslant\varepsilon$ 当且仅当 $\varepsilon\in{}^*D_{\alpha\beta}\cap D_{\alpha\beta}^*$.

(2)　$d(\alpha,\beta,\cdot)$是$[0,+\infty)$到$[0,1]$的单调不增且右连续函数.

(3)　当 $d(\alpha,\beta)>\varepsilon$ 时，$d(\alpha,\beta,\varepsilon)>\varepsilon$；当 $d(\alpha,\beta)<\varepsilon$ 时，$d(\alpha,\beta,\varepsilon)<\varepsilon$；而且

$$d(\alpha,\beta,d(\alpha,\beta))\leqslant d(\alpha,\beta)\leqslant d(\alpha,\beta,d(\alpha,\beta)-0).$$

(4)　$\varepsilon\wedge d(\alpha,\beta,\varepsilon)\leqslant d(\alpha,\beta)\leqslant\varepsilon\vee d(\alpha,\beta,\varepsilon)$,　　$\forall\ \varepsilon\in(0,1]$

(5)　$$d(\alpha,\beta)=\bigvee_{\varepsilon\in(0,1]\cap Q}[\varepsilon\wedge d(\alpha,\beta,\varepsilon)]=\bigwedge_{\varepsilon\in(0,1]\cap Q}[\varepsilon\vee d(\alpha,\beta,\varepsilon)].$$

(6)　对于任何 $\alpha\in F(R)$令

$$O_d(\alpha,\varepsilon) = \{\beta \in F(R) \mid d(\alpha,\beta) < \varepsilon\},$$

$$V_d(\alpha,\varepsilon) = \{\beta \in F(R) \mid d(\alpha,\beta,\varepsilon) < \varepsilon\}.$$

则

$$O_d(\alpha,\varepsilon) \subseteq V_d(\alpha,\varepsilon), \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,1].$$

证明 (1) 显然

(2) 由${}^*\alpha(x+\cdot)$,${}^*\beta(x+\cdot)$,$\alpha^*(x-\cdot)$,$\beta^*(x-\cdot)$的单调不减性知,$d(\alpha,\beta,\cdot)$是单调不增的.再由${}^*\alpha(\cdot)$与${}^*\beta(\cdot)$的单调不减性与右连续性,得

$$\begin{aligned}
{}^*d(\alpha,\beta,\varepsilon+0) &= \lim_{\delta\to+0} {}^*d(\alpha,\beta,\varepsilon+\delta) \\
&= \bigvee_{\delta>0} {}^*d(\alpha,\beta,\varepsilon+\delta) \\
&= \bigvee_{\delta>0}\bigvee_{x\in Q}\{[{}^*\alpha(x)-{}^*\beta(x+\varepsilon+\delta)] \\
&\qquad \vee [{}^*\beta(x)-{}^*\alpha(x+\varepsilon+\delta)]\} \\
&= \bigvee_{x\in Q}\{[{}^*\alpha(x)-\bigwedge_{\delta>0}{}^*\beta(x+\varepsilon+\delta)] \\
&\qquad \vee [{}^*\beta(x)-\bigwedge_{\delta>0}{}^*\alpha(x+\varepsilon+\delta)]\} \\
&= \bigvee_{x\in Q}\{[{}^*\alpha(x)-{}^*\beta(x+\varepsilon)] \vee [{}^*\beta(x)-{}^*\alpha(x+\varepsilon)]\} \\
&= {}^*d(\alpha,\beta,\varepsilon).
\end{aligned}$$

同理

$$d^*(\alpha,\beta,\varepsilon+0) = d^*(\alpha,\beta,\varepsilon).$$

则

$$d(\alpha,\beta,\varepsilon+0) = {}^*d(\alpha,\beta,\varepsilon+0) \vee d^*(\alpha,\beta,\varepsilon+0) = d(\alpha,\beta,\varepsilon).$$

(3) 由(1)与(2)立即推出.

(4) 由(2)与(3)立即推出.

(5) 由(4)只需证明

$$\bigvee_{\varepsilon\in(0,1]\cap Q}[\varepsilon \wedge d(\alpha,\beta,\varepsilon)] = \bigwedge_{\varepsilon\in(0,1]\cap Q}[\varepsilon \vee d(\alpha,\beta,\varepsilon)]. \qquad (*)$$

如果等式(*)不成立.由(4)一定有

$$\bigvee_{\varepsilon\in(0,1]\cap Q}[\varepsilon\wedge d(\alpha,\beta,\varepsilon)]<\bigwedge_{\varepsilon\in(0,1]\cap Q}[\varepsilon\vee d(\alpha,\beta,\varepsilon)],$$

则存在 $\varepsilon_0\in(0,1)$ 使得

$$\bigvee_{\varepsilon\in(0,1]\cap Q}[\varepsilon\wedge d(\alpha,\beta,\varepsilon)]<\varepsilon_0<\bigwedge_{\varepsilon\in(0,1]\cap Q}[\varepsilon\vee d(\alpha,\beta,\varepsilon)].$$

因此

$$\varepsilon_0\wedge d(\alpha,\beta,\varepsilon_0)<\varepsilon_0<\varepsilon_0\vee d(\alpha,\beta,\varepsilon_0).$$

由上面左边的不等式得 $d(\alpha,\beta,\varepsilon_0)<\varepsilon_0$;但由上面右边的不等式又有 $d(\alpha,\beta,\varepsilon_0)>\varepsilon_0$. 这就出现矛盾. 故等式(*)必成立.

(6)　由(3)立即推出. 证毕.

类似地还可以证明下面的定理.

定理 4.6　(1)$d'(\alpha,\beta,\varepsilon)\leqslant\varepsilon$ 当且仅当 $\varepsilon\in D_{\alpha\beta}^-\cap D_{\alpha\beta}^+$.

(2)　$d'(\alpha,\beta,\cdot)$是(0,1]到(0,1]的单调不增且右连续函数.

(3)　当 $d'(\alpha,\beta)>\varepsilon$ 时,$d'(\alpha,\beta,\varepsilon)>\varepsilon$;当 $d'(\alpha,\beta,)<\varepsilon$ 时,$d'(\alpha,\beta,\varepsilon)<\varepsilon$;

而且

$$d'(\alpha,\beta,d'(\alpha,\beta))\leqslant d'(\alpha,\beta)\leqslant d'(\alpha,\beta,d'(\alpha,\beta)).$$

(4)　$\varepsilon\wedge d'(\alpha,\beta,\varepsilon)\leqslant d'(\alpha,\beta)\leqslant\varepsilon\vee d'(\alpha,\beta,\varepsilon),\quad\forall\,\varepsilon\in(0,1]$.

(5)　$$d'(\alpha,\beta)=\bigvee_{\varepsilon\in(0,1]\cap Q}[\varepsilon\wedge d'(\alpha,\beta,\varepsilon)]=\bigwedge_{\varepsilon\in(0,1)\cap Q}[\varepsilon\vee d'(\alpha,\beta,\varepsilon)].$$

(6)　对于任何 $\alpha\in F(R)$,令

$$O_{d'}(\alpha,\varepsilon)=\{\beta\in F(R)\,|\,d'(\alpha,\beta)<\varepsilon\}$$

$$V_{d'}(\alpha,\varepsilon)=\{\beta\in F(R)\,|\,d'(\alpha,\beta,\varepsilon)<\varepsilon\}$$

则

$$O_{d'}(\alpha,\varepsilon)\subseteq V_{d'}(\alpha,\varepsilon),\qquad\forall\,\varepsilon\in(0,1)$$

定理 4.7　对于任何 $\alpha,\beta\in F(R)$,有

(1) $^{*}D_{\alpha\beta}\cap(0,1]=D^{-}_{\alpha\beta},D^{*}_{\alpha\beta}\cap(0,1]=D^{+}_{\alpha\beta}$;

(2) $d(\alpha,\beta)=d'(\alpha,\beta)$.

证明 (1) 如果 $\varepsilon\in{}^{*}D_{\alpha\beta}\cap(0,1]$,则对于任何 $x\in R$, $^{*}\alpha(x)\leqslant{}^{*}\beta(x+\varepsilon)+\varepsilon$, $^{*}\beta(x)\leqslant{}^{*}\alpha(x+\varepsilon)+\varepsilon$. 于是,对于任何 $\lambda\in(\varepsilon,1]$,

$$\lambda\leqslant{}^{*}\alpha(\alpha^{-}_{\lambda})\leqslant{}^{*}\beta(\alpha^{-}_{\lambda}+\varepsilon)+\varepsilon.$$

所以 $\beta^{-}_{\lambda-\varepsilon}\leqslant\alpha^{-}_{\lambda}+\varepsilon$,即 $\beta^{-}_{\lambda-\varepsilon}-\varepsilon\leqslant\alpha^{-}_{\lambda}$. 同理,$\alpha^{-}_{\lambda-\varepsilon}-\varepsilon\leqslant\beta^{-}_{\lambda}$,故 $\varepsilon\in D^{-}_{\alpha\beta}$. 所以 $^{*}D_{\alpha\beta}\cap(0,1]\subseteq D^{-}_{\alpha\beta}$.

如果 $\varepsilon\in D^{-}_{\alpha\beta}$. 当 $^{*}\alpha(x)>\varepsilon$ 时,$\beta^{-}{}_{^{*}\alpha(x)-\varepsilon}-\varepsilon\leqslant\alpha^{-}{}_{^{*}\alpha(x)}\leqslant x$. 则

$$\dot{\alpha}(x)\leqslant{}^{*}\beta(x+\varepsilon)+\varepsilon;$$

当 $^{*}\alpha(x)\leqslant\varepsilon$ 时,显然有 $^{*}\alpha(x)\leqslant{}^{*}\beta(x+\varepsilon)+\varepsilon$. 同理,$^{*}\beta(x-\varepsilon)+\varepsilon\leqslant{}^{*}\alpha(x)$,所以 $\varepsilon\in{}^{*}D_{\alpha\beta}\cap(0,1]$. 故 $D^{-}_{\alpha\beta}\subseteq{}^{*}D_{\alpha\beta}\cap(0,1]$.

综合上述得 $^{*}D_{\alpha\beta}\cap(0,1]=D^{-}_{\alpha\beta}$. 同理,$D^{*}_{\alpha\beta}\cap(0,1]=D^{+}_{\alpha\beta}$.

(2) 由(1)立即推出. 证毕.

下面讨论 F 数列的收敛性.

定义 4.2 (1) 设 $\alpha_n\in F(R),n=1,2\cdots$. 如果存在 $\alpha\in F(R)$ 适合 $\lim\limits_{n\to\infty}d(\alpha_n,\alpha)=0$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}d'(\alpha_n,\alpha)=0$)称 $\{\alpha_n\}$ **依距离** d(或 d')**收敛**于 α,记作 $d-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$(或 $d'-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$).

(2) 设 $a_n=[a^{-}_n,a^{+}_n]\in I(R),n=1,2\cdots$. 如果存在 $a=[a^{-},a^{+}]\in I(R)$ 适合 $[\lim\limits_{n\to\infty}a^{-}_n,\lim\limits_{n\to\infty}a^{+}_n]=[a^{-},a^{+}]$,则称 $\{a_n\}$ **收敛**于 a. 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

(3) 设 $\alpha_n\in F(R),n=1,2\cdots,\alpha\in F(R)$,且对于任何 $\lambda\in(0,1]$ 令

$$h_{\alpha_n}(\lambda)=[h^{-}_{\alpha_n}(\lambda),h^{+}_{\alpha_n}(\lambda)]=(\alpha_n)_\lambda,$$

$$h_\alpha(\lambda)=[h^{-}_\alpha(\lambda),h^{+}_\alpha(\lambda)]=\alpha_\lambda,$$

$$C(\alpha)=\{x\in R\mid\alpha(\cdot)\text{ 在 }x\text{ 处连续}\},$$

$C(h_\alpha)=\{\lambda\in(0,1]\,|\,h_\alpha^-(\cdot),h_\alpha^+(\cdot)$ 在 λ 处连续$\}$.

如果对于任何 $x\in C(\alpha)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(x)=\alpha(x)$，称 $\{\alpha_n\}$ **弱收敛**于 α，记作 $W-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$.

如果对于任何 $\lambda\in C(h_\alpha)$, $\lim\limits_{n\to\infty}h_{\alpha_n}(\lambda)=h_\alpha(\lambda)$；称 $\{h_{\alpha_n}\}$ 弱收敛于 h_α，记作 $W-\lim\limits_{n\to\infty}h_{\alpha_n}=h_\alpha$.

定理 4.8　设 $\alpha_n\in F(R)$, $n=1,2,\cdots$, $\alpha\in F(R)$. 则下列五种收敛性相互等价.

(1)　$d-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$.

(2)　$d'-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$.

(3)　$W-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$.

(4)　$W-\lim\limits_{n\to\infty}h_{\alpha_n}=h_\alpha$.

(5)　$\bigcap\{\lim\limits_{n\to\infty}h_{\alpha_n}(\delta)\,|\,\delta<\lambda,\delta\in C(h_\alpha)\}=h_\alpha(\lambda)$, 　　$\forall\,\lambda\in(0,1]$.

证明　由定理 4.7(2)，显然有(1)⇔(2).

(1)⇒(3). 如果 $x\in C(\alpha)$，则对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$，使得 $x-\delta,x+\delta\in C(\alpha)$，而且

$$|{}^*\alpha(x)-{}^*\alpha(x-\delta)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|{}^*\alpha(x)-{}^*\alpha(x+\delta)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\alpha^*(x)-\alpha^*(x-\delta)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\alpha^*(x)-\alpha^*(x+\delta)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}d(\alpha_n,\alpha)=0$，则存在正整数 $N=N(\varepsilon)$，使得 $n>N$ 时，$d(\alpha_n,\alpha)<\delta<\frac{\varepsilon}{2}$. 由引理 4.2(2)，有

$$^*\alpha(x-\delta)-\delta<{}^*\alpha_n(x)<{}^*\alpha(x+\delta)+\delta,$$

$$\alpha^*(x+\delta)-\delta<\alpha_n^*(x)<\alpha^*(x-\delta)+\delta.$$

则

$$-\varepsilon<{}^*\alpha(x-\delta)-{}^*\alpha(x)-\delta<{}^*\alpha_n(x)-{}^*\alpha(x)$$
$$<{}^*\alpha(x+\delta)-{}^*\alpha(x)+\delta<\varepsilon$$
$$-\varepsilon<\alpha^*(x+\delta)-\alpha^*(x)-\delta<\alpha_n^*(x)-\alpha^*(x)$$
$$<\alpha^*(x-\delta)-\alpha^*(x)+\delta<\varepsilon$$

于是,对于任何 $x\in C(\alpha)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[{}^*\alpha_n(x)\wedge\alpha_n^*(x)]=\alpha(x)$,即 $W-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$.

(3)⇒(4),如果 $W-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$,即对于任何 $x\in C(\alpha)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(x)=\alpha(x)$. 则任给 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N=N(\varepsilon,x)$,使当 $n>N$ 时,有 $|\alpha_n(x)-\alpha(x)|<\varepsilon$. 如果 $\lambda'\in(0,1)$,则对于任给的 $\varepsilon\in(0,\lambda'\wedge(1-\lambda'))$ 与 $x\in h_{\alpha_n}(\lambda')\cap C(\alpha)$,有 $\alpha(x)>\alpha_n(x)-\varepsilon\geqslant\lambda'-\varepsilon$. 所以 $x\in h_\alpha(\lambda'-\varepsilon)\cap C(\alpha)$. 于是

$$h_{\alpha_n}(\lambda')\cap C(\alpha)\subseteq h_\alpha(\lambda'-\varepsilon)\cap C(\alpha).$$

再由 $C(\alpha)$在 R 处处稠密,则 $h_{\alpha_n}(\lambda')\subseteq h_\alpha(\lambda'-\varepsilon)$. 同理可证 $h_\alpha(\lambda'+\varepsilon)\subseteq h_{\alpha_n}(\lambda')$. 如果记

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}h_{\alpha_n}(\lambda')=[\overline{\lim_{n\to\infty}}h^-_{\alpha_n}(\lambda'),\underline{\lim_{n\to\infty}}h^+_{\alpha_n}(\lambda')],$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}h_{\alpha_n}(\lambda')=[\underline{\lim_{n\to\infty}}h^-_{\alpha_n}(\lambda'),\overline{\lim_{n\to\infty}}h^+_{\alpha_n}(\lambda')].$$

则

$$h_\alpha(\lambda'+\varepsilon)\subseteq\underline{\lim_{n\to\infty}}h_{\alpha_n}(\lambda')\subseteq\overline{\lim_{n\to\infty}}h_{\alpha_n}(\lambda')\subseteq h_\alpha(\lambda'-\varepsilon).$$

如果 $\lambda'\in \underset{\cdot}{C}(h_\alpha)$,再令 $\varepsilon\to0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}h_{\alpha_n}(\lambda')=h_\alpha(\lambda')$. 再由

$$\left|h^\pm_{\alpha_n}(1)-h^\pm_\alpha(1)\right|\leqslant\left|h^\pm_{\alpha_n}(1)-h^\pm_{\alpha_n}(\lambda')\right|+\left|h^\pm_{\alpha_n}(\lambda')-h^\pm_\alpha(\lambda')\right|$$
$$+\left|h^\pm_\alpha(\lambda')-h^\pm_\alpha(1)\right|$$

以及 $h_{\alpha_n}(\lambda)$, $h_\alpha(\lambda)$ 的左连续性，立即得 $\lim\limits_{n\to\infty} h_{\alpha_n}(1)=h_\alpha(1)$.

综合上述，得 $W-\lim\limits_{n\to\infty} h_{\alpha_n}=h_\alpha$.

(4)⇒(5)如果 $W-\lim\limits_{n\to\infty} h_{\alpha_n}=h_\alpha$，则对于任何 $\delta\in C(h_\alpha)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} h_{\alpha_n}(\delta)=h_\alpha(\delta)$. 所以

$$\bigcap\{\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}(\delta)\mid \delta<\lambda,\delta\in C(h_\alpha)\}=\bigcap\{h_\alpha(\delta)\mid\delta<\lambda,\delta\in C(h_\alpha)\}$$
$$=\bigcap_{\delta<\lambda} h_\alpha(\delta)=h_\alpha(\lambda).$$

(5)⇒(2)设 $\forall\ \lambda\in(0,1]$,

$$\bigcap\ \{\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}(\delta)\mid\delta\in(0,\lambda)\bigcap C(h_\alpha)\}=h_\alpha(\lambda),$$

则 $\forall\ \delta\in(0,\lambda)\bigcap C(h_\alpha)$,

$$\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}(\lambda)\subseteq h_\alpha(\lambda)\subseteq\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}(\delta).$$

任给 $\varepsilon\in(0,(1-\lambda)\wedge\lambda)$，存在 $\theta=\theta(\varepsilon,\lambda)\in(0,1)$，使当 $\lambda-\theta\varepsilon\in C(h_\alpha)$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}^-(\lambda-\theta\varepsilon)\leqslant h_\alpha^-(\lambda)\leqslant\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}^-(\lambda),$$
$$\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}^+(\lambda)\leqslant h_\alpha^+(\lambda)\leqslant\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}^+(\lambda-\theta\varepsilon).$$

而且存在正整数 $N=N(\varepsilon,\lambda)$，使当 $n>N$ 时，有

$$\left|\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}^\pm(\lambda-\theta\varepsilon)-h_{\alpha_n}^\pm(\lambda-\theta\varepsilon)\right|<\varepsilon.$$

则

$$h_{\alpha_n}^-(\lambda-\varepsilon)-\varepsilon\leqslant h_{\alpha_n}^-(\lambda-\theta\varepsilon)-\varepsilon$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}^-(\lambda-\theta\varepsilon)\leqslant h_\alpha^-(x),$$
$$h_\alpha^-(\lambda-\varepsilon)-\varepsilon\leqslant\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}^-(\lambda-\varepsilon)-\varepsilon$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}^-(\lambda-\theta\varepsilon)-\varepsilon$$
$$\leqslant h_{\alpha_n}^-(\lambda-\theta\varepsilon)\leqslant h_{\alpha_n}^-(\lambda),$$
$$h_{\alpha_n}^+(\lambda)\leqslant h_{\alpha_n}^+(\lambda-\theta\varepsilon)\leqslant\lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}^+(\lambda-\theta\varepsilon)+\varepsilon$$
$$\leqslant h_\alpha^+(\lambda-\theta\varepsilon)+\varepsilon\leqslant h_\alpha^+(\lambda-\varepsilon)+\varepsilon,$$

$$h_{\alpha}^{+}(\lambda) \leqslant \lim_{n\to\infty} h_{\alpha_n}^{+}(\lambda - \theta\varepsilon) \leqslant h_{\alpha_n}^{+}(\lambda - \theta\varepsilon) + \varepsilon$$
$$\leqslant h_{\alpha_n}^{+}(\lambda - \varepsilon) + \varepsilon.$$

所以 $\varepsilon \in D_{\alpha_n\alpha}^{-} \cap D_{\alpha_n\alpha}^{+}$. 则 $d(\alpha_n, \alpha) \leqslant \varepsilon$. 再由 ε 的任意性得 $\lim\limits_{n\to\infty} d'(\alpha_n, \alpha) = 0$, 即 $d' - \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. 证毕.

推论 设 $\alpha_n \in F(R)$, $n=1,2,\cdots$. 如果对于任何 $\lambda \in (0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n)_\lambda$ 存在,则 $d - \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ 存在,而且

$$(d - \lim_{n\to\infty}\alpha_n)_\lambda = \bigcap_{\delta \in (0,\lambda)} \lim_{n\to\infty}(\alpha_n)_\delta.$$

即

$$(d - \lim_{n\to\infty}\alpha_n)(x) = \bigvee_{\lambda\in(0,1]} (\lambda \wedge \chi_{\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n)_\lambda}(x)), \quad \forall x \in R.$$

§ 5 F 值可测函数

定义 5.1 设 $\langle F(R), d\rangle$ 是 F 数度量空间, τ_d 表示由距离 d 诱导的拓扑, $\sigma(\mathscr{E})$ 表示包含集族 $\mathscr{E}$ 的最小 σ 代数. 称 $\mathscr{B}_d \triangleq \sigma(\tau_d)$ 为 F 数集合的 *Borel* 域, $\langle F(R), \mathscr{B}_d\rangle$ 为 F 数可测空间.

注 由定理 4.7 知, $\tau_d = \tau_{d'}$, 从而 $\mathscr{B}_d = \sigma(\tau_{d'})$.

定义 5.2 设 $\langle \Omega, \mathscr{A}\rangle$ 为可测空间, $f(\cdot)$ 是 Ω 到 $F(R)$ 的映射. 如果 $f^{-1}(\mathscr{B}_d) \triangleq \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathscr{B}_d\} \subseteq \mathscr{A}$, 称 f 为 $\langle \Omega, \mathscr{A}\rangle$ 上的 **F 值可测函数**.

特别,如果 F 值可测函数 f 的值域 $f(\Omega)$ 是 $F(R)$ 的一个有限或可数子集,称 f 为**离散的 F 值可测函数**. 令

$$\Phi_d = \{g \mid g \text{ 是} \langle F(R), d\rangle \text{ 上的实值连续函数}\}$$

$$O_n(\alpha) = \left\{\beta \in F(R) \,\middle|\, d(\alpha, \beta) < \frac{1}{n}\right\}$$

$$\mathscr{E}_d = \{O_n(\alpha) \mid x \in F(R), n = 1,2\cdots\}$$

引理 5.1　设 $\sigma(g \mid g \in \Phi_d)$ 表示包含使得每个 $g(\in \Phi_d)$ 都成为 $\langle F(R), \mathscr{B}_d \rangle$ 上的实值可测函数的 F 数集合族的最小 σ 代数. 则 $\mathscr{B}_d = \sigma(g \mid g \in \Phi_d) = \sigma(\mathscr{E}_d)$.

证明　由于任何 $\alpha \in F(R)$, $d(\alpha, \cdot)$ 为 $\langle F(R), d \rangle$ 上的连续函数, 容易验证 $\sigma(\mathscr{K}_d) \subseteq \sigma(g \mid g \in \Phi_d) \subseteq$ E. 另一方面, 由 $\langle F(R), d \rangle$ 的可分性又有 $\mathscr{B}_d = \sigma(\tau_d) \subseteq \sigma(\mathscr{E}_d)$. 于是 $\mathscr{B}_d = \sigma(g \mid g \in \Phi_d) = \sigma(\mathscr{E}_d)$. 证毕.

引理 5.2　设 $\mathscr{K}$ 是 F 数集合族, $f(\cdot)$ 是 $\langle \Omega, \mathscr{A} \rangle$ 上的 F 值可测函数. 则 $\sigma[f^{-1}(\mathscr{K})] = f^{-1}[\sigma(\mathscr{K})]$.

证明　显然, $f^{-1}(\mathscr{K}) \subseteq f^{-1}[\sigma(\mathscr{K})]$ 且 $f^{-1}[\sigma(\mathscr{K})]$ 是 Ω 上的 σ 代数. 故 $\sigma[f^{-1}(\mathscr{K})] \subseteq f^{-1}[\sigma(\mathscr{K})]$. 又令

$$\mathscr{C} = \{A \subseteq F(R) \mid f^{-1}(A) \in \sigma[f^{-1}(\mathscr{K})]\},$$

显然, $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{C}$ 而且容易验证 $\mathscr{C}$ 是 σ 代数. 则 $\sigma(\mathscr{K} \subseteq \mathscr{C}$. 所以又有 $f^{-1}[\sigma(\mathscr{K})] \subseteq \sigma[f^{-1}(\mathscr{K})]$. 证毕.

引理 5.3　设 $\alpha \in F(R)$, $p_x(\alpha) = \alpha(x)$, $\forall x \in R$. 则 $p_x(\cdot)$ 是 $\langle F(R), \mathscr{B}_d \rangle$ 到 $[0,1]$ 的可测函数.

证明　对于任给的 $x \in R$ 与 $\lambda \in (0,1]$, 令

$$p_x^{-1}[0,\lambda) \triangleq \{\alpha \in F(R) \mid p_x(\alpha) < \lambda\}.$$

任给 $\alpha \in p_x^{-1}[0,\lambda)$ 当 $x < \alpha_1^-$ 时, $\alpha(x) = {}^*\alpha(x) < \lambda$, 由 ${}^*\alpha(\cdot)$ 的单调不减性与右连续性, 存在 $\delta > 0$ 适合 ${}^*\alpha(x) \leqslant {}^*\alpha(x+\delta) < \lambda$. 记 $\varepsilon = \delta \wedge [\lambda - {}^*\alpha(x+\delta)]$. 则对于任何 $\beta \in O_d(\alpha, \varepsilon)$, 有

$$\beta(x) \leqslant {}^*\beta(x) < {}^*\alpha(x+\varepsilon) + \varepsilon \leqslant {}^*\alpha(x+\varepsilon) + \lambda - {}^*\alpha(x+\delta) \leqslant \lambda.$$

于是 $\beta \in p_x^{-1}[0,\lambda)$. 因此 $O_d(\alpha,\varepsilon) \subseteq p_x^{-1}[0,\lambda)$ 即得 $p_x^{-1}[0,\lambda) \in \tau_d \subseteq \mathscr{B}_d$. 当 $x \geqslant \alpha_1^-$ 时, 同理可证 $p_x^{-1}[0,\lambda) \in \tau_d \subseteq \mathscr{B}_d$. 综合上述得证. 证毕.

类似地可以证明下面引理.

引理 5.4 设 $a \in F(R)$, $p_\lambda^{\pm}(a) = h_a^{\pm}(\lambda)$, $\forall \lambda \in (0,1]$. 则 $p_\lambda^-(\cdot)$与 $p_\lambda^+(\cdot)$是$\langle F(R), \beta_d \rangle$上的实值可测函数，即 $p_\lambda(\cdot) \triangleq [p_\lambda^-(\cdot), p_\lambda^+(\cdot)]$是$\langle F(R), \beta_d$ 上的区间值可测函数，

定理 5.1 设$\{f_n\}$是$\langle \Omega, \mathscr{A} \rangle$上的 F 值可测函数列. 如果对于任何 $\omega \in \Omega$, $d-\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$，则 f 也是$\langle \Omega, \mathscr{A} \rangle$上的 F 值可测函数.

证明 对于任何 $A \in \tau_d$, A' 表示 A 的补集，令

$$d(f_n(\omega), A') \triangleq inf\{d(f_n(\omega), a) \mid a \in A'\}, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

则

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, d(f_n(\omega), A') > \frac{1}{k}\right\} \in \mathscr{A}.$$

于是 $f^{-1}(\tau_d) \subseteq \mathscr{A}$. 再由引理 5.2 得 $f^{-1}(\mathscr{B}_d) = \sigma(f^{-1}(\tau_d)) \subseteq \mathscr{A}$. 所以 f 是$\langle \Omega, \mathscr{A} \rangle$上的 F 值可测函数. 证毕.

定理 5.2 设$\langle \Omega, \mathscr{A} \rangle$是可测空间，$f: \Omega \to F(R)$是 F 值函数，则下列各命题相互等价.

(1) f 是$\langle \Omega, \mathscr{A} \rangle$上的 F 值可测函数.

(2) $f^{-1}(\tau_d) \subseteq \mathscr{A}$.

(3) 对于任何 $g \in \Phi_d$, $g \circ f$ 是$\langle \Omega, \mathscr{A} \rangle$上的实值可测函数.

(4) 对于任何 $a \in F(R)$, $d(f(\cdot), a)$是$\langle \Omega, \mathscr{A} \rangle$上的实值可测函数.

(5) 存在 F 值可测函数列$\{f_n\}$，使得对于任何 $\omega \in \Omega$ 有

$$d - \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega).$$

(6) 存在 F 值可测函数列$\{f_n\}$，使得对于任何 $\omega \in \Omega$ 有

$$w - \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega).$$

(7) 存在 F 值可测函数列$\{f_n\}$，使得对于任何 $\omega \in \Omega$ 有

$$w-\lim_{n\to\infty}h_{f_n(\omega)}=h_{f(\omega)}.$$

(8)　如果对于任何 $x\in R$ 与 $\omega\in\Omega$,记 $f(\omega,x)=f(\omega)(x)$,则 $f(\cdot,x)$是$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上的实值可测函数.

(9)　如果对于任何 $\lambda\in(0,1]$与 $\omega\in\Omega$.记 $f_\lambda(\omega)=h_{f(\omega)}(\lambda)$,则 $f_\lambda(\cdot)$是$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上的区间值可测函数.

证明　根据定义 5.2,引理 5.1 与引理 5.2 即得(1)⇔(2)⇔(3)⇔(4).由定理 4.8 得(5)⇔(6)⇔(7).由引理 5.3 得(1)⇒(8).由引理 5.4 得(1)⇒(9).由定理 5.1 得(5)⇒(1).

(1)⇒(5)　如果 f 是$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上的 F 值可测函数,由$\langle F(R),d\rangle$的可分性知对于任何正整数 n,存在 $F(R)$的一个可数的$\frac{1}{n}$网$\{\alpha_{nk}\}$.令 $A_{n0}=\Phi$, $A_{n_k}=\left\{\alpha\in F(R)\,\middle|\,d(\alpha,\alpha_{nk})<\frac{1}{n}\right\}$, $B_{nk}=A_{nk}-\bigcup\limits_{i=1}^{k-1}A_{ni}$, $k=1,2\cdots$,则$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_{nk}=F(R)$, $B_{nk}\cap B_{nj}=\Phi,k\neq j$.则且$f^{-1}(B_{nk})\in\mathscr{A}$.于是

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{-1}(B_{nk})=\Omega,\quad f^{-1}(B_{nk})\cap f^{-1}(B_{nj})=\Phi,k\neq j.$$

再作 F 值函数列

$$f_n(\omega)=\alpha_{nk},\forall\ \omega\in f^{-1}(B_{nk}),k=1,2,\cdots.$$

则$\{f_n\}$为$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上离散的 F 值可测函数列,而且对于任何 $w\in\Omega$ 有

$$d-\lim_{n\to\infty}f_n(\omega)=f(\omega).$$

(8)⇒(4)　如果对于任何 $x\in R$, $f(\cdot,x)$是$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上的实值可测函数,则${}^*f(\cdot,x)$与 $f^*(\cdot,x)$是$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上的实值可测函数.于是对于任何 $\alpha\in F(R)$, ${}^*f(\cdot,x)-{}^*\alpha(x+\varepsilon)$, ${}^*\alpha(x)-{}^*f(\cdot,x+\varepsilon)$, $f^*(\cdot,x)-\alpha^*(x-\varepsilon)$与 $\alpha^*(x)-f^*(\cdot,x-\varepsilon)$是$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上的实值可测函数.所以${}^*d(f(\cdot),\alpha,\varepsilon)$与 $d^*(f(\cdot),\alpha,\varepsilon)$是$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上的实值可测函数.因此, $d(f(\cdot),\alpha,\varepsilon)$为$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上的实值可测函数.

根据定理 4.5(5)得 $d(f(\cdot),\alpha)$是$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上的实值可测函数.

(9)⇒(4)　注意到定理 4.6(5)与定理 4.7(2),类似于(8)⇒(4)的证明. 证毕.

定理 5.3　设 f,g 为$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上的 F 值可测函数,$k\in R$. 则 $k\cdot f, f\vee g, f\wedge g, f+g, f-g, f\cdot g$ 均为 F 值可测函数.

证明　由定理 5.2 知,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,f_λ,g_λ 为区间值可测函数,则

$$k\cdot f_\lambda=\begin{cases}[k\cdot f_\lambda^-,k\cdot f_\lambda^+], & k>0,\\ 0 & k=0,\\ [k\cdot f_\lambda^+,k\cdot f_\lambda^-], & k<0,\end{cases}$$

$$(f\vee g)_\lambda=f_\lambda\vee g_\lambda=[f_\lambda^-\vee g_\lambda^-,f_\lambda^+\vee g_\lambda^+],$$

$$(f\wedge g)_\lambda=f_\lambda\wedge g_\lambda=[f_\lambda^-\wedge g_\lambda^-,f_\lambda^+\wedge g_\lambda^+],$$

$$(f+g)_\lambda=f_\lambda+g_\lambda=[f_\lambda^-+g_\lambda^-,f_\lambda^++g_\lambda^+],$$

$$(f-g)_\lambda=f_\lambda-g_\lambda=[f_\lambda^--g_\lambda^+,f_\lambda^+-g_\lambda^-],$$

$$(f\cdot g)_\lambda=f_\lambda\cdot g_\lambda=[(f_\lambda\cdot g_\lambda)^-,(f_\lambda\cdot g_\lambda)^+],$$

其中

$$(f_\lambda\cdot g_\lambda)^-=f_\lambda^-\cdot g_\lambda^-\wedge f_\lambda^-\cdot g_\lambda^+\wedge f_\lambda^+\cdot g_\lambda^-\wedge f_\lambda^+\cdot g_\lambda^+,$$

$$(f_\lambda\cdot g_\lambda)^+=f_\lambda^-\cdot g_\lambda^-\vee f_\lambda^-\cdot g_\lambda^+\vee f_\lambda^+\cdot g_\lambda^-\vee f_\lambda^+\cdot g_\lambda^+.$$

所以$(k\cdot f)_\lambda,(f*g)_\lambda$, $*\in\{\vee,\wedge,+,-,\cdot\}$分别为区间值可测函数,再由定理 5.2 即得所欲证. 证毕.

定义 5.3　设$\{f^{(n)},n\geqslant1\}$为$\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$上的 F 值可测函数列,f: $\Omega\to F(R)$为 F 值函数.

(1)　对于任何 $w\in\Omega$,令

$\Lambda(\omega)=\{\lambda\in(0,1]\mid\lim\limits_{n\to\infty}f_\lambda^{(n)}(\omega)=f_\lambda^{(\omega)}\}$, $\Lambda=\bigcap\limits_{\omega\in\Omega}\Lambda(\omega)$. 如果 Λ 为(0,1]的稠密子集,则称$\{f^{(n)},n\geqslant1\}$收敛于 f,记作$\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}=f$ 或 $f^{(n)}\to f$.

(2) 如果对于任何 $\omega\in\Omega, w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(\omega)=f(\omega)$(等价地 $d-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(\omega)=f(\omega)$),则称 $\{f^{(n)},n\geqslant 1\}$ 弱收敛于 f,记作 $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$ 或 $f^{(n)}\xrightarrow{w} f$.

定理 5.4 设 $\{f^{(n)},n\geqslant 1\}$ 为 F 值可测函数列,f 为 F 值函数. $\forall\ \omega\in\Omega$,令 $C(\omega)=\{\lambda\in(0,1]\mid h^-_{f(\omega)}(\cdot)$ 与 $h^+_{f(\omega)}(\cdot)$ 在 λ 处连续$\}$, $C=\bigcap\limits_{\omega\in\Omega} C(\omega)$,

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$,则 $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$ 且 f 为 F 值可测函数.

(2) 如果 $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$ 且 C 为 $(0,1]$ 的稠密子集,则

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}=f.$$

证明 (1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$,则 Λ 为 $(0,1]$ 的稠密子集. $\forall\ \omega\in\Omega$ 与 $\lambda\in C(\omega)$,存在 $\varepsilon\in(0,\lambda\wedge\lambda')$ 使得 $h^-_{f(\omega)}(\cdot)$ 与 $h^+_{f(\omega)}(\cdot)$ 在 $(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)$ 内连续,且 $\Lambda\cap(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)$ 在 $(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)$ 处处稠密. 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} h_{f^{(n)}}(\omega)(\lambda)&\geqslant\sup\{\lim_{n\to\infty} h^-_{f^{(n)}(\omega)}(\delta)\mid\delta\in\Lambda\cap(\lambda-\varepsilon,\lambda)\}\\&=\sup\{h^-_{f(\omega)}(\delta)\mid\delta\in\Lambda\cap(\lambda-\varepsilon,\lambda)\}\\&=h^-_{f(\omega)}(\lambda).\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} h^-_{f^{(n)}}(\omega)(\lambda)&\leqslant\inf\{\lim_{n\to\infty} h^-_{f^{(n)}}(\omega)(\delta)\mid\delta\in\Lambda\cap(\lambda,\lambda+\varepsilon)\}\\&=\inf\{h^-_{f(\omega)}(\delta)\mid\delta\in\Lambda\cap(\lambda,\lambda+\varepsilon)\\&=h^-_{f(\omega)}(\lambda).\end{aligned}$$

因此,$\lim\limits_{n\to\infty} h^-_{f^{(n)}(\omega)}(\lambda)=h^-_{f(\omega)}(\lambda)$. 同理,$\lim\limits_{n\to\infty} h^+_{f^{(n)}(\omega)}(\lambda)=h^+_{f(\omega)}(\lambda)$. 于是,$\lim\limits_{n\to\infty} h_{f^{(n)}(\omega)}(\lambda)=h_{f(\omega)}(\lambda)$. 从而,$w-\lim\limits_{n\to\infty} h_{f^{(n)}(\omega)}=h_{f(\omega)}$. 由定理 4.8 知,$W-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(\omega)=f(\omega)$. 再由 ω 的任意性知,$w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$.

(2) 如果 $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$,由定理 4.8 知,$\forall\ \omega\in\Omega, C(\omega)\subseteq\Lambda(\omega)$,则 $C\subseteq\Lambda$. 由于 C 在 $(0,1]$ 处处稠密,故 Λ 必在 $(0,1]$ 处处稠

密. 再由定义 5.3(1)即得$\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$. 证毕.

注　如果$\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$,不能推出 C 为$(0,1]$的稠密子集. 因此,在 $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$ 的情况下,C 为$(0,1]$的稠密子集是 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$ 的充分条件而不是必要条件.

例　设 $\Omega=(0,1]$, $\mathscr{A}=B_{(0,1]}$.

$$f^{(n)}(\omega)(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=\dfrac{n\omega}{n+1}, \\ \omega, & \text{当 } x\in(0,1]\setminus\left\{\dfrac{n\omega}{n+1}\right\}, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f(\omega)(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x=\omega, \\ \omega & \text{当 } x\in(0,1]\setminus\{\omega\}, \\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

不难验证 $C(1)=(0,1]$, $C(\omega)=(0,1]\setminus\{\omega\}$, $\forall\ \omega\in(0,1)$. 于是,$C=\{1\}$显然$(0,1]$中不稠密. 但$\forall\ \omega\in\Omega$, $\Lambda(\omega)=(0,1]$,则 $\Lambda=(0,1]$,故$\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$.

定义 5.4　设$\langle\Omega,\mathscr{A},m\rangle$是完备的测度空间(即若 $m(N_0)=0$,则$\forall\ N\subseteq N_0$ 都有 $N\in\mathscr{A}$ 且 $m(N)=0$),$\{f^{(n)},n\geqslant1\}$为 F 值可测函数列,f 为 F 值函数.

(1)　如果存在 $N\in\mathscr{A}$, $m(N)=0$,使得 $\Lambda_{N'}\triangleq\bigcap\limits_{\omega\in N'}\Lambda(\omega)$为$(0,1]$的稠密子集,则称$\{f^{(n)},n\geqslant1\}$几乎处处$(a,e)$收敛于 f,记作$\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$, $a.e.$ 或 $f^{(n)}\to f$, $a.e.$

如果　$\forall\ \omega\in N'$, $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(\omega)=f(\omega)$,则称$\{f^{(n)},n\geqslant1\}$几乎处处弱收敛于 f,记作 $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f$, $a.e.$ 或 $f^{(n)}\xrightarrow{w}f$, $a,e.$

引理 5.1　设 f,g 为 F 值可测函数,则$\{f(\omega)\neq g(\omega)\}\in\mathscr{A}$.

证明 $\{f(\omega)\neq g(\omega)\}=\bigcup_{\lambda\in(0,1]\cap Q}\{f_\lambda(\omega)\neq g_\lambda(\omega)\}$

$$=\bigcup_{\lambda\in(0,1]\cap Q}(\{f_\lambda^-(\omega)\neq g_\lambda^-(\omega)\}\cup\{f_\lambda^+(\omega)\neq g_\lambda^+(\omega)\})\in\mathscr{A}.$$

证毕.

引理 5.2 设 f. g 为 F 值可测函数，而且 $\forall w\in\Omega$，令 $d(f,g)(\omega)=d(f(\omega),g(\omega))$，则 $d(f,g)$ 为 $\langle\Omega,\mathscr{A}\rangle$ 上的 F 可测集，即 $d(f,g)\in\zeta(\mathscr{A})$.

证明 因为 $\forall\ \lambda\in(0,1]$，$f_\lambda^\pm(\cdot)$，$g_\lambda^\pm(\cdot)$ 为实值可测函数，则

$$d^-(f(\omega),g(\omega),\varepsilon)=\bigvee_{\lambda\in(\varepsilon,1]\cap Q}\{[(f_{\lambda-\varepsilon}^-(\omega)-g_\lambda^-(\omega))$$
$$\vee(g_{\lambda-\varepsilon}^-(\omega)-f_\lambda^-(\omega))]\wedge 1\}$$

$$d^+(f(\omega),g(\omega),\varepsilon)=\bigvee_{\lambda\in(\varepsilon,1]\cap Q}\{[(f_\lambda^+(\omega)-g_{\lambda-\varepsilon}^+(\omega))$$
$$\vee(g_\lambda^+(\omega)-f_{\lambda-\varepsilon}^+(\omega))]\wedge 1\}$$

为实值可测函数. 于是

$$d'(f(\omega),g(\omega),\varepsilon)=d^-(f(\omega),g(\omega),\varepsilon)\vee d^+(f(\omega),g(\omega),\varepsilon)$$

为实值可测函数，所以

$$d(f,g)(\omega)=d(f(\omega),g(\omega))=d'(f(\omega),g(\omega))$$
$$=\bigvee_{\varepsilon\in(0,1]\cap Q}[\varepsilon\wedge d'(f(\omega),g(\omega),\varepsilon)]$$

为实值可测函数. 再由 $d(f,g)(\omega)\in[0,1]$ 得 $d(f,g)\in\zeta(\mathscr{A})$. 证毕.

引理 5.3 设 $\langle\Omega,\mathscr{A},m\rangle$ 为完备测度空间，如果 f,g 为 F 值可测函数，则下列各命题相互等价.

(1) $f=g$, a. e.

(2) $d(f,g)=0$, a. e.

(3) $\forall\ \lambda\in(0,1]\cap Q$, $f_\lambda=g_\lambda$, a. e.

证明 (1)⇔(2) 由于 $f(\omega)=g(\omega)\Leftrightarrow d(f(\omega),g(\omega))=0$，则

$$f=g,a.e.\Leftrightarrow m\{f(\omega)\neq g(\omega)\}=0$$

$$\Leftrightarrow m\{d(f(\omega),g(\omega)) \neq 0\} = 0$$

$$\Leftrightarrow d(f,g) = 0, \quad a.e.$$

(1)⇔(3). 由于 $f(\omega)=g(\omega) \Leftrightarrow \forall\ \lambda \in (0,1] \cap Q, f_\lambda(\omega)=g_\lambda(\omega)$. 则

$$f=g, a.e, \Leftrightarrow m\{f(\omega) \neq g(\omega)\}=0$$

$$\Leftrightarrow \forall\ \lambda \in (0,1] \cap Q, m\{f_\lambda(\omega) \neq g_\lambda(\omega)\}=0$$

$$\Leftrightarrow \forall\ \lambda \in (0,1] \cap Q \quad f_\lambda = g_\lambda, \quad a.e.$$ 证毕.

定理 5.5 设$\{f^{(n)}, n \geq 1\}$是 F 值可测函数列, f 为 F 值可测函数. 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f, a.e \Rightarrow \quad w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f, \quad a.e.$

(2) $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f, a.e.$ 且令 $N=\{f^{(n)}(\omega) \xrightarrow{w} f(\omega)\}'$ 时, $C_{N'}=\bigcap\limits_{\omega\in N'} C(\omega)$为$(0,1]$的稠密子集$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f, \quad a.e.$

证明 (1) 如果$\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f, a.e.$ 令 $N_0=\{f^{(n)}(\omega) \to f(\omega)\}'$, 则 $m(N_0)=0$. 且 $A_{N'_0}$为$(0,1]$的稠密子集. 对于$\forall\ \omega \in N'_0$,基本上照搬定理 5.4(1)的推证即得 $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(\omega)=f(\omega)$. 故 $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f, \quad a.e.$

(2) 如果 $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f, a.e.$ 则 $C_{N'} \subseteq A_{N'}$, 由于 $C_{N'}$ 为$(0,1]$的稠密子集, 故 $A_{N'}$ 必为$(0,1]$的稠密子集, 所以$\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}=f, \quad a.e.$ 证毕.

定理 5.6 设$\{f^{(n)}, n \geq 1\}$为 F 值可测函数列, f, g 为 F 值可测函数. 如果 $f^{(n)} \to f, a.e.$ 且 $f^{(n)} \to g, a.e$(相应地, $f^{(n)} \xrightarrow{w} f, \quad a.e.$ 且 $f^{(n)} \xrightarrow{w} g, \quad a.e.$)则 $f=g, \quad a.e.$

证明 令 $N_1=\{f^{(n)}(\omega) \to f(\omega)\}'$, $N_2=\{f^{(n)}(\omega) \to g(\omega)\}'$, $N_3=\{f(\omega) \neq g(\omega)\}$. 因为 $f^{(n)} \to f, a.e.$ 则 $m(N_1)=0$,同理, $m(N_2)=0$.

取 $N=N_1\cup N_2$，则 $N\in\mathscr{A}$，$m(N)=0$，当 $\omega\overline{\in}N$ 时，$f^{(n)}(\omega)\to f(\omega)$，$f^{(n)}(\omega)\to g(\omega)$，从而，$f(\omega)=g(\omega)$. 于是，$\omega\overline{\in}N_3$. 故 $N_3\subseteq N$. 因此，$m(N_3)=0$，所以 $f=g$. a. e. 证毕.

推论　如果 $f=g$, a. e 且 $f^{(n)}\to f$,　a. e.（相应地 $f^{(n)}\xrightarrow{w}f$,　a. e.）则 $f^{(n)}\to g$,　a. e.（相应地 $f^{(n)}\xrightarrow{w}g$,　a. e.）

§6　F 值函数的 Lebesgue 积分

定义 6.1　设 $\langle\Omega,\mathscr{A},m\rangle$ 为测度空间，$m(\Omega)<+\infty$. (1)　如果 $f_0=[f_0^-,f_0^+]$ 是 $\langle\Omega,\mathscr{A},m\rangle$ 上的区间值可测函数，且积分 $\int_\Omega f_0^-(\omega)dm$ 与 $\int_\Omega f_0^+(\omega)dm$ 均存在（显然 $\int_\Omega f_0^-(\omega)dm\leqslant\int_\Omega f_0^+(\omega)dm$），则称区间数 $[\int_\Omega f_0^-(\omega)dm,\int_\Omega f_0^+(\omega)dm]$ 为 f_0 在 Ω 上关于测度 m 的积分或称 f_0 的（**区间值**）*Lebesgue* **积分**，记作

$$\int_\Omega f_0(\omega)dm=\left[\int_\Omega f_0^-(\omega)dm,\int_\Omega f^+(\omega)dm\right].$$

类似地，对于任何 $A\in\mathscr{A}$，界定

$$\int_A f_0(\omega)dm=\left[\int_A f_0^-(\omega)dm,\int_A f_0^+(\omega)dm\right],$$

并称为 f_0 在 A 上的 Lebesgue 积分. 称区间值函数

$$v_{f_0}:\mathscr{A}\to I(R)\quad A\mapsto v_{f_0}(A)=\int_A f_0(\omega)dm$$

为 f_0 的**区间值不定积分**.

(2)　设 f 为 $\langle\Omega,\mathscr{A},m\rangle$ 上的 F 值可测函数. 如果 $A\in\mathscr{A}$ 且 $\forall\lambda\in(0,1]$，$\int_A f_\lambda(\omega)dm$ 存在，则称 f 在 A 上关于测度 m 可积（或称 f 在 A 上 *Lebesgue* 可积），其 Lebesgue 积分记作 $\int_A f(\omega)dm$，而且

界定

$$\left(\int_A f(\omega)dm\right)(x) = \bigvee_{\lambda\in(0,1]}[\lambda \wedge \chi_{\int_A f_\lambda(\omega)dm}(x)], \quad \forall\, x \in R.$$

如果 f 在任何 $A\in\mathscr{A}$ 上均 Lebesgue 可积，则称 f 为 F **值** Lebesgue **可积函数**. 以下“Lebesgue 可积”简称为可积，Lebesgue 积分简记作 $\int_A fdm$.

定理 6.1 设 f 为 F 值可积函数. 则对于任何 $A\in\mathscr{A}$，$\int_A fdm \in F(R)$，且而 $\forall\,\lambda\in(0,1]$ 有

$$\left(\int_A fdm\right)_\lambda = \int_A f_\lambda dm.$$

证明 正规性显然. 为证闭凸性，只需证

$$\left(\int_A fdm\right)_\lambda = \int_A f_\lambda dm, \qquad \forall\,\lambda\in(0,1].$$

(由于 $\int_A f_\lambda dm = [\int_A f_\lambda^- dm, \int_A f_\lambda^+ dm]\in I(R)$).

事实上，如果取 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots<\lambda$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$. 不难验证，$\forall\,\lambda\in(0,1]$ 有

$$\begin{aligned}\left(\int_A fdm\right)_\lambda &= \bigcap_{\delta<\lambda}\int_A f_\delta dm \\ &= [\lim_{n\to\infty}\int_A f_{\lambda_n}^- dm, \quad \lim_{n\to\infty}\int_A f_{\lambda_n}^+ dm] \\ &= [\int_A f_\lambda^- dm, \quad \int_A f_\lambda^+ dm] \\ &= \int_A f_\lambda dm \quad \in I(R).\end{aligned}$$

所以 $\int_A fdm\in F(R)$. 证毕.

称 F 值集合函数

$$v_f: \mathscr{A}\to F(R), \qquad A\mapsto v_f(A) = \int_A fdm$$

为 f 的 F **值不定积分**.

定理 6.2　设 f,g 是 F 值可积函数，$A,B\in\mathscr{A}$. $k\in R$.

(1)　如果 $f\leqslant g$，则 $\int_A fdm\leqslant\int_A gdm$.

(2)　$f\vee g, f\wedge g$ 可积而且

$$\int_A (f\wedge g)dm\leqslant\int_A fdm\wedge\int_A gdm$$

$$\leqslant\int_A fdm\vee\int_A gdm\leqslant\int_A (f\vee g)dm.$$

(3)　$k\cdot f, f+g$ 可积而且

$$\int_A (k\cdot f)dm=k\cdot\int_A fdm;$$

$$\int_A (f+g)dm=\int_A fdm+\int_A gdm.$$

(4)　$\int_A fdm=\int_\Omega \chi_A\cdot fdm$.

其中

$$(\chi_A\cdot f)(\omega)=\chi_A(\omega)\cdot f(\omega)=\begin{cases} f(\omega), & w\in A,\\ \dot{0} & w\overline{\in} A.\end{cases}$$

(5)　如果 $f(\omega)\geqslant\dot{0}$，$\forall\ \omega\in\Omega$. 则

$$\int_{A\cap B} fdm\leqslant\int_A fdm\wedge\int_B fdm\leqslant\int_A fdm\vee\int_B fdm\leqslant\int_{A\cup B} fdm.$$

(6)　如果 $A\cap B=\Phi$，则

$$\int_{A\cup B} fdm=\int_A fdm+\int_B fdm.$$

(7)　如果 $m(A)=0$，则 $\int_A fdm=\dot{0}$.

(8)　如果 $f(\omega)=\alpha$，$\forall\ \omega\in\Omega$（其中 $\alpha\in F(R)$），则

$$\int_A fdm=m(A)\cdot\alpha.$$

证明　(1)　显然

(2)　由(1)立即得证.

(3) $\forall\ \lambda\in(0,1]$,

$$(k\cdot f(\omega))_\lambda = k\cdot f_\lambda(\omega) = \begin{cases}[k\cdot f_\lambda^-(\omega),k\cdot f_\lambda^+(\omega)], & k>0,\\ 0, & k=0,\\ [k\cdot f_\lambda^+(\omega),k\cdot f_\lambda^-(\omega)], & k<0.\end{cases}$$

因为 $k\cdot f_\lambda^-$, $k\cdot f_\lambda^+$ 均可积,则 $(k\cdot f)_\lambda$ 可积,所以 $k\cdot f$ 可积. 于是

$$(\int_A (k\cdot f)dm)_\lambda = \begin{cases}[k\cdot\int_A f_\lambda^- dm,k\cdot\int_A f_\lambda^+ dm], & k>0,\\ 0, & k=0,\\ [k\cdot\int_A f_\lambda^+ dm,k\cdot\int_A f_\lambda^- dm], & k<0,\end{cases}$$

$$= k\cdot[\int_A f_\lambda^- dm,\int_A f_\lambda^+ dm]$$

$$= (k\cdot\int_A fdm)_\lambda.$$

所以 $\int_A (k\cdot f)dm = k\cdot\int_A fdm$. 又

$$(f+g)_\lambda(\omega) = f_\lambda(\omega)+g_\lambda(\omega)$$

$$= [f_\lambda^-(\omega)+g_\lambda^-(\omega),f_\lambda^+(\omega)+g_\lambda^+(\omega)].$$

由 f_λ^-, g_λ^-, f_λ^+, g_λ^+ 可积知, $f_\lambda^-+g_\lambda^-$, $f_\lambda^++g_\lambda^+$ 可积,则 $\forall\ \lambda\in(0,1]$, $(f+g)_\lambda$ 可积. 于是, $f+g$ 可积,而且

$$[\int_A (f+g)dm]_\lambda = \int_A (f+g)_\lambda dm$$

$$= [\int_A (f_\lambda^-+g_\lambda^-)dm,\int_A (f_\lambda^++g_\lambda^+)dm]$$

$$= [\int_A f_\lambda^- dm,\int_A f_\lambda^+ dm]+[\int_A g_\lambda^- dm,\int_A g_\lambda^+ dm]$$

$$= (\int_A fdm)_\lambda+(\int_A gdm)_\lambda$$

$$= (\int_A fdm+\int_A gdm)_\lambda.$$

所以 $$\int_A (f+g)dm = \int_A fdm+\int_A gdm.$$

(4)

$$\begin{aligned}(\int_A fdm)_\lambda &= [\int_A f_\lambda^- dm, \int_A f_\lambda^+ dm] \\ &= [\int_\Omega (\chi_A \cdot f_\lambda^-) dm, \int_\Omega (\chi_A \cdot f_\lambda^+) dm] \\ &= [\int_\Omega (\chi_A \cdot f)_\lambda^- dm, \int_\Omega (\chi_A \cdot f)_\lambda^+ dm] \\ &= \int_\Omega (\chi_A \cdot f)_\lambda dm \\ &= (\int_\Omega \chi_A \cdot fdm)_\lambda\end{aligned}$$

所以 $\int_A fdm = \int_\Omega \chi_A \cdot fdm.$

(5) 由(2)与(4)立即得证.

(6) 由(3)与(4)立即得证.

(7) $\forall\ \lambda \in (0,1]$,

$$(\int_A fdm)_\lambda = [\int_A f_\lambda^- dm, \int_A f_\lambda^+ dm] = [0,0] = 0,$$

得 $\int_A fdm = \dot{0}.$

(8) $\forall\ \lambda \in (0,1]$,

$$\begin{aligned}(\int_A fdm)_\lambda &= \int_A f_\lambda dm = [\int_A \alpha_\lambda^- dm, \int_A \alpha_\lambda^+ dm] \\ &= m(A) \cdot [\alpha_\lambda^-, \alpha_\lambda^+] = (m(A) \cdot \alpha)_\lambda.\end{aligned}$$

得 $\int_A fdm = m(A) \cdot \alpha$. 证毕.

定理 6.3 设 $\{f^{(n)}, h \geq 1\}$ 为 F 值(可测)可积函数的单调不减序列,f 为 F 值可测函数. 如果 $w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)} = f$, $a.e.$ 则 f 也是 F 值可积函数,而且对于任何 $A \in \mathscr{A}$,有

$$d - \lim_{n\to\infty} \int_A f^{(n)} dm = \int_A fdm.$$

证明 令 $N = \{f^{(n)}(\omega) \xrightarrow{w} f(\omega)\}'$,则 $m(N) = 0$,由于 $\forall\ \omega \in \Omega - N$ 与 $\delta \in (0,1]$ 都有

$$[f_\delta^{(n)-}(\omega), f_\delta^{(n)+}(\omega)] \leqslant [f_\delta^{(n+1)-}(\omega), f_\delta^{(n+1)+}(\omega)],$$

其中 $n \geqslant 1$，而且 $d-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(\omega) = w-\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(\omega) = f(\omega)$，知

$$\lim_{n\to\infty} f_\delta^{(n)}(\omega) = [\lim_{n\to\infty} f_\delta^{(n)-}(\omega), \lim_{n\to\infty} f_\delta^{(n)+}(\omega)]$$

存在. 再由经典 Lebesgue 积分的单调收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_\delta^{(n)} dm = [\lim_{n\to\infty}\int_A f_\delta^{(n)-} dm, \lim_{n\to\infty}\int_A f_\delta^{(n)+} dm]$$

$$= [\int_A \lim_{n\to\infty} f_\delta^{(n)-} dm, \int_A \lim_{n\to\infty} f_\delta^{(n)+} dm].$$

对于任何 $\lambda \in (0,1]$，取单增数列 $0<\delta_1<\delta_2<\cdots<\delta_k<\cdots<\lambda$ 而且 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_k = \lambda$，则

$$\bigcap_{\delta<\lambda}\lim_{n\to\infty}(\int_A f_\delta^{(n)} dm) = \lim_{\delta_k\to\lambda}(\lim_{n\to\infty}\int_A f_{\delta_k}^{(n)} dm)$$

$$= [\int_A \lim_{\delta_k\to\lambda}\lim_{n\to\infty}\int_A f_{\delta_k}^{(n)-} dm, \int_A \lim_{\delta_k\to\lambda}\lim_{n\to\infty} f_{\delta_k}^{(n)+} dm]$$

$$= \int_A \lim_{\delta_k\to\lambda}\lim_{n\to\infty} f_{\delta_k}^{(n)} dm$$

$$= \int_A \bigcap_{\delta<\lambda}\lim_{n\to\infty} f_\delta^{(n)} dm.$$

于是，由定理 4.8 的推论，得

$$(d-\lim_{n\to\infty}\int_A f^{(n)} dm)_\lambda = \bigcap_{\delta<\lambda}\lim_{n\to\infty}(\int_A f^{(n)} dm)_\delta$$

$$= \bigcap_{\delta<\lambda}\lim_{n\to\infty}(\int_A f_\delta^{(n)} \mathrm{dm})$$

$$= \int_A \bigcap_{\delta<\lambda}\lim_{n\to\infty} f_\delta^{(n)} dm$$

$$= \int_A (d-\lim_{n\to\infty} f^{(n)})_\lambda dm$$

$$= \int_A f_\lambda dm$$

$$= (\int_A f dm)_\lambda.$$

所以 f 为 F 值可积函数而且

$$d-\lim_{n\to\infty}\int_A f^{(n)}dm=\int_A fdm.$$ 证毕.

定理 6.4 设 $\{f^{(n)},n\geqslant 1\}$ 为 F 值可积函数列 g,h 为 F 值可积函数. 如果 $\forall\ n\geqslant 1, g\leqslant f^{(n)}\leqslant h, a.e.$ 而且 $\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}=f, a.e.$ 则 f 是 F 值可积函数,而且

$$d-\lim_{n\to\infty}\int_A f^{(n)}dm=\int_A fdm.$$

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}=f, a.e.$ 知存在 $N_0\in\mathscr{A}, m(N_0)=0$,使得 $\Lambda_{(N_0')}$ 在 $(0,1]$ 内稠密. 又令 $N_n=\{g(\omega)\leqslant f^{(n)}(\omega)\leqslant h(\omega)\}'$, $N=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}N_n$. 则 $\Lambda_{N'}=\bigcap\limits_{\omega\in N'}\Lambda(\omega)\supseteq\Lambda_{N'_0}$,故 $\Lambda_{N'}$ 在 $(0,1]$ 中稠密. 于是, $\forall\ \omega\in N'$ 与 $\delta\in\Lambda_{N'}$ 有

$$g_\delta^-(\omega)\leqslant f_\delta^{(n)-}(\omega)\leqslant h_\delta^-(\omega),\qquad g_\delta^+(\omega)\leqslant f_\delta^{(n)+}(\omega)\leqslant h_\delta^+(\omega).$$

而且 $g_\delta^\pm, h_\delta^\pm$ 可积,因此 $|g_\delta^-|\vee|h_\delta^-|, |g_\delta^+|\vee|h_\delta^+|$ 可积,

$$|f_\delta^{(n)-}(\omega)|\leqslant|g_\delta^-(\omega)|\vee|h_\delta^-(\omega)|,$$

$$|f_\delta^{(n)+}(\omega)|\leqslant|g_\delta^+(\omega)|\vee|h_\delta^+(\omega)|.$$

$$\lim_{n\to\infty}f_\delta^{(n)-}(\omega)=f_\delta^-(\omega),\qquad \lim_{n\to\infty}f_\delta^{(n)+}(\omega)=f_\delta^+(\omega).$$

根据经典 *Lebesgue* 积分的控制收敛定理知 f_δ^-, f_δ^+ 可积,而且

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_\delta^{(n)-}dm=\int_A f_\delta^-dm,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_\delta^{(n)+}dm=\int_A f_\delta^+dm.$$

对于 $\forall\ \delta\in(0,1]$ 在 $\Lambda_{N'}$ 中取一列单增数列 $\delta_k\to\delta$, 则 $f_{\delta_k}^-(\omega)\downarrow f_\delta^-(\omega), f_{\delta_k}^+(\omega)\downarrow f_\delta^+(\omega)$. 于是, $f_\delta^\pm$ 可积,从而 f 为 F 值可积函数,这样

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\int_A f_{\delta_k}^{(n)}dm=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\int_A f_{\delta_k}^{(n)^-}dm,\lim_{n\to\infty}\int_A f_{\delta_k}^{(n)^+}dm\right]$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}[\int_A f_{\delta_k}^{-}dm,\int_A f_{\delta_k}^{+}dm]$$
$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}(\int_A fdm)_{\delta_k}$$
$$=(\int_A fdm)_{\delta}.$$

则$\forall\ \lambda\in(0,1]$有

$$\bigcap_{\delta<\lambda}\lim_{n\to\infty}(\int_A f^{(n)}dm)_{\delta}=\bigcap_{\delta<\lambda}\bigcap_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}(\int_A f^{(n)}dm)_{\delta_k}$$
$$=\bigcap_{\delta<\lambda}\bigcap_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\int_A f_{\delta_k}^{(n)}dm=\bigcap_{\delta<\lambda}(\int_A fdm)_{\delta}$$
$$=(\int_A fdm)_{\lambda}.$$

即得证 $d-\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f^{(n)}dm=\int_A fdm$. 证毕.

§7 F 值随机变量

定义 7.1 设$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$是概率空间,$\xi:\Omega\to F(R)$为 F 值可测函数,则称 ξ 为 F **值随机变量**. 进一步如果 F 值积分$\int_{\Omega}\xi dP$ 存在(即$\int_{\Omega}\xi dP\in F(R)$),则称 $E(\xi)\triangleq\int_{\Omega}\xi dP$ 为 ξ **的数学期望**.

由定义 7.1 与 F 值积分的定义,可得

定理 7.1 如果 ξ 是 F 值随机变量,则$\forall\ \lambda\in(0,1]$,ξ_λ 为区间值随机变量(即 ξ_λ^-,ξ_λ^+ 为实值随机变量)而且$(E(\xi))_\lambda=E(\xi_\lambda)$.

定理 7.2 如果 ξ,η 是 F 值随机变量,$\alpha\in F(R)$,令 $d(\xi,\eta)(\omega)=d(\xi(\omega),\eta(\omega))$,则 $d(\xi,\eta)$,$d(\xi,\alpha)$为 F 事件,即$d(\xi,\eta)\in\zeta(\mathscr{A})$,$d(\xi,\alpha)\in\zeta(\mathscr{A})$.

证明 由引理 5.2 立即得证.

定理 7.3 设 $\xi^{(i)},i=1,2,\cdots,n$ 为 F 值随机变量,则

(1) $\sum_{i=1}^{n}\xi^{(i)}$也是 F 值随机变量;

(2) $\forall\ i\in\{1,2,\cdots,n\}$, $E(\xi^{(i)})$存在,那么 $E(\sum_{i=1}^{n}\xi^{(i)})$存在,而且

$$E(\sum_{i=1}^{n}\xi^{(i)}) = \sum_{i=1}^{n}E(\xi^{(i)}).$$

证明 (1) 由定理 5.3 知, $\xi^{(1)}+\xi^{(2)}$为 F 值可测函数,因而是 F 值随机变量,再由归纳法知,对于任何正整数 $n\geqslant2$, $\sum_{i=1}^{n}\xi^{(i)}$为 F 值随机变量.

(2) 由定理 6.2(3)并用归纳法即得所欲证. 证毕.

类似地,有

定理 7.4 设 ξ 为 F 值随机变量,则对于任何 $k\in R$, $k\cdot\xi$ 为 F 值随机变量. 进一步,如果 $E(\xi)$存在,则 $E(k\cdot\xi)$存在,而且

$$E(k\cdot\xi) = k\cdot E(\xi).$$

由定理 5.4 立即可得下面的定理.

定理 7.5 设$\{\xi^{(n)}, n\geqslant1\}$是 F 值随机变量, η 为 F 值函数. $\forall\ \omega\in\Omega$, 令 $C(\omega)=\{\lambda\in(0,1]\mid h^{-}_{\xi(\omega)}(\cdot)$与 $h^{+}_{\xi(\omega)}(\cdot)$在 λ 处连续$\}$, $C=\bigcap_{\omega\in\Omega}C(\omega)$.

(1) 如果 $w-\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi$,则 ξ 为 F 值随机变量.

(2) 如果$\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi$,则 $w-\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi$,因而 ξ 也是 F 值随机变量.

(3) 如果 $w-\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi$ 且 C 为(0,1]中的稠密子集,则 $\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi$.

定理 7.6 设$\{\xi^{(n)}, n\geqslant1\}$为 F 值随机变量序列, ξ 是 F 值函数. (1) 如果 $w-\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi$, $a.e.$ 则 ξ 为 F 值随机变量而且 $P\{w-$

$\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi\}=1$

(2) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi, a.e.$ 则 $w-\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi, a.e. \xi$ 为 F 值随机变量，且 $P\{\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi\}=1$.

(3) 如果 $w-\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi, a.e.$ 且令 $N=\{w-\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}(\omega)=\xi(\omega)\}'$ 时，$C_{N'}=\bigcap\limits_{\omega\in N'}C(\omega)$，(其中 $C(\omega)=\{\lambda\in(0,1]\,|\,h_\xi(\cdot)$在 λ 处连续$\}$)为$(0,1]$的稠密子集，则$\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi, a, e.$

证明 (1) 由定义 5.4 知$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$为完备概率空间是前提条件. 若令 $N=\{w-\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}(\omega)=\xi(\omega)\}'$，则 $N\in\mathscr{A}$ 且 $P(N)=0$. $\forall\ n\geqslant 1$ 令

$$\xi_*^{(n)}(\omega)=\begin{cases}\xi^{(1)}(\omega), & w\in N,\\ \xi^{(n)}(\omega), & w\in N'.\end{cases}$$

$$\xi_*(\omega)=\begin{cases}\xi^{(1)}(\omega), & w\in N,\\ \xi(\omega), & w\in N'.\end{cases}$$

则 $w-\lim\limits_{n\to\infty}\xi_*^{(n)}=\xi_*$，且 ξ_* 为 F 值随机变量. 于是$\forall\ A\in\mathscr{B}_d$，有

$$\begin{aligned}\xi^{-1}(A)&=(\xi^{-1}(A)\cap N)\cup(\xi^{-1}(A)\cap N')\\&=(\xi^{-1}(A)\cap N)\cup(\xi_*^{-1}(A)\cap N').\end{aligned}$$

由于 $\xi^{-1}(A)\cap N\subseteq N$，则 $\xi^{-1}(A)\cap N\in\mathscr{F}$. 又 $\xi_*^{-1}(A)\cap N'\in\mathscr{F}$. 所以 $\xi^{-1}(A)\in\mathscr{F}$ 即得证 ξ 为 F 值随机变量且 $P\{w-\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi\}=P(N')=1$.

(2) 由定理 5.5(1)得前半部分. 又因

$$\{\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi\}=\{\lim_{n\to\infty}\xi_\lambda^{(n)}(\omega)=\xi_\lambda(\omega),\lambda\in\Lambda_{N'}\}=N'$$

与 $P(N)=0$. 则 $P\{\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi\}=1$.

(3) 由定理 5.5(2)即得证. 证毕.

定理 7.7 设$\{\xi^{(n)},n\geqslant 1\}$为 F 值随机变量的单调不减序列，

$\forall n\geq 1, E(\xi^{(n)})$存在；$\xi$ 为 F 值随机变量，$w-\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi, a.e.$ 则 $E(\xi)$存在而且 $d-\lim\limits_{n\to\infty}E(\xi^{(n)})=E(\xi)$.

证明 利用定理 6.3 即得欲证.

定理 7.8 设$\{\xi^{(n)}, n\geq 1\}$为 F 值随机变量列，ξ,η,ζ，为 F 值随机变量，适合下列条件：

(1) $\forall n\geq 1, E(\xi^{(n)})$存在；

(2) $E(\eta), E(\zeta)$存在且$\forall n\geq 1, \eta\leqslant\xi^{(n)}\leqslant\zeta, a.e.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi, a.e.$

则 $E(\xi)$存在而且 $d-\lim\limits_{n\to\infty}E(\xi^{(n)})=E(\xi)$.

证明 由定理 6.4 即得欲证.

定义 7.2 设$\{\xi^{(n)}, n\geq 1\}$为 F 值随机变量序列.

(1) 若$\forall \lambda\in(0,1]$，$\{\xi_\lambda^{(n)-}, n\geq 1\}$与$\{\xi_\lambda^{(n)+}, n\geq 1\}$均分别为相互独立的随机变量列，则称$\{\xi^{(n)}, n\geq 1\}$为相互独立的 F 值随机变量列.

(2) 若$\forall \lambda\in(0,1]$，$\{\xi_\lambda^{(n)-}, n\geq 1\}$同分布且$\{\xi_\lambda^{(n)+}, n\geq 1\}$同分布，则称$\{\xi^{(n)}, n\geq 1\}$为同分布的 F 值随机变量列.

定理 7.9 设$\{\xi^{(n)}, n\geq 1\}$为相互独立，且同分布的 F 值随机变量列，如果 $E(\xi^{(1)})$存在，则 $P\{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi^{(i)}=E(\xi^{(1)})\}=1$.

证明 因为$\{\xi^{(n)}, n\geq 1\}$相互独立且同分布，则$\forall \lambda\in(0,1]$ $\{\xi_\lambda^{(n)-}, n\geq 1\}$相互独立且同分布；$\{\xi_\lambda^{(n)+}, n\geq 1\}$相互独立且同分布.又由 $E(\xi^{(1)})$存在知$\forall \lambda\in(0,1]$，$E(\xi_\lambda^{(1)-})$与 $E(\xi_\lambda^{(1)+})$存在.由概率论中著名的柯尔莫哥洛夫强大数定律知，$\forall \lambda\in(0,1]$，有

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_\lambda^{(i)})^{\pm}\to E(\xi_\lambda^{(1)\pm}), a.e.$$

从而，$\Lambda_{N'}=(0,1]$，其中 $N'=\{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_\lambda^{(i)})^{\pm}=E(\xi^{(1)\pm}), \lambda\in$

$\Lambda_{N'}\}$, $P(N)=0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi^{(i)}=E(\xi^{(1)})$, $a.\ e.$ 即 $P\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi^{(i)}\to E(\xi^{(1)})\}=P(N')=1$. 证毕.

推论 1 设 $\{\xi^{(n)}, n\geqslant 1\}$ 为相互独立,且同分布的 F 值随机变量列. 如果 $E(\xi^{(1)})$ 存在,则 $P\{w-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi^{(i)}=E(\xi^{(1)})\}=1$.

证明 由定理 7.6 与定理 7.9 知, $w-\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{(n)}=\xi$, $a.\ e.$ 即得欲证. 证毕.

推论 2 设 $\{\xi^{(n)}, n\geqslant 1\}$ 为相互独立,且同分布的 F 值随机变量列. 如果 $E(\xi^{(1)})$ 存在,则 $\forall\ \varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{d(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi^{(i)},E(\xi^{(1)}))\geqslant\varepsilon\right\}=0.$$

即 $d\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi^{(i)},E(\xi^{(1)}\right)$ 依概率收敛于零.

证明 由推论 1 知 $d\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi^{(i)},E(\xi^{(1)}\right)\to 0$, $a.\ e.$ 从而 $d\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi^{(i)},E(\xi^{(1)})\right)$ 依概率收敛于零. 证毕.

附录　模糊拓扑空间及其邻近构造

模糊拓扑学是模糊数学的重要组成部分，也是模糊数学理论中发展最迅速，成果较丰富的分支之一. 模糊拓扑从起初主要的推广型研究逐渐走上创新的道路，尤其是引入了具有深刻层次结构特点的重域系（远域系），给出模糊拓扑空间的邻近构造，以及与完全分配格等代数结构联系起来，使得模糊拓扑的研究更具特色，且与现代数学的一些重要分支紧密关联.

在这个附录里，介绍以格 $L=[0,1]$ 为值域的模糊拓扑的一些最基本的概念，着重介绍模糊拓扑空间及其邻近构造与模糊网的收敛理论. 自然，其中相当一部分结果可以推广到以一般 F 格 L 为值域的 LF 拓扑空间中去.

应当指出，这个附录远远没有包含模糊拓扑的主要内容，只是试图给读者粗略介绍模糊拓扑的最基本的一些概念和思想方法，使之对模糊拓扑了解一斑. 关于模糊拓扑的研究方法和近 20 年来的主要成果，在王国俊教授的专著《L - *fuzzy* 拓扑空间论》中有全面详细的阐述（见[141]），有进一步研究兴趣的读者，可以系统地阅读该书.

§1 F拓扑空间

F 拓扑空间是通常拓扑空间的推广.本节给出 F 拓扑空间的定义,介绍在非空通常集合上给出 F 拓扑的几种常见的方法(如 F 开集族,F 闭集族,F 闭包算子,F 内部算子等),引入 F 拓扑的基与子基的概念,作为重要的例子,还将介绍具有典型意义和丰富拓扑性质的 F 单位区间,F 实直线,以及由通常拓扑空间拓扑生成的 F 拓扑空间.

定义 1.1　设 X 为非空集合,$\delta\subseteq\mathscr{F}(X)=[0,1]^X$. δ 称为 X 上的 F **拓扑**,如果适合:

$FO1$. $X,\varnothing\in\delta$;

$FO2$. 若 $A,B\in\delta$,$A\wedge B\in\delta$;

$FO3$. 若$\forall\ t\in T$,$A_t\in\delta$,则 $\bigvee_{t\in T}A_t\in\delta$.

此时,称(X,δ)为 F **拓扑空间**.

显然,X 上的通常拓扑是 X 上的 F 拓扑;反之一般不成立,例如 $\delta=\mathscr{F}(X)$(见后面例 1.1).

δ 中的 F 集称为(X,δ)的 F **开集**.

$B\in\mathscr{F}(X)$称为(X,δ)的 F **闭集**,如果 $B'\in\delta$. F 闭集的全体

$$\delta'=\{B\in\mathscr{F}(X)\,|\,B'\in\delta\},$$

常称为 X 上的 F **余拓扑**.

下面的定理是直接的.

定理 1.1　设(X,δ)是 F 拓扑空间,$\eta\subseteq\mathscr{F}(X)$是它的 F 余拓扑(即 $\eta=\delta'$),则有

$FC1$.　$X,\varnothing\in\eta$;

$FC2.\quad \forall t\in T, B_t\in\eta \;\Rightarrow\; \bigwedge_{t\in T}B_t\in\eta;$

$FC3.\quad A,B\in\eta \;\Rightarrow\; A\vee B\in\eta.$

反之，设 X 为非空通常集合，$\eta\subseteq\mathscr{F}(X)$ 适合 $FC1-3$，命 $\delta=\{A\in\mathscr{F}(X)\mid A'\in\eta\}$，则 δ 是 X 上的 F 拓扑，且 η 是 (X,δ) 的 F 余拓扑.

例 1.1　设 X 是非空集合，命

$$\delta_0=\{X,\varnothing\},\quad \delta_1=F(X),$$

易见，δ_0,δ_1 都是 X 上的 F 拓扑，且就 $\mathscr{F}(X)$ 中偏序"$\subseteq$"而言，δ_0,δ_1 分别是最小元，最大元，因而，分别称为 X 上的最粗，最细的 F 拓扑. (X,δ_0)，(X,δ_1) 常分别称为**平凡** F 拓扑空间，**离散** F 拓扑空间.

注　关于 F 拓扑的定义，还有一种比较流行而有用的定义，即将定义 1.1 中的 $F01$ 改为更强的条件：

$F01^*$. $\forall\lambda\in[0,1]$，常值函数 $c_\lambda\in\delta$，其中 $c_\lambda:X\to[0,1]$，$\forall x\in X$，$c_\lambda(x)=\lambda$.

为明确起见，以后我们把 δ 适合 $F01^*$，$F02-3$ 的 F 拓扑空间 (X,δ) 称为**满层 F 拓扑空间**.

定义 1.2　设 (X,δ) 是 F 拓扑空间，$A\in\mathscr{F}(X)$，则

$$A^-=\bigwedge\{B\in\delta'\mid A\leqslant B\}\in\mathscr{F}(X)$$

称为 A 的 **F 闭包**. 显然，$A^-\in\delta'$.

由 $A\mapsto A^-$ 决定的映射 $c:[0,1]^X\to[0,1]^X$（即 $c(A)=A^-$）称为 X 上的 **F 闭包算子**.

定理 1.2　设 (X,δ) 是 F 拓扑空间，$A,B\in[0,1]^X$ 则有

$FK1.\quad c(\varnothing)=\varnothing;$

$FK2.\quad A\leqslant c(A);$

$FK3.\quad c(A\vee B)=c(A)\vee C(B);$

$FK4.\quad c(c(A))=c(A).$

反之,设 X 是非空集合,$c:[0,1]^X\to[0,1]^X$ 适合 $FK1-4$,命 $\delta=\{A\in\mathscr{F}(X)\mid c(A')=A'\}$,则 δ 是 X 上的 F 拓扑,且 $\forall A\in\mathscr{F}(X)$,在 (X,δ) 中 A 的 F 闭包 $A^-=c(A)$.

证明:设 (X,δ) 是 F 拓扑空间,$A,B\in\mathscr{F}(X)$.

$FK1$　因 $\varnothing=X'\in\delta'$ 知 $c(\varnothing)=\varnothing^-\leqslant\varnothing$,故 $c(\varnothing)=\varnothing$.

$FK2$　是明显的.

$FK3$　一方面由 $FK2$,$A\leqslant c(A)$,$B\leqslant c(B)$,知

$$A\vee B\leqslant c(A)\vee c(B).$$

根据定理 1.1,$c(A)\vee c(B)\in\delta'$,依定义 1.2,

$$c(A\vee B)\leqslant c(A)\vee c(B);$$

另一方面因 $A\leqslant A\vee B\leqslant c(A\vee B)\in\delta'$,由定义 1.2,有 $c(A)\leqslant c(A\vee B)$,同理 $c(B)\leqslant c(A\vee B)$,因而

$$C(A)\vee c(B)\leqslant c(A\vee B)$$

$$故\ c(A\vee B)=c(A)\vee c(B).$$

$FK4$　由 $FK2$,$c(A)\leqslant c(c(A))$ 及因 $c(A)\in\delta'$,由定义 1.2,$c(c(A))\leqslant c(A)$. 故 $c(c(A))=c(A)$.

现在设 X 为非空集合,$c:[0,1]^X\to[0,1]^X$ 适合 $FK1-4$,命

$$\eta=\{B\in\mathscr{F}(X)\mid c(B)=B\}\subseteq\mathscr{F}(X),$$

易验证 η 适合 $FC1-3$(细节从略),从而 $\delta=\eta'$ 是 X 上的 F 拓扑.

下面验证 $\forall A\in\mathscr{F}(X)$,在 (X,δ) 中 $A^-=c(A)$.

事实上,若 $B\in\eta$ 且 $A\leqslant B$,知 $c(A)\leqslant c(B)=B$. 于是,$c(A)\leqslant\wedge\{B\in\delta'\mid A\leqslant B\}=A^-$;反过来,因 $A\leqslant c(A)$ 及 $c(c(A))=c(A)$,知 $c(A)\in\eta$,有 $A^-\leqslant c(A)$. 故 $A^-=c(A)$. 证毕.

与 F 闭包算子类似,我们可以定义 F 拓扑空间的 F 内部算子.

定义 1.3　设 (X,δ) 是 F 拓扑空间,$A\in\mathscr{F}(X)$,则

$$A^\circ = \bigvee \{B \in \delta \mid B \leqslant A\} \in \mathscr{F}(x)$$

称为 A 的 F **内部**. 显然,$A^\circ \in \delta$.

由 $A \mapsto A^\circ$决定的映身 $i:[0,1]^X \to [0,1]^X$(即 $i(A)=A^\circ$)称为 X 上的 F **内部算子**.

关于 F 内部算子的下述定理,可类似于定理 1.2 证明.

定理 1.3 设(X,δ)是 F 拓扑空间,$A,B \in [0,1]^X$,则有

$FI1$. $i(X)=X$;

$FI2$. $i(A) \leqslant A$;

$FI3$. $i(A \wedge B)=i(A) \wedge i(B)$;

$FI4$. $i(i(A))=i(A)$.

反之,设 X 为非空集合,$i:[0,1]^X \to [0,1]^X$ 适合 $FI1-4$,命 $\delta=\{A \in \mathscr{F}(X) \mid i(A)=A\}$,则 δ 是 X 上的 F 拓扑,且$\forall A \in \mathscr{F}(X)$,在$(X,\delta)$中 A 的 F 内部 $A^\circ=i(A)$.

关于 F 闭包算子与 F 内部算子,我们有下述重要的关系.

命题 1.4 设(X,δ)是 F 拓扑空间,$A \in \mathscr{F}(X)$,则

$$A'^{-\prime} = A^\circ.$$

证明 由 $FK2$,$A' \leqslant A'^-$,从而 $A'^{-\prime} \leqslant (A')'=A$. 因 $A'^{-\prime} \in \delta$,依定义 1.3,$A'^{-\prime} \leqslant A^\circ$;反之,由 $FI2$,$A^\circ \leqslant A$,从而 $A' \leqslant (A^\circ)' \in \delta'$,依定义 1.2,$A'^- \leqslant (A^\circ)'$,因此 $A^\circ \leqslant A'^{-\prime}$故 $A'^{-\prime}=A^\circ$. 证毕.

注 进一步可以推证,在 F 拓扑空间(X,δ)中,对 $A \in \mathscr{F}(X)$,以任意顺序作有限次的取 F 闭包,F 内部及补运算,最多只能得到 14 个互不相同的 F 集,即 *Kuratowski* 十四集定理对 F 拓扑空间仍成立.

现在我们对 F 拓扑空间引入其 F 拓扑的基,子基的概念.

定义 1.4 设(X,δ)是 F 拓扑空间,$\beta \subseteq \delta$ 称为 δ 的**基**,如果(X,δ)中的任意 F 开集都可表示为 β 中的一些 F 开集的并;$\gamma \subseteq \delta$

称为 δ 的**子基**,如果 γ 中的 F 开集的有限交的全体是 δ 的基.

F 拓扑的基,子基是通常拓扑的基,子基的自然推广.

下面的定理给出 X 的 F 集族是 X 上某个 F 拓扑的基的充分条件.

定理 1.5　设 X 是非空集合,$\beta\subseteq\mathscr{F}(X)$适合:

$FB1$.　$\bigvee\{B\in\mathscr{F}(X)\mid B\in\beta\}=X$;

$FB2$.　$A,B\in\beta\Rightarrow A\wedge B\in\beta$.

命 $\delta=\{A\in\mathscr{F}(X)\mid\exists\ \beta_A\subseteq\beta,A=\bigvee_{B\in\beta_A}B\}\subseteq\mathscr{F}(X)$,则 β 是 X 上的 F 拓扑 δ 的基.此时 δ 称为由 β 作为基生成的 F 拓扑.

证明　只须验证 δ 是 X 上的 F 拓扑.事实上,

$FO1$　由 $FB1$,$X\in\delta$ 及因$\varnothing\subseteq\beta$,$\varnothing=\bigvee_{B\in\varnothing}B\in\delta$.

$FO2$　设 $A,B\in\delta$,有 $\beta_A=\{A_t\mid t\in T\}$,$\beta_B=\{B_s\mid s\in S\}$,使得 $A=\bigvee_{t\in T}A_t$,$B=\bigvee_{s\in S}B_s$.于是

$$\begin{aligned}A\wedge B&=(\bigvee_{t\in T}A_t)\wedge(\bigvee_{s\in S}B_t)\\&=\bigvee\{A_t\wedge B_s\mid t\in T,s\in S\},\end{aligned}$$

由 $FB2$,$\forall\ t\in T,s\in S$,$A_t\wedge B_s\in\beta$,故 $A\wedge B\in\delta$.

$FO3$ 显然成立.证毕.

类似地,有

定理 1.6　设 X 是非空集合,$r\subsetneq\mathscr{F}(X)$适合

$$\bigvee\{B\in\mathscr{F}(X)\mid B\in r\}=X.$$

则 X 上存在 F 拓扑 δ,使得 r 是 δ 的子集.

事实上,命

$$\beta=\{B_1\wedge\cdots\wedge B_n\mid B_k\in r,1\leqslant k\leqslant n,n=1,2,\cdots\}\subseteq\mathscr{F}(X),$$

则 β 适合 $FB1-2$,因而是 X 上 F 拓扑 δ(见定理 1.5)的基,r 是其子基.此时称 δ 是由 r 作为**子基生成**的 F 拓扑.证毕.

例 1.2　设 R 表示通常实直线,命 $\sum$ 是具有下述性质的映射

$\lambda: R \to [0,1]$的全体：

λ是单调递减的(即$t \leqslant s \Rightarrow \lambda(t) \geqslant \lambda(s)$)且当$\lambda < 0, \lambda(t) = 1$,当$\lambda > 1, \lambda(t) = 0$.

在$\sum$上规定二元关系"~":$\forall\ \lambda, \mu \in \sum$,

$$\lambda \sim \mu \Leftrightarrow \forall\ t \in R, \lambda(t_+) = \mu(t_+), \lambda(t_-) = \mu(t_-),$$

其中$\lambda(t_+) = \bigvee\{\lambda(s) \mid s > t\}, \lambda(t_-) = \bigwedge\{\lambda(s) \mid s < t\}$.

易见"~"是$\sum$上的等价关系.

命$X = \sum/\sim$为$\sum$按"~"所得的等价类的集合,$\lambda \in \sum$所在的等价类记为$[\lambda]$.

例如　$\forall\ t: 0 \leqslant t \leqslant 1$,命$\lambda_t: R \to [0,1]$,使得当$s < t, \lambda_t(s) = 1$,当$s \geqslant t, \lambda_t(s) = 0$.

则$\lambda_t \in \sum$,而与λ_t在同一等价类$[\lambda_t]$中的映射μ,除了$s = t$时可取$[0,1]$上任意值外,有$\mu(s) = \lambda_t(s)$. 于是,可将通常单位区间$[0,1]$上的点t与上述映射λ_t所在的等价类$[\lambda_t]$等同,从而使$[0,1]$成为X的子集.

现在我们在X上适当建立F拓扑,使之成为F拓扑空间. 为此,$\forall\ t \in R$,定义$l_t, r_t \in [0,1]^X$,使得$\forall\ [\lambda] \in X$,

$$l_t([\lambda]) = (\lambda(t_-))' = 1 - \lambda(t_-),$$

$$r_t([\lambda]) = \lambda(t_+)$$

(易见l_t, r_t的定义与$[\lambda]$的代表映射λ选取无关).

注意到当$t > l, l_t = X$,X上以$\{l_t, r_t \mid t \in R\} \subseteq \mathscr{F}(X)$为子基生成的$F$拓扑记为$\delta$,则$(X, \delta)$称为$F$**单位**区间,常记为$[0,1](I)$,其中$I$表示格$L = [0,1]$.

类似地,考虑

$\sum^* = \{\lambda: R \to [0,1] \mid \lambda$单调递减,$\bigwedge_{t \in R} \lambda(t) = 0, \bigvee_{t \in R} \lambda(t) = 1\}$,在$\sum^*$

上规定“～”：$\forall\ \lambda,\mu\in\sum^*$，

$$\lambda\sim\mu\Leftrightarrow\forall\ t\in R,\lambda(t_+)=\mu(t_+),\lambda(t_-)=\mu(t_-)$$

则“～”是$\sum^*$上的等价关系，记 X^* 是$\sum^*$按“～”分成的等价类的集合.

进而，$\forall\ t\in R$，命 $l_t,r_t\in\mathscr{F}(X^*)$，使得$\forall\ [\lambda]\in X^*$，

$$l_t([\lambda])=(\lambda(t_-))',r_t([\lambda])=\lambda(t_+).$$

在 X^* 上由$\{l_t,r_t|t\in R\}$作为子基生成的 F 拓扑记为 δ^*，则(X^*,δ^*)称为 F **实直线**，常记作 $R(I)$.

注　若用二元格$\{0,1\}$代替格 $L=[0,1]$，则可将通常单位区间$[0,1]$看作 F 单位区间的特殊情形. 事实上，如前述将 $t\in[0,1]$ 与$[\lambda_t]$等同(当 $s<t,\lambda_t(s)=1$，当 $s\geqslant t,\lambda_t(s)=0$)，此时通常单位区间$[0,1]$的拓扑子基

$$\{[0,t)\,|\,0<t\leqslant 1\}\cup\{(t,1]\,|\,0\leqslant t<1\}$$

正好与$\{l_t\,|\,0<t\leqslant l\}\cup\{r_t\,|\,0\leqslant t<1\}$等同.

例 1.3　设$(X,\mathscr{T})$是通常的拓扑空间，F 集 $A:X\to[0,1]$称为 X 上的**下半连续函数**，如果$\forall\ \lambda\in[0,1]$，

$$\{x\in X\,|\,A(x)>\lambda\}\in\mathscr{T},$$

即 $A_\lambda\in\mathscr{T}$. 则

$$\omega(\mathscr{T})=\{A\in\mathscr{F}(X)\,|\,A\text{ 是 }X\text{ 上的下半连续函数}\}$$

是 X 上的 F 拓扑. 事实上，

*FO*1　是明显的.

*FO*2　设 $A,B\in\omega(\mathscr{T})$，因$\forall\ \lambda\in[0,1]$，

$$\{x\in X\,|\,(A\wedge B)(x)>\lambda\}=A_\lambda\cap B_\lambda\in\mathscr{T},$$

故 $A\wedge B\in\omega(\mathscr{T})$.

*FO*3　设 $A_t\in\omega(\mathscr{T}),t\in T$. 因$\forall\ \lambda\in[0,1]$，

$$\bigvee_{t\in T}A_t(x)>\lambda\Leftrightarrow\exists\ t\in T,A_t(x)>\lambda,$$

于是，$\{x\in X\mid(\bigvee_{t\in T}A_t)(x)>\lambda\}=\bigcup_{t\in T}\{x\in X\mid A_t(x)>\lambda\}\in\mathscr{T}$，故 $\bigvee_{t\in T}A_t\in\omega(\mathscr{T})$.

我们称 $(X,\omega(\mathscr{T}))$ 为 $(X,\mathscr{T})$ **拓扑生成的** F 拓扑空间. 事实上，$(X,w(\mathscr{T}))$ 还是满层的 F 拓扑空间，因为常值函数 $c_\lambda: X\to[0,1]$ 是下半连续的.

易见，若 $A\subseteq X$ 是 X 的通常子集，则

$$A\in\mathscr{T}\Leftrightarrow\chi_A\in\omega(\mathscr{T}),$$

其中 $\chi_A: X\to[0,1]$ 是 A 的特征函数.

应当指出，X 上的通常拓扑 $\mathscr{T}$ 与 F 拓扑 $\omega(\mathscr{T})$ 的这种联系是重要而有意义的. 事实上，反过来对 X 上任意的 F 拓扑 δ，可以决定一个通常拓扑 $\tau(\delta)$，它是由

$$\{A_\lambda\mid\lambda\in[0,1],A\in\delta\}$$

作为子基生成的. 可以证明：

$$\tau(\omega(\mathscr{T}))=\mathscr{T},\quad \delta\subseteq\omega(\tau(\delta)).$$

§2 F 拓扑空间的邻近构造

众所周知，在拓扑空间中邻近构造的描述是基本问题之一. 然而在 F 拓扑学中传统的邻域系方法遇到了麻烦，如果像在通常拓扑学中那样，运用邻域系来定义一些基本拓扑概念及刻画网的收敛，将会带来一些病态的结果. 因此在 F 拓扑空间理论中建立适当的邻近构造及和谐的收敛理论是 F 拓扑学研究中具有深刻意义的工作之一.

在第一章 §6 中，我们引进了 F 点与 F 集的一种重要的邻属关系——“重于”(第一章中定义 6.4)，它一方面是通常点对集合

的"属于"关系的推广，同时，第一章中的定理6.3，6.4表明在F集合论中"重于"是更自然的关系，本节运用"重于"关系在F拓扑空间中建立F点的邻近构造——重域系，用重域系方法刻画F拓扑的基，引入F集的F附着点，F聚点，F导集等概念，并在此基础上建立F网的收敛理论.

定义 2.1　设(X,δ)是F拓扑空间，x_λ是X的F点.

(1)　$A\in\delta$称为x_λ的**开重域**，如果$x_\lambda qA$(即$A(x)>1-\lambda$)；

(2)　$B\in\mathscr{F}(X)$称为x_λ的**重域**，如果存在x_λ的开重域A，使得$A\leqslant B$.

F点x_λ的全体开重域，重域的集合分别记为$Q^\circ(x_\lambda)$，$Q(x_\lambda)$. 显然，$Q^\circ(x_\lambda)\subseteq Q(x_\lambda)$.

可以验证，$B\in Q(x_\lambda)\Leftrightarrow B^\circ\in Q^\circ(x_\lambda)$. 事实上，

"$\Leftarrow$"　由$B^\circ\leqslant B$立得.

"$\Rightarrow$"　因存在$A\in Q^\circ(x_\lambda)$，$A\leqslant B$，知

$$A=A^\circ\leqslant B^\circ\in\delta, x_\lambda qA\Rightarrow x_\lambda qB^\circ.$$

故$B^\circ\in Q^\circ(x_\lambda)$.

下述定理是F拓扑空间中重域系的基本性质.

定理 2.1　设(X,δ)是F拓扑空间，$Q(x_\lambda)$表示F点x_λ的重域系. 则有

*FQ*1.　$Q(x_\lambda)\neq\varnothing$，$\forall A\in Q(x_\lambda)$，则$x_\lambda qA$；

*FQ*2.　若$A\in Q(x_\lambda)$，$A\leqslant B$，则$B\in Q(x_\lambda)$；

*FQ*3.　若$A,B\in Q(x_\lambda)$，则$A\wedge B\in Q(x_\lambda)$；

*FQ*4.　若$A\in Q(x_\lambda)$，则存在$B\in Q(x_\lambda)$，使得$B\leqslant A$且对每一个重于B的F点y_μ，有$B\in Q(y_\mu)$.

反之，若X是非空集合，$\forall F$点x_λ，有F集族$Q(x_\lambda)\subseteq\mathscr{F}(X)$适合*FQ*1－4，则在$X$上存在$F$拓扑$\delta$，使得在$(X,\delta)$中$Q(x_\lambda)$即是$x\lambda$

的重域系.

证明 $FQ1$. 因 $X\in Q(x_\lambda)$,有 $Q(x_\lambda)\neq\varnothing$. 设 $A\in Q(x_\lambda)$,知 $A^\circ\in Q^\circ(x_\lambda)$,即 $A^\circ\in\delta$ 及 $x_\lambda qA^\circ$,从而,$A(x)\geqslant A^\circ(x)>1-\lambda$,故 $x_\lambda qA$.

$FQ2$. 依定义 2.1 是明显的.

$FQ3$. 设 $A,B\in Q(x_\lambda)$,知 $A^\circ,B^\circ\in Q^\circ(x_\lambda)$,于是

$$(A^\circ\wedge B^\circ)(x)=\min\{A^\circ(x),B^\circ(x)\}>1-\lambda,$$

故 $(A\wedge B)^\circ=A^\circ\wedge B^\circ\in Q^\circ(x_\lambda)$,即 $A\wedge B\in Q(x_\lambda)$.

$FQ4$. 设 $A\in Q(x_\lambda)$,取 $B=A^\circ\leqslant A$,知 $B\in Q(x_\lambda)$ 且若 $y_\mu qB$,有 $B\in Q(y_\mu)$.

反之,设 X 是非空集合,对任何 F 点 x_λ 联系 $Q(x_\lambda)\subseteq\mathscr{F}(X)$ 适合 $FQ1-4$,则命

$$\delta=\{A\in\mathscr{F}(X)\,|\,x_\lambda qA\Rightarrow A\in Q(x_\lambda)\},$$

容易直接验证 δ 是 X 上的 F 拓扑(证明 $FO3$ 需运用重于关系的择一原则,见第一章的定理.6.3).

进而,在 (X,δ) 中设 x_λ 的重域系为 $Q^*(x_\lambda)$. $\forall\, A\in Q(x_\lambda)$,由 $FQ4$,存在 $B\in Q(x_\lambda)$,$B\leqslant A$ 且 $y_\mu qB\Rightarrow B\in Q(y_\mu)$. 可见 $B\in\delta$ 及依 $FQ1$,$x_\lambda qB$,故 $A\in Q^*(x_\lambda)$;再者,设 $A\in Q^*(x_\lambda)$,即存在 $B\in\delta$,$B\leqslant A$,$x_\lambda qB$ 依 δ 的定义,$B\in Q(x_\lambda)$,从而由 $FQ2$,$A\in Q(x_\lambda)$. 总之 $\forall$ F 点 x_λ,有 $Q(x_\lambda)=Q^*(x_\lambda)$,即 $Q(x_\lambda)$ 是 (X,δ) 中 x_λ 的重域系. 证毕.

我们可以用重域来刻画 F 拓扑的基.

命题 2.2 设 (X,δ) 是 F 拓扑空间,$\beta\subseteq\delta$ 是 δ 的基的充要条件是,对任意 F 点 x_λ,若 $x_\lambda qA$,则存在 $B\in\beta$,使得 $B\leqslant A$,$x_\lambda qB$.

证明 必要性 设 $A\in\delta$,$x_\lambda qA$,因 β 是 δ 的基,存在 $\beta_0\subseteq\beta$,$A=\bigvee_{B\in\beta_0}B$. 于是,由第一章的定理 6.3,$x_\lambda qA\Rightarrow\exists\ B\in\beta_0\subseteq\beta$,$x_\lambda qB$,显然 $B\leqslant A$.

充分性 若 β 不是 δ 的基,则存在 $A\in\delta$,使得

$$C = \vee \{B \in \beta \mid B \leqslant A\} \neq A,$$

即有 $x \in X, C(x) < A(x) \leqslant 1$，记 $\lambda = 1 - C(x) > 0$，于是，$A(x) > 1 - \lambda$，$x_\lambda qA$. 根据假设条件，存在 $B \in \beta, B \leqslant A$ 且 $x_\lambda qB$，从而 $B \leqslant C, B(x) \leqslant C(x) = 1 - \lambda$，此与 $x_\lambda qB$ 矛盾. 故 β 是 δ 的基. 证毕.

现在我们运用重域系方法在 F 拓扑空间中引入 F 附着点，F 聚点，F 导集的概念.

定义 2.2 设 (X, δ) 是 F 拓扑空间，$A \in \mathscr{F}(X)$. F 点 x_λ 称为 A 的 F **附着点**，如果 $\forall\ B \in Q(x_\lambda)$，有 $A°qB$（即 $A \not\leqslant B'$）

例如，$x_\lambda \in A \Rightarrow x_\lambda$ 是 A 的 F 附着点；自然，反过来一般不成立.

易见，如 x_λ 是 A 的 F 附着点，$0 < \mu \leqslant \lambda$，则 x_μ 也是 A 的 F 附着点.

定理 2.3 设 (X, δ) 是 F 拓扑空间，$A \in \mathscr{F}(X)$，则

(1) $x_\lambda \in A^-$ 的充要条件是 x_λ 为 A 的 F 附着点；

(2) $A^- = \vee \{x_\lambda \mid x_\lambda$ 是 A 的 F 附着点$\}$.

证明 (1) 必要性 若 x_λ 不是 A 的 F 附着点，即有 $B \in Q(x_\lambda)$，$A\bar{q}B$（即 $A \leqslant B'$），且不妨设 $B \in \delta$. 因 $B(x) > 1 - \lambda, \lambda > 1 - B(x) = B'(x)$，知 $x_\lambda \overline{\in} B'$. 而 $A^- \leqslant (B')^- = B'$，故 $x_\lambda \overline{\in} A^-$.

充分性 若 $x_\lambda \overline{\in} A^- \in \delta'$，知 #啊$= (A^-)' \in \delta$，因

$$\lambda > A^-(x) \Rightarrow (A^-)'(x) > 1 - \lambda,$$

故 $B \in Q°(x_\lambda) \subseteq Q(x_\lambda)$，且 $A \leqslant A^- = B'$，此与 x_λ 是 A 的 F 附着点矛盾.

(2) 由第一章命题 6.1 及(1)，

$$A^- = \vee \{x_\lambda \mid x_\lambda \in A^-\}$$

$$= \vee \{x_\lambda \mid x_\lambda \text{ 是 } A \text{ 的 } F \text{ 附着点}\}.$$

证毕.

定义 2.3 设 (X, δ) 是 F 拓扑空间，$A \in \mathscr{F}(X)$. F 点 x_λ 称为 A

的 F **聚点**，如果$(i)x_\lambda\in A^-$且 $x_\lambda\,\overline{\in}\,A$；或$(ii)x_\lambda\in A$且对任意 $B\in Q(x_\lambda)$，存在 $y\in X, y\neq x$，使得 A 与 B 在 y 处相重(即 $A(y)+B(y)>1$，见第一章定义 6.6)

$A^d=\bigvee\{x_\lambda\,|\,x_\lambda$ 是 A 的 F 聚点$\}$称为 A 的 F **导集**.

定理 2.4　$A^-=A\vee A^d$.

证明　由 $A\leqslant A^-, A^d\leqslant A^-$，知 $A\vee A^d\leqslant A^-$. 反之，设 $x_\lambda\in A^-$且 $x_\lambda\,\overline{\in}\,A$，知 x_λ 是 A 的 F 聚点，$x_\lambda\in A^d$. 因此

$$A^-=\bigvee\ \{x_\lambda\,|\,x_\lambda\in A^-\}\leqslant A\ \vee\ A^d.$$

故 $A=A\vee A^d$. 证毕.

推论 2.5　在 F 拓扑空间(X,δ)中

$$A\in\delta'\Leftrightarrow A^d\leqslant A.$$

注　由 A^d 的定义，若 x_λ 是 A 的 F 聚点，则 $x_\lambda\in A^d$；但反过来一般不成立，这是与 F 附着点的性质(定理 2.3)不同的.

上述讨论表明重域系方法是有效的. 与之相应的，在 F 拓扑空间中还可以用"远域"的方法来建立其邻近构造. 设(X,δ)是 F 拓扑空间，$A\in\delta'$称为 F 点 x_λ 的**闭远域**，如果 $x_\lambda\,\overline{\in}\,A$；$B\in\mathscr{F}(X)$称为 x_λ 的**远域**，如果存在 x_λ 的闭远域 A，使得 $B\leqslant A$. 实际上，因 $x_\lambda\,\overline{\in}\,A\Leftrightarrow x_\lambda qA'$，易见

A 是 x_λ 的闭远域$\Leftrightarrow A'\in Q^\circ(x_\lambda)$,

A 是 x_λ 的远域$\Leftrightarrow A'\in Q(x_\lambda)$,

故在 F 拓扑空间的情形，两者的讨论是相通的. 然而后者对于推广到一般完全分配格，完备格上的拓扑时，还具有一定的优越性(参阅[134]，[136]等).

现在，我们转向在 F 拓扑空间中建立 F 网的收敛性. 先给出一些定义.

定义 2.4　设 D 是非空集合，"$\leqslant$"是 D 上的二元关系. $D=\langle D,$

$\leqslant\rangle$称为**定向集**,如果

(i) $\leqslant$具有反身性,即$\forall\ n\in D, n\leqslant n$;

(ii) $\leqslant$具有传递性,即若$m,n,k\in D, m\leqslant n, n\leqslant k$,则$m\leqslant k$;

(iii) $\forall\ m,n\in D$,存在$k\in D$,使得$m\leqslant k, n\leqslant k$.

例如,自然数集N按自然数的大小顺序是一定向集$\langle N,\leqslant\rangle$.

定义 2.5 设X是非空集合,D是定向集,命

$$M(X)=\{x_\lambda \mid x\in X, 0<\lambda\leqslant 1\},$$

即X中全体F点的集合.映射$S:D\to M(X)$称为X中的F**网**,记为$S=\{S(n), n\in D\}$.

$\forall\ n\in D, S(n)$也记为s_n,于是F网S也记为$S=\{s_n, n\in D\}$.

例如,若$D=\langle N,\leqslant\rangle$,则$X$中的$F$网$S$即由$F$点组成的序列$\{s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots\}$.

定义 2.6 设X是非空集合,$S=\{s_n, n\in D\}$是X中的F网,$A\in\mathscr{F}(X)$.

(1) 如果$\forall\ n\in D, s_n\in A$,则称$S$是$A$**中的**$F$网;

(2) 如果$\forall\ n\in D, s_n qA$,则称F网S**重于**A;

(3) 如果存在$m\in D$,使得当$m\leqslant n\in D$,有$s_n qA$,则称F网S**最终重于**A;

(4) 如果$\forall\ m\in D$,存在$n\in D$,使得$m\leqslant n$,,$s_n qA$,则称F网S**常常重于**A.

定义 2.7 设(X,δ)是F拓扑空间,$S=\{s_n, n\in D\}$是X中的F网,$x_\lambda\in M(X)$.

(i) 如果$\forall\ A\in Q(x_\lambda)$,$F$网$S$最终重于$A$,则称$F$网$S$**收敛于**$F$点$x_\lambda$,记为$S\to x_\lambda$.

此时,也称x_λ是F网S的**极限点**.

(ii) 如果$\forall\ A\in \dot{Q}(x_\lambda)$,$F$网$S$常常重于$A$,则称$F$网**聚于**$F$点

x_λ，记为 $S \succ x_\lambda$.

此时也称 x_λ 是 F 网 S 的**聚点**.

显然，$S \to x_\lambda \Rightarrow S \succ x_\lambda$.

记 $\lim S = \bigvee \{x_\lambda \in M(X) \mid S \to x_\lambda\} \in \mathscr{F}(X)$,

$\mathrm{ad} S = \bigvee \{x_\lambda \in M(X) \mid S \succ x_\lambda\} \in \mathscr{F}(X)$,

易见 $\lim S \leqslant \mathrm{ad} S$；$S \to x_\lambda (S \succ x_\lambda)$，$\mu \leqslant \lambda$，则 $S \to x_\mu (S \succ x_\mu)$.

命题 2.6　设 $S = \{s_n, n \in D\}$ 是 F 拓扑空间 (X, δ) 的 F 网，$x_\lambda \in M(X)$.

(1)　$S \to x_\lambda$ 的充要条件是 $x_\lambda \in \lim S$；

(2)　$S \succ x_\lambda$ 的充要条件是 $x_\lambda \in \mathrm{ad} S$.

证明　(1)　必要性由 $\lim S$ 的定义立得

充分性. 设 $x_\lambda \in \lim S$，只须验证 $\forall A \in Q^\circ(x_\lambda)$，$S$ 最终重于 A（因为 $\forall B \in Q(x_\lambda)$，存在 $A \in Q^\circ(x_\lambda)$，$A \leqslant B$，S 最终重于 $A \Rightarrow S$ 最终重于 B）. 事实上，因 $x_\lambda q A$ 知 $x_\lambda \overline{\in} A'$，但 $x_\lambda \in \lim S$，可见 $\lim S \not\leq A'$. 于是存在 F 网 S 的极限点 $y_\mu \overline{\in} A'$，即 $y_\mu q A$，$A \in Q(y_\mu)$，故 F 网 S 最终重于 A

(2)　可类似(1)证明. 证毕.

下面的定理 2.7，2.9 表明，利用重域定义的 F 网收敛可以恰当地刻画 F 集的闭包，F 附着点，F 聚点.

定理 2.7　设 (X, δ) 是 F 拓扑空间，$A \in \mathscr{F}(X)$，$x_\lambda \in M(X)$. 则 $x_\lambda \in A^-$ 的充要条件是存在 A 中的 F 网 $S \to x_\lambda$.

证明　必要性　设 $x_\lambda \in A^-$，由定理 2.1 的 $FQ3$，$Q(x_\lambda)$ 就包含关系"$\geqslant$"是一个定向集，记为 D. $\forall B \in D$，因 x_λ 是 A 的 F 附着点，有 AqB，即存在 $y \in X$，$B(y) + A(y) > 1$，可见 $\mu = A(y) > 0$. 于是 $y_\mu \in A$ 且 $y_\mu q B$. 命

$$S: D \to M(X), \qquad B \mid \to y_\mu$$

则 S 是 A 中的 F 网. 下面验证 $S \to x_\lambda$.

$\forall\ G\in Q(x_\lambda)$，任取 x_λ 的重域 $B\leqslant G$（即在定向集 D 中 $G\geqslant B$），记 $S(B)=y_\mu$，因 $y_\mu qB, G(y)\geqslant B(y)>1-\mu$，知 $y_\mu qG$. 因此 F 网 S 最终重于 G，故 $S\to x_\lambda$.

充分性　设在 A 中有 F 网 $S=\{s_n, n\in D\}\to x_\lambda$，即 $\forall\ B\in Q(x_\lambda)$，$S$ 最终重于 B. 依定义 2.6，存在 $y_\mu=s_n\in A$ 且 $y_\mu qB$，即 $\mu\leqslant A(y)$ 及 $B(y)>1-\mu$，从而 $B(y)+A(y)>1$，因之 AqB. 故由定义 2.2，$x_\lambda\in A^-$. 证毕.

推论 2.8　设 (X,δ) 是 F 拓扑空间，$A\in\mathscr{F}(X)$. 则 $A\in\delta'$ 的充要条件是 A 中的任何 F 网不能收敛于不属于 A 的 F 点.

证明　必要性　若存在 A 中的 F 网 $S\to x_\lambda$，$x_\lambda\overline{\in}A$，由定理 2.7，$x_\lambda\in A^-$，故 $A\neq A^-$. 此与 $A\in\delta'$ 矛盾.

充分性. $\forall\ x_\lambda\in A^-$，由定理 2.7，存在 A 中的 F 网 $S\to x_\lambda$. 根据假设条件，$x_\lambda\in A$. 因而 $A^-\leqslant A$，故 $A^-=A$，即 $A\in\delta'$. 证毕.

类似于定理 2.7，有

定理 2.9　设 (X,δ) 是 F 拓扑空间，$A\in\mathscr{F}(X)$，$x_\lambda\in M(X)$，则 x_λ 是 A 的 F 聚点的充要条件是存在 $A-x_\lambda$ 中的 F 网 $S\to x_\lambda$，其中 $A-x_\lambda\in\mathscr{F}(X)$，$\forall\ y\in X$，

$$(A-x_\lambda)(y)=\begin{cases}0, & \text{当 } y=x \text{ 且 } A(x)\geqslant\lambda,\\ A(y), & \text{其余情形}.\end{cases}$$

证明　依定义 2.3，分两种情况：

(i)　若 $x_\lambda\overline{\in}A$，此时易见 $A-x_\lambda=A$. 于是，因

$$x_\lambda \text{ 是的 } AF \text{ 聚点} \Leftrightarrow x_\lambda\in A^-,$$

及定理 2.7，x_λ 是 A 的 F 聚点的充要条件是在 $A=A-x_\lambda$ 中存在 F 网 $S\to x_\lambda$.

(ii)　若 $x_\lambda\in A$，由定义 2.3，定理 2.7 等，有

x_λ 是 A 的 F 聚点 $\Leftrightarrow\forall\ B\in Q(x_\lambda)$，$A$ 与 B 在异于 x 处相重

$$\Leftrightarrow \forall\ B \in Q(x_\lambda),(A-x_\lambda)qB$$

$$\Leftrightarrow x_\lambda \in (A-x_\lambda)^-$$

$$\Leftrightarrow \text{存在 } A-x_\lambda \text{ 中的 } F \text{ 网 } S \to x_\lambda.$$

证毕.

最后我们介绍 F 子网的概念，它相应于通常拓扑空间中的子网(子序列概念的推广).

定义 2.8　设 X 是非空集合，

$$S=\{s_n,n\in D\},\quad T=\{t_m,m\in E\}$$

均是 X 中的 F 网，T 称为 S 的 F **子网**，如果存在映射 $f:E\to D$，使得

(i)　$T=S\circ f$，即 $\forall\ m\in E, t_m=T(m)=S(f(m))$；

(ii)　$\forall\ n_0\in D$，存在 $m_0\in E$，使得当 $m\in E, m\geqslant m_0$ 时，有 $f(m)\geqslant n_0$.

命题 2.10　设 (X,δ) 为 F 拓扑空间，X 中的 F 网 $S\to x_\lambda\in M(X)$，T 是 S 的 F 子网，则 $T\to x_\lambda$.

证明　设 $S=\{s_n,n\in D\}$，$T=\{t_m,m\in E\}$ 及 $f:E\to D$ 适合定义 2.8. $\forall\ A\in Q(x_\lambda)$. 因 $S\to x_\lambda$，由定义 2.7，F 网 S 最终重于 A，即存在 $n_0\in D$，使得当 $n_0\leqslant n\in D$，s_nqA. 依定义 2.8，对 $n_0\in D$，存在 $m_0\in E$，使得当 $m\in E, m\geqslant m_0$ 时，$f(m)\geqslant n_0$，因而，$t_m=S(f(m))$ 与 A 相重. 故 F 网 T 最终重于 A，即 $T\to x_\lambda$. 证毕.

定理 2.11　设 (X,δ) 是 F 拓扑空间，$S=\{s_n,n\in D\}$ 是 X 的 F 网，$x_\lambda\in M(X)$. 则 $S\succ x_\lambda$ 的充要条件是 S 有 F 子网 $T\to x_\lambda$.

证明　必要性　设 $S\succ x_\lambda$，即 x_λ 是 F 网的 S 的聚点. 由定义 2.7 知，$\forall\ A\in Q(x_\lambda)$ 及 $n\in D$，存在 $m\in D$ 使得 $m\geqslant n$ 且 s_mqA. 由 $(n,A)\mapsto m$ 决定一映射

$$f:D\times Q(x_\lambda)\to D,$$

则 $f(n,A)\geqslant n$，$S(f(n,A))qA$.

记 $E=D\times Q(x_\lambda)$,在 E 上规定二元关系"$\leqslant$":

$$(n,A)\leqslant(k,B)\Leftrightarrow n\leqslant k \text{ 且 } B\leqslant A,$$

易见 $\langle E,\leqslant\rangle$ 是定向集.于是命

$$T=\{T(n,A),(n,A)\in E\},$$

其中 $T(n,A)=S(f(n,A)\in M(X)$,知 T 是 X 的 F 网,且是 S 的 F 子网,因为$\forall\ n_0\in D$,对 $(n_0,A)\in E$,若 $(n_0,A)\leqslant(n,B)$,即 $n_0\leqslant n$,$B\leqslant A$,有 $f(n,B)\geqslant n\geqslant n_0$.

下面验证 $T\rightarrow x_\lambda$.事实上,$\forall\ A\in Q(x_\lambda)$,取 $n_0\in D$,知 $(n_0,A)\in E$,当 $(n_0,A)\leqslant(n,B)$,有

$$T(n,B)=S(f(n,B))qB.$$

因 $B\leqslant A$,知 $T(n,B)qA$.故 F 网 T 最终重于 A,即 $T\rightarrow x_\lambda$.

充分性　设 F 网 S 有 F 子网 $T=\{t_m,m\in E\}\rightarrow x_\lambda$.$\forall\ A\in Q(x_\lambda)$,因 T 最终重于 A,存在 $m_0\in E$,使得当 $m_0\leqslant m\in E$,有 t_mqA.依定义 2.8,$t_m=S(f(m))$ 及$\forall\ n\in D$,存在 $m_1\in E$,使得当 $m\in E$,$m\geqslant m_1$ 时,$f(m)\geqslant n$.因 E 是定向集,存在 $m\in E$,$m_0\leqslant m$,$m_1\leqslant m$.此时 $f(m)\geqslant n$ 且 $S(f(m))qA$.根据定义 2.6,F 网 S 常常重于 A.故 $S\succ x_\lambda$.证毕.

参考文献

[1] Batle, N. and Trillas, E., Entropy and Fuzzy Integral, J. Math. Anal. Appl., 69(1979), 469—474.

[2] Bellman, R. E. and Giertz, M., On the Analytic Fromalism of Theory of Fuzzy Sets, Infor. Sci., 5(1973), 149—157.

[3] Butnariu, D., Additive Fuzzy Measures and Integrals I, J. Math. Anal. Appl., 93(1983), 436—452.

[4] ——, Fuzzy Measurability and Integrability, ibid, 117 (1986), 385—410.

[5] ——, Additive Fuzzy Measures and Integrals Ⅱ, ibid, 125 (1987), 228—303.

[6] ——, Decompositions and Ranges of Additive Fuzzy Measures, Fuzzy Sets and systems, 10(1983), 135—155.

[7] ——, Measurability Concepts for Fuzzy Mapping, ibid, 3 (1989), 1—6.

[8] Chang. C. L., Fuzzy Topological Space, J. Math. Anal, Appl., 24(1968), 182—189.

[9] 陈必胜，一种不分明的完备映射，模糊数学，2(1986)，37—42.

[10] 陈永义，Fuzzy 算子探讨(1)模糊数学，2(1982)，1—

10.

[11] 陈贻源,模糊数学,华中工学院出版社,1984.

[12] 成和平,Fuzzy 值随机变量序列的收敛性,四川师范大学研究生(硕士学位)毕业论文,1990

[3] 程里春,模糊测度空间,上海铁道学院报,2(1980),105 —113.

[14] ——,Fuzzy 映射的最小逆像,模糊数学,1(1984)21—31.

[15] Cheng Lichun,The Inverse of Union of Intersection Preserving Mapping and Its Applicativn in Fuzzy Relational Eguation with Multi — operators, Proceedings of ISFK, 1987,pp. 627—676.

[16] ——,The Fuzzy Relation Equation with Union or Interserving Uperator (with Boxing Pengl,Fuzzy sets and Systems 25(1988)191—204[17]

[17] Cheng Shaozhong (陈绍仲) and Liu Zuoshu(刘作述), Some Problems in Fuzzy Probability,Fuzzy Information and Decision Processes, North-Holland, 1982, PP. 67 — 70.

[18] ——,——, Using Markoff Kernels to Express Fuzzy Probability, J. Math. Anal. Appl. , 113 (1986), 490 — 503.

[19] ——,——,Fuzzy Orthogonal Random Measure,ibid,118 (1986),476—481.

[20] ——(2),——(1),Fuzzy Random Measure and its Extension Theorem,Fuzzy sets and Sy stems,11(1983),135

—149.

[21] Dubois, D. and Prade, H., Operations of Fuzzy Nuinbers, Int. J. of Systems Science, 9(1978), 613—626.

[22] ——, ——, Fuzzy Real Algebra; Some Results, Fuzzy Sets and Systems, 4(1979), 327—348.

[23] ——, ——, Additions of Interactive Fuzzy Numbers, IEEE Trans. on Automatic Control, 26(1981), 926—936.

[24] ——, ——, A Class of Fuzzy Measures Besed on Triangular Norms. A General Framework for the Combination of Uncertation Information, Int. J. of General Systems, 8 (1982), 43—61.

[25] ——, ——, The Mean Value of a Fuzzy Number, Fuzzy Sets and Systems, 24(1987), 279—300.

[26] ——, ——, Fuzzy Sets and Systems: Theroy and Appl: cations, Academic Press, New York, 1980.

[27] 崔宏斌，郑崇友，保层 Fuzzy 序同态的结构和 Fuzzy 同胚的另一定义，科学通报，32(1987)，964—966.

[28] 方锦暄，Fuzzy 凸集的分离定理，科学通报，28(1983)，1:89—1291.

[29] ——，单值模糊映射，数学物理学报，31(1984)311—317.

[30] ——，Fuzzy 凸集的分离定理(1)，模糊数学，3(1985)，1—8.

[31] ——，关于 Fuzzy 凸集分离定理的一点注记，模糊系统与数学 1(1980)，46—50.

[32] Goguen, J. A., L－Fuzzy Sets, J. Math, Anal, Applo, 18 (1987), 145－174.

[33] Guo Sizhong(郭嗣琮), Fuzzy Random Set and Fuzzy Set－Valued Statistics, BUSEFAL, 27 (1986－1987), 57－65.

[34] Halmos, P. R. Measure Theory, Van Nostrand, New York, 1968.

[35] Hashimoto, H., Convergence of Poners of a Fuzzy Transitive Matrix, Fuzzy Sets and Systems, 9 (1983), 153－160.

[36] 何伯镛,关于格上保并映射类逆运算的几个定理,模糊数学,2(1986),15－20.

[37] 何家儒,不分明测度论(I),不分明集合系,四川师院学报(自然科学版),1(1980),29－38.

[38] ——,不分明测度论(Ⅱ),不分明可测集合与不分明测度,同上,2(1980),16－46.

[39] ——,不分明测度论(Ⅲ),不分明可测变换,同上,3(1980),19－27.

[40] ——,不分明测度论(IV),不分明积分,同上,2(1981),8－14.

[41] ——,不分明测度论(V),不分明乘积空间,同上,数学专辑(1981),59－68.

[42] ——,Fuzzy 积分的几点注记,同上,1(1981),37－41.

[43] ——,不分明事件与不分明概率,同上,4(1980),15－26.

[44] ——,不分明随机变量,同上,1(1982),14－21.

[45] ——,不分明随机向量,同上,1(1983),11—21.

[46] ——,不分明条件数学期望与不分明条件概率(I),(Ⅱ).,同上,2(1982),9—15;2(1984),19—28.

[47] ——,Fuzzy 半测度与 Fuzzy 测度,同上,2(1983),11—22.

[48] ——,菅野 Fuzzy 测度论的基本概念,同上,3(1983),55—67.

[49] ——,可生成的 Fuzzy σ 系与 Fuzzy 测度的积分表示,同上,2(1985),11—16.

[50] ——,半测度与积分,同上,1(1985),44—54.

[51] ——,定义在实数集 E 上的 Fuzzy 数,四川师范大学学报(自然科学版),4(1985),27—30.

[52] ——,Fuzzy 值函数的 Lebesgue 积分,同上,4(1985),31—40.

[53] ——,Fuzzy 数度量空间,同上,2(1986),45—51.

[54] ——,S 型 Fuzzy 乘积测度与重积分,同上,1(1987),1—10.

[55] ——,Fuzzy 数与 Fuzzy 值函数的分拆定理,河南大学学报,2(1985),37—40.

[56] ——,关于 Fuzzy 集合的基本运算,模糊数学,1(1982),1—10.

[57] ——,Fuzzy 集合的 p 阶和、积与差,同上,3(1986),63—64.

[58] ——,随机 Fuzzy 集,同上,4(1985),37—48.

[59] ——,Fuzzy 数列的收敛性,数学季刊,4(1987),90—100.

[60] ——,等水平模糊数与等核模糊数,数学的实践与认识,1(1988),14—17.

[61] ——,点式 Fuzzy 映射及其扩张,模糊系统与数学,1(1988),26—31.

[62] ——,Fuzzy 映射与扩张定理,中国模糊数学与模糊系统学会第四届年会交流论文,1988.昆明.

[63] He Jiaru, The Fuzzy Number Metric Space and Convergences for a Sequence of Fuzzy Numbers, Proceedings of I SFK, 1987, 741—742.

[64] 何明,L—不分集上的双诱导映射,科学通报,31(1986),475.

[65] 贺仲雄,模糊数学及其应用,天津科技出版社,1983.

[66] 花文秀,Fuzzy 测度空间的扩张定理,河南大学学报,2(1983)44—48.

[67] ——,Fuzzy 测度的弱收敛,同上 4(1986),17—20.

[68] Hua WenXiu, Some Properties of g—Measures, BUSEFAL, 26(1986), 47—56.

[69] ——, The Properties of Some Non—Additive Measure, FuzzySets and Systems, 2(1988), 373—377.

[70] 胡诚明,Fuzzy 拓扑空间的一个度量化定理,自然杂志,7(1981)744.

[71] ——,Fuzzy 一致空间 Ⅰ,Ⅱ,模糊数学,2(1982)55—62;1(1984)33—42.

[72] 胡伟文,关于广义序同态的若干讨论,四川师范大学研究生(硕士学位)毕业论文,1990.

[73] 蒋继光,不分明拓扑空间的分离公理与紧性,四川大学

学报(自然科学版),3(1977),1—10.

[74] ——,不分明仿紧空间,同上,1(1981)47—50.

[75]金长泽,不分明拓扑学的某些发展概况,东北师大学报(自然科学版)2(1981).

[76] ——,不分明拓扑空间的局部良紧性,科学通报,26(1983),252.

[77] Kaleva, 0. and Seikkala, S. , On Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 12(1983), 215—229.

[78] Kim, K. H. and Roush, F. W. , Generalize Fuzzy Metrices, Fuzzy Sets and Systems, 4(1980), 293—315.

[79] Klement, E. P. , Fuzzyσ—Algebras and Fuzzy Measurable Functions, Fuzzy Sets and Systems, 4(1980), 83—93.

[80] ——, Characterization of Finite Fuzzy Measures Using Markoff—Kernels, J. Math. Anal. appl, 75(1980), 330—339.

[81] ——, Characterization of Fuzzy Measures Constructed by Means of Triangular Norms, ibid, 86(1982), 345—358.

[82] Klement, E. P. , Lowen, R. and Schwyhla, W. , Fuzzy Probability Measures, Fuzzy Sets and Systems, 1(1981)21—30.

[83] Kruse, R. , A Note onλ—Additive Fuzzy Measures, Fuzzy Sets and Systens, 8(1982).

[84] Kwakernak, H. , Fuzzy Randam Variables, —I: Definitions and Theorems, Inf. Sci, 15(1978), 1—29; — II, Algorithms and Examples for The Discrete case, Inf. Sci. 17(1979), 253—278.

[85] 李必祥,解 Fuzzy 关系方程的初等变形法,模糊数学 1(1981).

[86] 李西和,一般的 Fuzzy 映射和一般的 Fuzzy 可测映射,四川师院学校(自然科学版)1(1982)22—

[87] ——,一类 Fuzzy 数方程的引入及其诱导方程组的解,同上,2(1984),49—60.

[88] ——,关于一类 Fuzzy 积分概念与理论的建立,模糊数学 2(1984),107—110.

[89] ——,广义区间值函数的可测性,四川师范大学学报(自然科学版),3(1986),49—55.

[90] ——,广义区间值函数的运算性质,同上,1(1987),42—53.

[91] Li Xihe, Stability of Random Membership Frequency and Fuzzy Statistics, Fuzzy Sets and Systems, 29(1989)89—102.

[92] 刘旺金,不分明集合的初等性质,四川师院学报(自然科学版),1(1979),10—19.

[93] ——,不分明代数的基本概念,同上,2(1980)25—33.

[94] ——,L—Fuzzy 矩阵的代数性质,同上,数学专辑(1981)79—85.

[95] ——,L—Fuzzy 邻近空间 I,同上,4(1982),57—70.

[96] ——,Fuzzy 行列式的性质,同上,2(1983),23—27.

[97] ——,Fuzzy 对称方阵的可实现问题,模糊数学 1(1982)69—76.

[98] ——,L—Fuzzy 近性空间的拓扑,同上,4(1983),103—105.

[99] ——,Fuzzy $\check{C}$-闭包算子与 Fuzzy 拓扑,四川师范大学学报(自然科学版)3(1986),28—35.

[100] ——,完全分配格上的方程组及其在 Fuzzy 方程组的应用,同上,1(1987),54—63.

[101] ——,不分明矩阵的研究,数学的实践与认识,2(1989)77—83.

[102] Liu Wangjin, Fuzzy Proximity spaces Redefined, Fuzzy Sets and Systems, 15(1985)214—248.

[103] ——,Fuzzy Invariant Subgroups and Fuzzy Ideals, ibid, 8(1982),133—139.

[104] ——,Uniformity and Proximity of L—Fuzzy Topological spaces, ibid, 30(1989),37—46.

[105] 刘应明,格上保并映射类的逆运算及其在 Fuzzy 一致空间中的应用,模糊数学,2(1981),21—28.

[106] ——,Fuzzy 拓扑空间的邻近构造,同上,3(1982),83—88.

[107] ——,关于不分明单位区间紧性的一点注记,科学通报,25(1980),数学物理专辑,33—35.

[108] ——,Fuzzy 集论中邻属关系的分析,数学年刊,5(1984),461—466.

[109] ——,格上拓扑学与不分明拓扑学,四川大学学报(自然科学版)3(1986),43—52.

[110] ——,层次结构,择一原则及其他,大自然探索,1(1987),29—35.

[111] ——,关于 Fuzzy 收敛类,数学进展,16(1987),195—198.

[112] Liu Yingming, Structure of Fuzzy Order Homomorphisms, Fuzzy Sets and Syseems, 21(1987), 43—51.

[113] 刘应明、何明，完全分配格上的诱导映射，科学通报，30(1985)，1203—1206.

[114] 刘应明，罗懋康，不分明单位区间的良紧性，同上，31(1986)，1765—1767.

[115] 蒲保明，刘应明，不分明拓扑学(I)—不分明点的邻近构造与Moor—Smith式收敛，四川大学学报(自然科学版)1(1977)30—50；或 Pu Pao—ming and Liu Ying—ming, J. Math. Anal. Appl., 76(1980)571—599.

[116] ——，——，Fuzzy Topology(Ⅱ)，Product and guotient Spaces, J. Math. Anal. Appl. 77(1980), 20—37.

[117] ——，——，国内不分明拓扑研究工作的评述(英文)，数学研究与评论，4(1982)167—172.

[118] 罗承忠，Fuzzy 集与集合套，模糊数学，4(1983). 113—126.

[119] ——，广义 Fuzzy 逆矩阵的求法，同上，1(1981)，

[120] ——，扩张原理与模糊数，模糊数学，3(1984).

[121] ——，模糊数学引论，上册，北京师范大学出版社，1989.

[122] 罗承忠，王德谋，区间值函数积分的推广与 Fuzzy 值函数的积分，同上，3(1983)45—52。

[123] 楼世博，程里春，模糊映射，数学物理学板，2(1981) 145—155。

[123] Miyakashi, M. and Shimbo, AStrong Law of Large Num-

bers for Fuzzy Random Variables, Fuzzy Sets and Systems, 12(1984)133—142.

[124] ——, An Individual Ergodic Theorem for Fuzzy Random Variables, ibid. 13(1984)285—290.

[125] 彭祖赠, Fuzzy 子集的 Fuzzy 测度, 模糊数学 4(1982).

[126] Puri, M. L. and Ralescu, Fuzzy Random Variables, J. Math. anal. Appl., 114(1986), 409—422.

[127] 秦新祥, B^X 随机 Fuzzy 集的若干结果, 四川师范大学研究生(硕士学位)毕业论文, 1990.

[128] Sugeno, M., Theory of Fuzzy Integrals and its Applications, PH. D. Dissertation, Tokyo Institute of Technologe, 1974.

[129] Suzuki, H., On Fuzzy Measures Defined by Fuzzy Integrals, J. Math. Anal. Appl., 132(1988), 87—101.

[130] Ralescu, D. and Adams, G., The Fuzzy Integral, J. Math. Anal. Appl., 75(1980), 562—570.

[131] 王戈平, 不分明集的一个分解定理及其在不分明拓扑中的应用, 科学通报 26(1981), 259—262.

[132] ——, Fuzzy σ-Algebra and Fuzzy Measurable Spaces, 同上, 27(1982). 818-821.

[133] ——, 完全分配格上可实现方阵的容度最小上界的估计, 模糊数学 3(1985), 65—74.

[134] 王国俊, 拓扑分子格(I)陕西师大学报(自然科学版) 1979, 1—15; 科学通报, 28(1983)1089—1090.

[135] ——, 邻域方法在 Fuzzy 拓扑学中的困难, 模糊数学,

4(1982)113—116.

[136] ——,广义拓扑分子格,中国科学A辑,12(1983),1063—1072.

[136] ——,Fuzzy 拓扑十五年,模糊数学,2(1984),79—109.

[137] ——,论 Fuzzy 格之构造,数学学报,29(1986)4:539—543.

[139] ——,关于序同态的若干特征定理,数学进展,30(1985)241—253.

[140] ——,完全分配格上的序同态,同上,16(1987)1:55—60.

[141] ——,L-fuzzy 拓扑空间论,陕西师范大学出版社,1988.

[142] 王寿仁,概率论基础与随机过程,科学出版社,1986.

[143] 王文平,F 集值函数微积分之探讨,四川师范大学研究生(硕士学位)毕业论文,1990.

[144] 王子孝,Fuzzy 积分与 Fuzzy 性度量,模糊数学,1(1982),57—67.

[145] 王梓坤,概率论基础及其应用,科学出版社,1979.

[146] ——,随机过程论.科学出版社,1965.

[147] 汪培庄,模糊集与模糊集范畴,数学进展 1(1982),1—18.

[148] ——,超 σ 域与集值映射的可测性,科学通报,28(1983),1583—1585.

[149] ——,模糊集合论及其应用,上海科技出版社,1984.

[150] ——,模糊集与随机集落影,北京师范大学出版社,

1985.

[151] Wang Pei-Zhuang, Fuzzy Contac tability'and Fuzzy Variables, Fuzzy Sets and systems, ,1(1982)81—92.

[152] 汪培庄,刘锡荟,集值统计,工程数学学报,创刊号.1984.

[153] 汪培庄,张文修,随机集及其模糊落影分布的简化定义与性质,西安交通大学学报 6(1982),111—116.

[154] 王震源,准随机集与 M-Fuzzy 数的随机表示,河北大学学报,2(1983),1—7.

[154] ——,任意非空集类上一致信任函数的扩张,模糊系统与数学,1(1987)66—70.

[155] Wang Zhemyuan, The Autocontinuity of set Functionand the Fuzzy Integral, J. Math, Anal. Appl. 99(1984), 195—218.

[156] 吴望名 弗晰图与弗晰树,数学的实践与认识,4(1980).

[157] 熊金诚,点集拓扑讲义,人民教育出版社,1981.

[158] 杨乐成,保承集的 Fuzzy 序同态,模糊系统与数学,2(1988)24—29

[159] 伊良忠,关于 L-Fuzzy 正则矩阵的乘积,四川师范大学学报(自然科学版)2(1988)96-103.

[160] 伊良忠,刘旺金,L-Fuzzy 矩阵的不变式,同上 1(1987)118-125.

[161] ——,——,L—Fuzzy 正则矩阵的广义逆,同上 1(1988)17—22.

[162] ——,——,正则 L-Fuzzy 矩阵的幂收敛,模糊系统与

数学 1(1987)59-65.

[163] 严士健,概率论基础,科学出版社,1982.

[164] 俞新贞,关于 λ-可加 Fzzy 测度的 Fuzzy 积分,四川师范大学研究生(硕士学位)毕业论文,1990

[165] Yu Yandong(于延栋),On the Realizable L-Fuzzy Symmetric Matrix,模糊数学,1(1984)15-20.

[166] ——,Triangular Norms and TNF — Sigma -Algebras, Fuzzy Sets and Systems,3(1985),251-264.

[167] Zadeh,L. A,Fuzzy Sets,Infor. Cont. ,8(1965),338—353.

[168] ——,Probability Measures of Fuzzy Events,J. Math. Anal. Appl. ,23(1968),421-427.

[169] ——,Fuzzy Sets ss a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems,1(1978),3-28.

[170] 查健禄,Fuzzy 矩阵的 Schein 秩,模糊数学,2(1982), 11-19.

[171] ——,Fuzzy 向量组的相关性与 Fuzzy 矩阵的秩,4(1984),71-80.

[172] 张文修,Fuzzy 数测度,科学通报,23(1986).

[173] 张文修,乐惠玲,Fuzzy 集的模糸结构,工程数学学报 1(1984).

[174] 张文修,赵汝怀,可能度理论,数学进展 3(1982).

[175] 张文修,模糊数学基础,西安交通大学出版社,1984.

[176] ——,集值测度与随机集,西安交通大学出版社,1986.

[177] 赵汝怀,(N)模糊积分,数学研究与评论,2(1981).

[178] ——,Sugeno模糊积分转化定理,科学通报 1(1984).
[179] 朱瑞英,Fuzzy 对称矩阵的幂收敛,模糊数学,3(1984),40—50.